

チャンネル乱流中のスカラーの非局所的な乱流拡散

東京大学生産技術研究所 半場 藤弘 (Fujihiro Hamba)

Institute of Industrial Science
University of Tokyo

1. はじめに

乱流による熱や物質の輸送を予測するには、温度や濃度などの平均スカラーの輸送方程式の計算を行う。その際必要なスカラーフラックスの乱流モデルとして渦拡散モデルがよく用いられる。しかし大気境界層のような熱対流の乱流場では熱フラックスの渦拡散係数が負になる場合があるなどの欠点もある。この欠点の原因として熱対流乱流では大きな対流渦があるからと考えられる。すなわち局所的な勾配拡散近似が成り立つには、平均場の変化する長さスケールに比べて、拡散を担う乱流の長さスケールは十分小さい必要があるが¹⁾、大気境界層ではこの条件が満たされていないためである。熱対流の大きな渦の効果を取り入れるため、大気境界層のスカラー輸送では非局所的なスカラーフラックスのモデルが提案されている^{2,3)}。また Hamba⁴⁾は大気境界層のLESを用いて非局所的な渦拡散係数を評価した。一方、自然界や工学分野で見られる一般の乱流場では熱対流だけでなく主流の剪断によって乱流が生成される場合が多い。そこで本研究では速度剪断により生成される乱流で非局所的な効果がどの程度あるかを調べるためチャンネル乱流の考察を行った。まずグリーン関数を用いてスカラーフラックスの非局所的な渦拡散表現を導く。次にチャンネル乱流のDNSを行い、速度場とグリーン関数の時間発展を計算して渦拡散係数の分布を求め、スカラーフラックスの非局所的な渦拡散表現の妥当性を確認する。また局所的な渦拡散モデルの値を求め、局所近似の限界と非局所性効果の重要性を考察する。

2. スカラーフラックスの非局所的な渦拡散表現

チャンネル乱流や水平方向に一様な大気境界層などでは平均量は境界面に垂直な座標 y だけに依存するので、スカラーフラックス $\langle v'\theta' \rangle$ の渦拡散モデルは

$$\langle v'\theta' \rangle(y) = -\kappa_T(y) \frac{\partial \Theta(y)}{\partial y} \quad (1)$$

と書ける。ここで Θ は平均スカラー、 κ_T は渦拡散係数を表す。一点完結モデルの一つである渦拡散モデルでは、座標 y のスカラーフラックスは同じ点 y のスカラー勾配に比例する。また、大気境界層のスカラーフラックスのモデルとして次のような非

局所的な渦拡散表現が提案されている³⁾。

$$\langle v'\theta' \rangle(y) = - \int dy' \kappa_{NL}(y; y') \frac{\partial \Theta(y')}{\partial y'} \quad (2)$$

ここで $\kappa_{NL}(y; y')$ は非局所的な渦拡散係数で、座標 y' のスカラー勾配が座標 y のスカラーフラックスに及ぼす寄与を表す。この表現は単にモデルの一つというだけでなく、グリーン関数を用いれば渦拡散係数を厳密に求めることができる⁴⁾。スカラーの揺らぎ部分 θ' の方程式

$$\frac{\partial \theta'}{\partial t} = -U_j \frac{\partial \theta'}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} (u'_j \theta' - \langle u'_j \theta' \rangle) + \kappa \frac{\partial^2 \theta'}{\partial x_j \partial x_j} - u'_i \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} \quad (3)$$

の右辺最後の項を θ' に対する外力であるとみなし、次の発展方程式を満たすグリーン関数を導入する。

$$\frac{\partial g'_i}{\partial t} = -U_j \frac{\partial g'_i}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} (u'_j g'_i - \langle u'_j g'_i \rangle) + \kappa \frac{\partial^2 g'_i}{\partial x_j \partial x_j} + u'_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(t - t') \quad (4)$$

ここでグリーン関数 $g'_i(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t')$ は地点 $\mathbf{x}'$ 時刻 t' に $u'_i(\mathbf{x}', t')$ の大きさの外力があった場合の地点 $\mathbf{x}$ 時刻 t の応答を表す。このグリーン関数を用いて θ' を形式的に解くことができる。

$$\theta'(\mathbf{x}, t) = - \int d\mathbf{x}' \int_0^t dt' g'_i(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') \frac{\partial}{\partial x'_i} \Theta(\mathbf{x}', t') \quad (5)$$

ただし初期値 $\theta'(\mathbf{x}, 0)$ の寄与は省略した。この解を用いるとスカラーフラックスは

$$\langle u'_i \theta' \rangle(\mathbf{x}, t) = - \int d\mathbf{x}' \int_0^t dt' \kappa_{NLij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') \frac{\partial}{\partial x'_j} \Theta(\mathbf{x}', t') \quad (\equiv \langle u'_i \theta' \rangle_{NL}) \quad (6)$$

$$\kappa_{NLij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = \langle u'_i(\mathbf{x}, t) g'_j(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') \rangle \quad (7)$$

と表せる。ここで $\kappa_{NLij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t')$ は非局所的な渦拡散率であり、地点 $\mathbf{x}'$ 時刻 t' の平均スカラー勾配が地点 $\mathbf{x}$ 時刻 t におけるスカラーフラックスに与える影響を表す。スカラーフラックスは空間的にも時間的にも非局所的な影響を受けることがわかる。

もし(6)で κ_{NLij} が0でない値を持つ領域で平均スカラー勾配がほぼ一定と近似できるならスカラーフラックスは次の渦拡散近似で表される。

$$\langle u'_i \theta' \rangle \equiv -\kappa_{Lij} \frac{\partial \Theta}{\partial x_j} \quad (\equiv \langle u'_i \theta' \rangle_L) \quad (8)$$

$$\kappa_{Lij}(\mathbf{x}, t) = \int d\mathbf{x}' \int_0^t dt' \kappa_{NLij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') \quad (9)$$

したがって局所的な渦拡散近似が成り立つかどうかは、非局所的な渦拡散率 κ_{NLij} の長

さスケールに比べて平均スカラー場の変化する長さスケールが十分長いかに依存することがわかる。

3. チャネル乱流のDNSによる考察

DNSの結果を用いて非局所的なスカラーフラックスの式(6)が厳密に成り立つか、また(8)の局所近似がどの程度成り立つかを考察する。DNSでは次の速度とスカラーの時間発展の式

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + f_{u,i} \quad (10)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_j} (u_j \theta) + \kappa \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_j \partial x_j} + f_\theta \quad (12)$$

およびグリーン関数 g_i' の式(4)を計算する。 f_u は外力項、 f_θ はスカラーのソース項である。物理量は摩擦速度とチャネル半幅で無次元化する。本研究で扱うチャネル乱流は摩擦速度のレイノルズ数は $Re_\tau=180$ 、プラントル数は $Pr=0.7$ 、計算領域は $L_x=9.6$, $L_y=2$, $L_z=4.8$ であり格子点数は $256 \times 128 \times 256$ である。 $y=-1$ と $y=1$ で滑りなし条件、 x, z 方向には周期境界条件を用いる。空間については2次精度の中心差分、時間についてはAdams-Bashforth法を用いる。グリーン関数の $y=\pm 1$ の境界条件は $g_i'=0$ である。

スカラーの境界条件として次の2ケースの結果を示す。

$$\text{Case 1: } f_\theta = 2, \quad \theta(x, -1, z) = \theta(x, 1, z) = 0 \quad (13)$$

$$\text{Case 2: } f_\theta = 0, \quad \theta(x, -1, z) = \sin(4\pi x / L_x), \quad \theta(x, 1, z) = 0 \quad (14)$$

Case 1では上下の壁でスカラーは0だが、空間一様にソース項がある。Case 2ではソース項を0として、下壁の値を x 方向に依存するように与えた。以下に示す統計量を得るために、時間については $t_2-t_1=18$ 、空間についてはCase 1は $x-z$ 面、Case 2は z 方向に平均をとった。

まずCase 1の結果を示す。この場合は速度場だけでなくスカラー場も x と z 方向について統計的に一様であり、平均量は y だけに依存する。(6)のスカラーフラックスは次のように書ける。

$$\langle u_i' \theta' \rangle_{NL}(y) = - \int dy' \kappa_{NL12}(y; y') \frac{\partial \Theta(y')}{\partial y'} \quad (15)$$

$$\kappa_{NL12}(y; y') = \int dx' \int dz' \int_0^t dt' \langle u_i'(\mathbf{x}, t) g_2'(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') \rangle \quad (16)$$

同様に(8)の局所的なモデルも

$$\langle u_i' \theta' \rangle_L(y) = -\kappa_{Li2}(y) \frac{\partial \Theta}{\partial y} \quad (17)$$

$$\kappa_{Li2}(y) = \int dy' \kappa_{NLi2}(y; y') \quad (18)$$

と書ける。

図1にCase 1の平均スカラーの分布を示す。実線はHoriuti⁹⁾のDNSの値、破線は本計算の値であり、ほぼ一致していることがわかる。 $f_0=2$ という空間一様のソース項があるために、チャンネル乱流の平均速度分布のように対数則に従う領域が見られる。(15)のスカラーフラックスの式ではスカラー Θ そのものではなくスカラー勾配に依存し、その長さスケールが考察の対象となる。そこで図2に平均スカラーの勾配の分布を示す。壁近くでは急激に減少し、 $-0.8 < y < 0.8$ の部分では緩やかに減少している。長さスケールでいうと壁近くでは短く、 $-0.8 < y < 0.8$ ではかなり長いといえる。

図3に(16)の渦拡散係数 $\kappa_{NL22}(y; y')$ の y' に対する分布を示す。4つの代表的な y について表してある。 $y=0$ と $y=-0.486$ の場合ではおよそ $|y' - y| \approx 0.3$ 程度の非局所的な影響を受けることがわかる。 y の座標が壁に近づくと分布の幅は狭くなるが、非対称な分布になりチャンネル中央からの影響をより強く受けることがわかる。

図4にスカラーフラックス $\langle v' \theta' \rangle$ の y に対する分布を示す。実線はHoriuti⁹⁾のDNSの値、破線は本計算でフラックスを直接求めた値、点線は(15)の非局所的な式の値、一点鎖線は(17)の局所近似の式の値である。まず実線と破線の一致は本計算でスカラーフラックスが精度良く求められていることを示す。また破線と点線もよく一致しており、(15)の非局所的な渦拡散表現が成り立っていることがわかる。また一点鎖線の局所近似の式の値は壁近くではフラックスの絶対値を過大評価している。これは壁近くでは、図3の実線に見られるように非局所的な渦拡散率 $\kappa_{NL22}(y; y')$ が y 方向に0.2程度の広がりを持つが、その領域では図2からわかるようにスカラー勾配が急激に変化し、(17)の局所近似を導く条件が満たされていないためである。一方チャンネル中央では渦拡散率 $\kappa_{NL22}(y; y')$ は比較的広い分布を示すが、それ以上に図2のスカラー勾配分布がゆったりと変化するので、局所近似がよいと思われる。

次にCase 2の結果を示す。(14)の境界条件により、平均スカラーが x, y 座標に依存する2次元的な分布を示す。(6)のスカラーフラックスの非局所的な式は

$$\langle u_i' \theta' \rangle_{NL}(x, y) = - \int dx' \int dy' (\kappa_{NLi1}(x, y; x', y') \frac{\partial}{\partial x'} \Theta(x', y') + \kappa_{NLi2}(x, y; x', y') \frac{\partial}{\partial y'} \Theta(x', y')) \quad (19)$$

$$\kappa_{NLij}(x, y; x', y') = \int dz' \int_0^t dt' \langle u_i'(x, t) g_j'(x, t; x', t') \rangle \quad (20)$$

と書ける。また(8)の局所的な式は

$$\langle u_i' \theta' \rangle_L(x, y) = -\kappa_{Li1}(x, y) \frac{\partial \Theta}{\partial x} - \kappa_{Li2}(x, y) \frac{\partial \Theta}{\partial y} \quad (21)$$

$$\kappa_{Lij}(x, y) = \int dx' \int dy' \kappa_{NLij}(x, y; x', y') \quad (22)$$

図5に平均スカラーの x - y 面の等値線を示す。 x 方向については計算領域の約半分を示す。下壁での θ の値は $0 < x < 2.4$ で正、 $2.4 < x < 4.8$ で負となる。このケースではソース項 f_θ は0なのでスカラーの絶対値は壁から離れると減少して0に近づく。次に図6に(20)の非局所的な渦拡散係数 $\kappa_{NL22}(x, y; x', y')$ の $x'-x$ と y' に対する分布を示す。ここで $y = -0.605$ である。平均速度場の移流効果によりかなり上流からの影響を受けていることがわかる $x'-x=0$ のすぐ下流に負の値を持つ部分が見られるが、数値的な振動と思われる。

図7、図8、図9にスカラーフラックス $\langle v'\theta' \rangle$ の x, y に対する分布を表す。図7は $\langle v'\theta' \rangle$ を直接求めた値、図8は(19)による $\langle v'\theta' \rangle_{NL}$ の値、図9は(21)による $\langle v'\theta' \rangle_L$ の値である。図7で下壁の $0 < x < 2.4$ で正の θ が与えられるためその近傍では上向きのスカラーフラックスの領域があり、その領域は壁から離れるに従って下流に移っている。図8の分布は図7とよく一致しており非局所的な渦拡散表現は2次元的な分布も正しく表すことがわかる。また、図9の局所近似によるフラックスの値は壁近くで絶対値を過大評価していること、またピークの位置が図7や図8に比べてやや上流にずれている。このことから壁近くでは(21)の局所近似では不十分であり非局所的な効果を考慮する必要があることがわかる。

4. まとめ

グリーン関数を用いてスカラーフラックスの非局所的な式を導いた。チャンネル乱流のDNSを行い速度場とグリーン関数の時間発展を計算し非局所的な渦拡散係数の分布を求めた。平均スカラー場が1次元と2次元的な分布を持つ場合にスカラーフラックスの非局所的な渦拡散表現が実際に成り立つことを示し、スカラー勾配がスカラーフラックスに及ぼす非局所的な影響について調べた。壁近くでは局所近似は十分でなく、非局所的な効果が効いていることがわかった。

参考文献

- 1) S. Corrsin: *Advances in Geophysics* **18A** (1974) 25.
- 2) R. B. Stull: *J. Atmos. Sci.* **41** (1984) 3351.
- 3) R. Berkowicz & L. P. Prahm: *J. Fluid Mech.* **100** (1980) 433.
- 4) F. Hamba: *J. Atmos. Sci.* **52** (1995) 1084.
- 5) K. Horiuti: *J. Fluid Mech.* **238** (1992) 405.

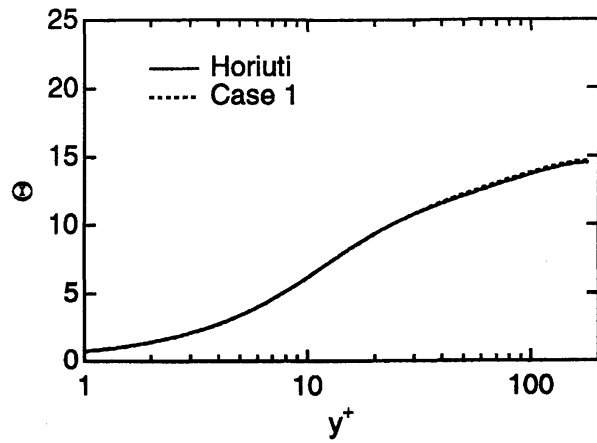


図1 平均スカラーの分布(Case 1)

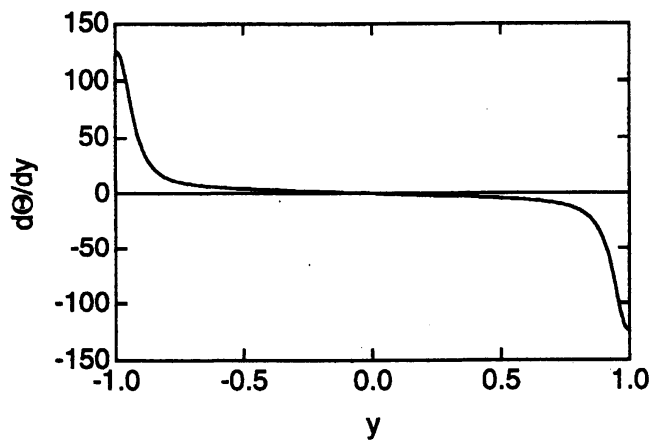


図2 平均スカラー勾配の分布(Case 1)

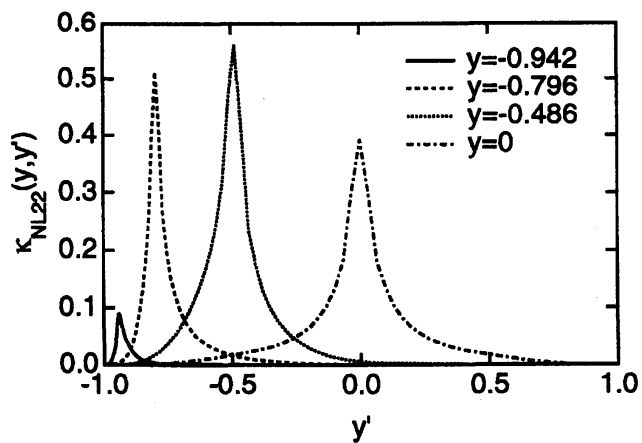


図3 非局所的な渦拡散率の分布(Case 1)

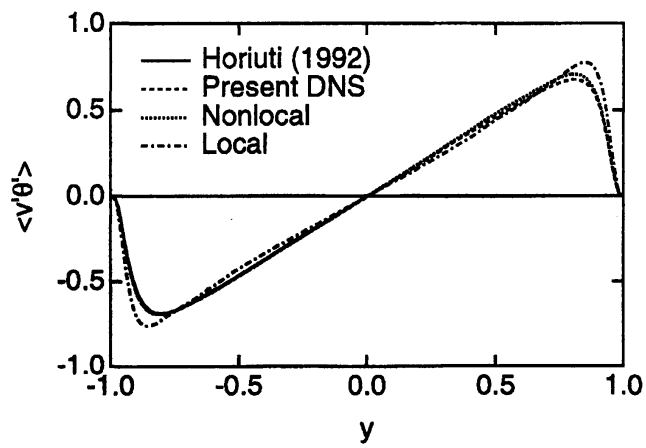


図4 スカラーフラックスの分布(Case 1)

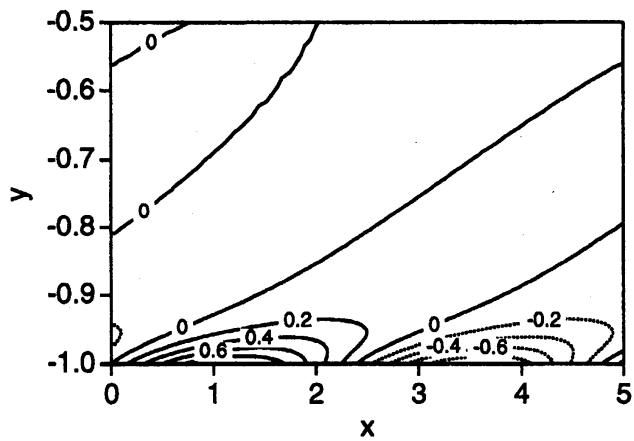


図5 平均スカラーの分布(Case 2)

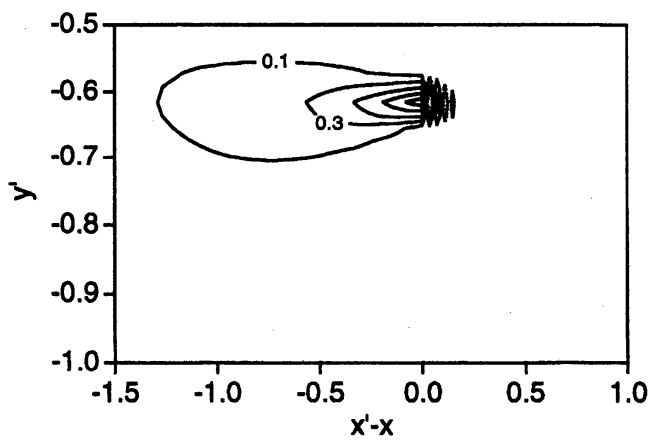


図6 非局所的な渦拡散率の分布(Case 2)

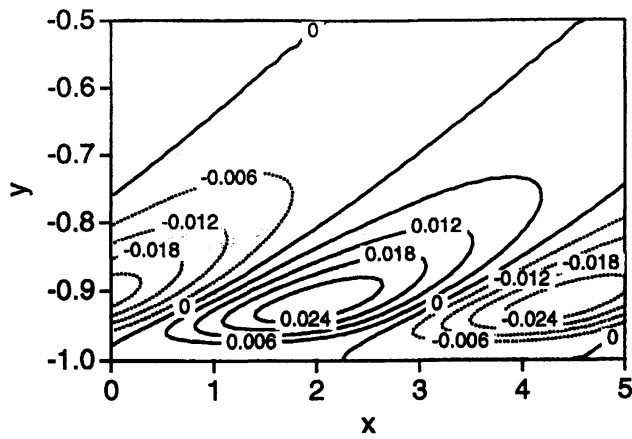


図7 スカラーフラックス $\langle v'\theta' \rangle$ の分布(Case 2)

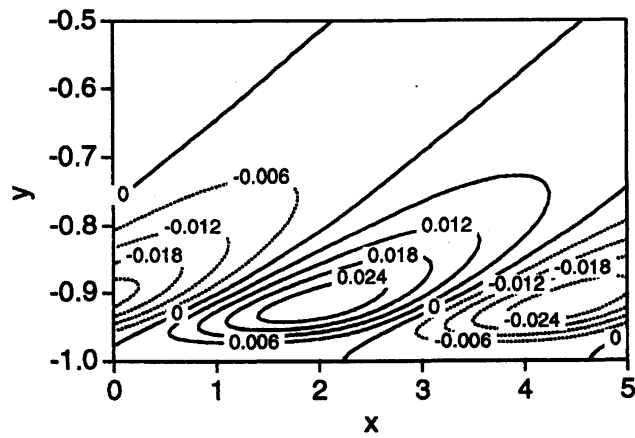


図8 スカラーフラックス $\langle v'\theta' \rangle_{NL}$ の分布(Case 2)

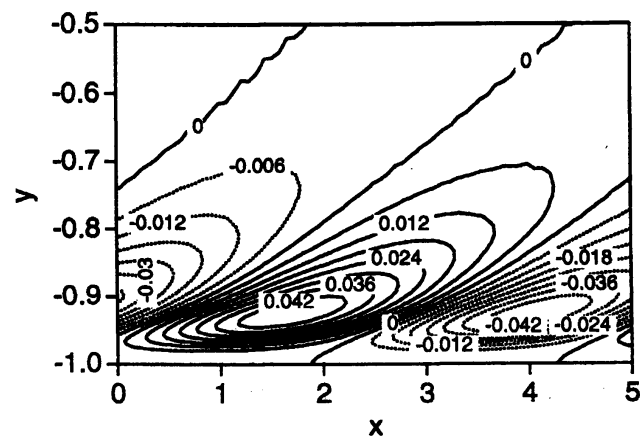


図9 スカラーフラックス $\langle v'\theta' \rangle_L$ の分布(Case 2)