

区間力学系の inverse limit について

筑波大 川村一宏

(Kazuhiro Kawamura)

以下、 $I=[0,1]$ を単位閉区間、 $f:I \rightarrow I$ を I への連続写像とする。 $x \in X$ に対し、 $O_f(x) = \{f^n(x) \mid n \geq 0\}$ を x の (f による) 軌道 (orbit) という。 $\text{Per} f$, $\text{Fix} f$ で各々 f の周期点の全体、 f の不動点の全体を表わす。ここでは、M. Barge - J. Martin による3つの論文 [2], [3], [4] について紹介する。これらは軌道の位相的な状態、特殊な軌道を持つ点の存在、特別な周期を持つ周期点の存在等 (これらを 力学的な性質 と呼ぶことにする) について調べる為に、continuum (= コンパクト連続距離空間) の理論に於ける結果が使える事を示したものである。

定義 1. $f:I \rightarrow I$ に対して、 $(I, f) = \{(x_n) \in I^\infty \mid f(x_{n+1}) = x_n, \forall n \geq 0\}$ とおき、これに I^∞ からの部分位相を入れる。但し I^∞ は I の可算積に積位相を入れたもの。 (I, f) を f による inverse limit という。 $\pi_n: (I, f) \rightarrow (I, f)$ を第 n 座標への射影とする。同相写像 $\hat{f}: (I, f) \rightarrow (I, f)$ が $\pi_n \circ \hat{f} = f \circ \pi_n$ を満たすように自然に定まる。また (I, f) は continuum である事が知られている。

一般的な問題: f の力学的な性質と (I, f) の位相的な性質の間にはどのような関係があるか?

ここでは位相的な性質として特に「continuum の indecomposability」について考える。ここで

定義と命題 2. X は continuum とする。 X の subcontinuum $A, B \subsetneq X$ が存在して、 $X = A \cup B$ とできる時、 X は decomposable であるという。そうでない時、 X は indecomposable であるという。

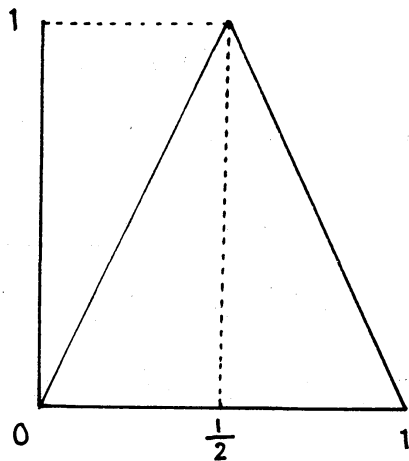
この時 ([8], p.139).

X は indecomposable $\longleftrightarrow X$ の任意の proper subcontinuum は内点を持たない。

従って、locally connected continuum は decomposable である。

まず例を挙げる ([2], example 2 と 3).

例 3. $f: I \rightarrow I$ を下のグラフで与えられる写像とする。



a) $\{x \in I \mid O_f(x) \text{ は } I \text{ で dense}\} \neq \emptyset$.

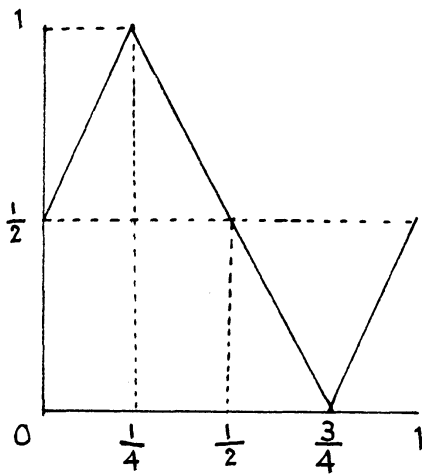
この時「 f は dense orbit を持つ」と呼ぶ事にする。実際は上の集合は dense G_δ in I である。

b) 任意の $n \geq 1$ に対して f^n は dense orbit を持つ。

c) $\text{Per } f$ は dense in I .

d) (I, f) は indecomposable (Knaster continuum と呼ばれている).

例 4. $g: I \rightarrow I$ を下のグラフで与えられる写像とする.



g は例 3 の a), c) は満たすが,

b') f^2 は dense orbit を持たない.

d') (I, f) は Knaster continuum の one point union. 従って decomposable である.

次は Bing の decomposition theorem ([5] theorem 8) の系である.

定理 5. (I, f) の任意の proper subcontinuum が内点を持たないとする. この時 (I, f) から arc G への写像 $p: (I, f) \rightarrow G$ が

1) 任意の $t \in G$ に対して $p^{-1}(t)$ は内点を持たない continuum.

2) 任意の同相写像 $g: (I, f) \rightarrow (I, f)$ に対して、同相写像 $\bar{g}: G \rightarrow G$ が $\bar{g} \circ p = p \circ g$ を満たすようにとれる.

の 2 条件を満たすように存在する.

1. Dense orbit と Indecomposability

定理 6 ([2], theorem 3). $x \in I$ とし、 $O_f(x)$ は I で dense とする。

- 1) $O_{f^2}(x)$ が I で dense ならば、 (I, f) は indecomposable.
- 2) $O_{f^2}(x)$ が I で dense でなければ、indecomposable subcontinua H と K が、

a) (I, f) は H と K の one point union.

b) $\hat{f}(H) = K, \hat{f}(K) = H$ を満たすようにする。

補題 7 ([2], Lemma 2). $x \in I$ とし、 $O_f(x)$ は I で dense とする。 $s, k \geq 0$ を整数として、 $A_{s,k} = \{f^{sn+k}(x) \mid n \geq 0\}$ とおく。

1) $A_{2,0} = O_{f^2}(x)$ が I で dense なら、任意の $s \geq 0$ と任意の k で $0 \leq k \leq s-1$ を満たすものに対し、 $A_{s,k}$ は I で dense.

2) $A_{2,0}$ が I で dense でないなら、 $I = \bar{A}_{2,0} \cup \bar{A}_{2,1}$ かつ

a) $\bar{A}_{2,0}$ と $\bar{A}_{2,1}$ は閉区間で、 $\bar{A}_{2,0} \cap \bar{A}_{2,1}$ は 1 点。

b) $f(\bar{A}_{2,0}) = \bar{A}_{2,1}$ かつ $f(\bar{A}_{2,1}) = \bar{A}_{2,0}$

c) 任意の $k \geq 1$ に対し、 $A_{2k,0}$ は $A_{2,0}$ で dense, $A_{2k,1}$ は $A_{2,1}$ で dense.

定理 6 の証明の概略. $\underline{x} \in (I, f)$ を $\pi_0(\underline{x}) = x$ であるような点とする。 1). $O_{f^2}(x)$ が I で dense ならば、内点を持つ

indecomposable continuum S が存在する事を示す。もしそうでなければ、定理 5 のような $p: (I, f) \rightarrow G$ が存在する。 $O_f(x)$ は (I, f) で dense だから、定理 5 の 2) より $O_{\hat{f}}(p(x))$ は G で dense になるが、arc 上の同相写像は dense orbit を持たないので矛盾である。

$O_{\hat{f}}(x)$ が dense であることから、 $\text{int } S \cap \text{int } \hat{f}^k(S) \neq \emptyset$ を満たす $k \geq 1$ が存在する。 $S \cap \hat{f}^k(S)$ が continuum である事が示せるので、命題 2 から $\hat{f}^k(S) = S$ となる。 $\hat{f}^l(x) \in S$ となる $l \geq 1$ を 1 つとる。補題 7 1) から $A_{k,l}$ は I で dense であり、従って $O_{\hat{f}^k}(\hat{f}^l(x))$ は (I, f) で dense である。 S は $\hat{f}^k$ で不変である事と合わせて $S = (I, f)$ だから結論が出る。

2). $O_{\hat{f}^2}(x)$ が I で dense でないなら、補題 7 2) のような I の分解 $I = \bar{A}_{2,0} \cup \bar{A}_{2,1}$ を考える。

$$H = \{(y_n) \in (I, f) \mid y_{2n} \in \bar{A}_{2,0}, y_{2n+1} \in \bar{A}_{2,1} \quad \forall n \geq 0\}$$

$K = \{(y_n) \in (I, f) \mid y_{2n} \in \bar{A}_{2,1}, y_{2n+1} \in \bar{A}_{2,0} \quad \forall n \geq 0\}$ が求めるものである事がわかる。

補題 7 の系として次が示せる。

系 8. $f: I \rightarrow I$ が dense orbit を持つなら、 Perf は I で dense.

注意 9. f が dense orbit を持たない時には定理 6 のようなはっきりとした結果を得るのは難しそうである。例えば

写像 $f: I \rightarrow I$ で 1) $f(0)=0$, $f(1)=1$, $f(t) < t$ $0 < \forall t < 1$. 2) (I, f) の一点でない全ての subcontinuum は indecomposable. であるものが存在する ([2] example 4). 1) から f は dense orbit を持たない. 一方 id_I も dense orbit を持たず $(I, \text{id}_I) = I$ である. このように dense orbit を持たない写像の inverse limit は非常に様子の違うものになり得る.

2. Homoclinic point と indecomposability

定義 10. 1) $f: I \rightarrow I$ の不動点 $y \in I$ をとる. $x \in I$ が y に対する homoclinic point であるとは、次の 2 条件を満たすこと。

a) $f^n(x) \rightarrow y$ as $n \rightarrow \infty$.

b) I の中の点列 (x_n) が、 $f(x_{n+1}) = x_n$ $\forall n \geq 0$, $x_0 = x$ を満たすように取れ、かつ $x_n \rightarrow y$ as $n \rightarrow \infty$.

2) $y \in I$ を周期 s の周期点とする. $x \in I$ が y と f^s に関して 1) の a), b) を満たす時、 x を y に対する homoclinic point という。

homoclinic point の近くの f の振舞いは一般に複雑である事が知られている。このような点の存在と (I, f) の indecomposability の関係が定理 14 と 15 で調べられている。

定理11 ([3] theorem 3, 8). $f: I \rightarrow I$ について、 f^2 は dense orbit を持つとする。この時、任意の 1 点でない proper subcontinuum H に対して

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{f}^n(H) = (I, f)$ ($\lim$ は topological limit を表わす).

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam } \hat{f}^{-n}(H) = 0$ (diam は直径を表わす).

1) は次の定理から得られる.

定理12 ([3] theorem 6). $f: I \rightarrow I$ に対して

f^2 が dense orbit を持つ $\longleftrightarrow$ 任意の 1 点でない閉区間 $J \subset I$ に

対して $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(J) = I$.

2) の証明の概略. $H \subset (I, f)$ を 1 点でない proper subcontinuum とする。 $\hat{f}^n$ の定義を考える事により、次を示せばよい。

(*) $\lim \text{diam } H_n = 0$, 但し $H_n = \pi_n(H)$.

そうでないと仮定するとある $\varepsilon > 0$ と部分列 (H_{n_i}) をとり、 $\text{diam } H_{n_i} > \varepsilon \quad \forall i \geq 0$ とできる。必要なら部分列を取り直して、 $H_{n_i} \cap J$ となる 1 点でない閉区間 $J \subset I$ があるとしてよい。系 8 から J の中に異なる周期点 p, q がとれる。周期を各々 n_1, n_2 とすると、 p, q から H の中の周期点 $\underline{p}$ (周期 n_1), $\underline{q}$ (周期 n_2) が見つかる。 $K = \bigcap \{L \mid L \text{ は } \underline{p}, \underline{q} \text{ を共に含む } (I, f) \text{ の subcontinuum}\}$ とおくと、 K は H の subcontinuum でかつ $\hat{f}^{n_1 n_2}(K) = K$ を満たす。任

意の整数 $n \geq 0$ に対して $f^{n^2}(\pi_n(K)) = \pi_n(K)$ が得られるが、補題 7.1) から f^{n^2} は dense orbit を持つから $\pi_n(K) = I \quad \forall n \geq 0$, 従って $K = (I, f)$ である。 $K \subsetneq H \subsetneq (I, f)$ だからこれは矛盾。

定義と定理 13. X は indecomposable continuum, $p \in X$ とする。
 $C_p = \{y \in X \mid p \text{ と } y \text{ を共に含む } X \text{ の proper subcontinuum がある}\}$
 とおき、 p の (X における) composant という。この時、

- 1) 2 つの composant は交わらないか、或いは一致する。
- 2) composant は dense connected でかつ first category.
- 3) 異なる composant は非可算個存在する。

証明は [8] p.139-141.

定理 14 ([3] theorem 10). $f: I \rightarrow I$ に対し、 f^2 は dense orbit を持つとする。任意の $y \in \text{Perf} \cap \text{int } I$ に対する homoclinic point が存在する。

証明の概略. y の周期を s とする。 $g = f^s$ とおくと補題 7.1) から g も dense orbit を持つ。 g^2 も dense orbit を持つ事を使って $x \in \text{int } I$ で $g(x) = y$ を満たす点がある事がわかり、これが求める点である。

これを示す為、 $\underline{y} = (y, y, \dots) \in (I, g) \approx (I, f)$ とする。 C を $\underline{y}$ の (I, g) における composant とする。定理 13, 2) より $\pi_0(C) \supset \text{int } I \ni x$.

従って $x \in C$ が $\pi_0(x) = x$ となるように取れる。 x と y を共に含む proper subcontinuum H に定理 11, 2) を適用すると、 $\hat{g}^n(x) \rightarrow y$ as $n \rightarrow \infty$ が得られて、 $g^n(x) \rightarrow y$ as $n \rightarrow \infty$ がわかる。このことは $x = (x_n)$ とおくと、 $g(x_{n+1}) = x_n$ かつ $x_n \rightarrow y$ as $n \rightarrow \infty$ を示し、しかも $g^n(x) = y \quad \forall n \geq 2$ だから x は y に対する homoclinic point である。

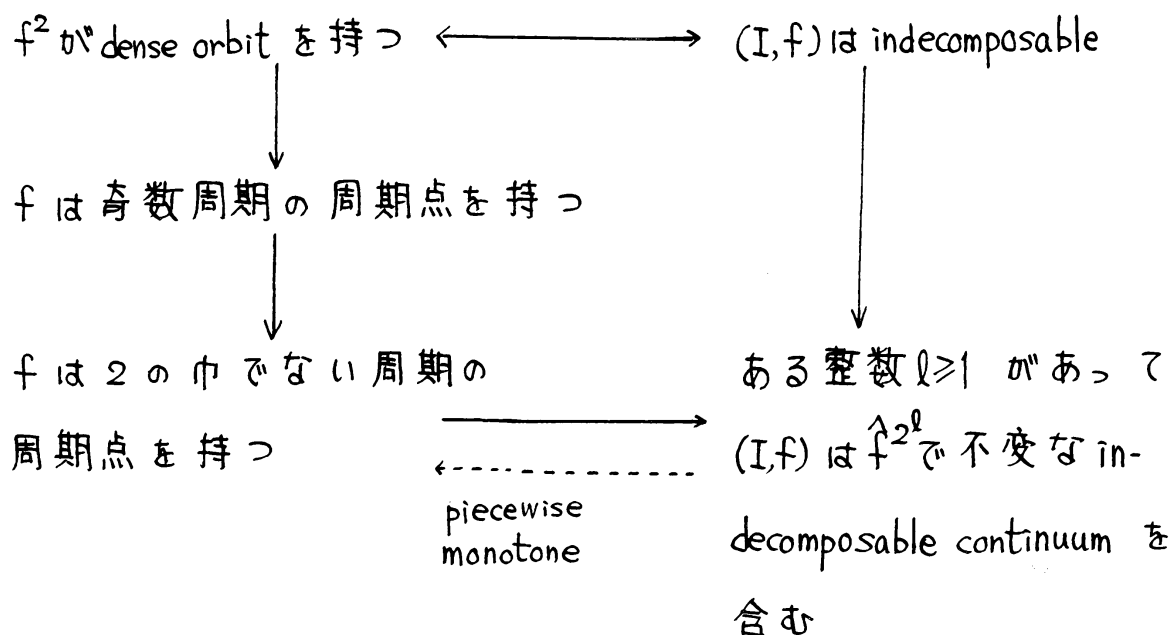
定理 5 の応用として次も得られている。

定理 15 ([2], theorem 4). $f: I \rightarrow I$ がある周期点に対する homoclinic point を持つなら、 (I, f) は indecomposable subcontinuum を含む。

3. 周期点と indecomposability

例 3 の写像 f は全ての整数 $n \geq 1$ について周期 n である点を持つ。この性質は chaotic な力学系において重要である ([6]). Sarkovski の定理によれば $f: I \rightarrow I$ が 2 の巾でない周期の周期点を持てば、任意の整数 $n \geq 1$ に対し 2^n -周期点を持つ ([7])。このような性質と (I, f) の indecomposability との関係について

定理 16 ([2] Corollary, [3] theorem 13). $f: I \rightarrow I$ は dense orbit を持つとする。



周期点全体が I で dense であるような写像は、その構造がかなりはっきりと分かる。

定理 17 ([4]). $f: I \rightarrow I$ に対し、 $\text{Per } f$ は I で dense であるとする。この時、高々可算個 (空でもよい) の閉区間の族 (J_i) が次を満たすように存在する。

- 1) 任意の $k \neq l$ に対して、 $\text{int } J_k \cap \text{int } J_l = \emptyset$ 。
- 2) 任意の k に対して $f^2(J_k) = J_k$ かつ $O_{f^4}(x_k)$ が J_k で dense であるような点 $x_k \in J_k$ が存在する。
- 3) $f^2|_{I \setminus \bigcup J_i} = \text{id}_{I \setminus \bigcup J_i}$ 。

例えば例 3 では $J_1 = I$ とすればよい。

証明の概略. (I, f) が内点を持つ indecomposable continuum を含ま

ない時は、定理5によつて $p: (I, f) \rightarrow G$ (G は arc) と同相写像 $\bar{f}: G \rightarrow G$ が $p \circ \hat{f} = \bar{f} \circ p$ となるように取れる。 $\text{Per } \bar{f}$ は G で dense だから、 $\hat{f}^2 = 1d_G$ であるが p が同相であることが示せるので $\hat{f}^2 = 1d_{(I, f)}$ 。従つて $f^2 = 1d_I$ である。

(I, f) が内点を持つ indecomposable continuum を含む時は、 $\mathcal{H}$ をそのようなものの全体とする。任意の $H \neq K \in \mathcal{H}$ に対して $\text{int } H \cap \text{int } K = \emptyset$ だから $\mathcal{H}$ は高々可算である。 $\mathcal{H} = (H_i)$ とおき、 $J_i = \pi_0(H_i)$ とおくと (J_i) が求めるものである事が示される。

参考文献

1. J. Auslander - J.A. Yorke; Interval maps, factors of maps, and chaos, Tohoku Math. J. 32 (1980), p.177-188.
2. M. Barge - J. Martin; Chaos, Periodicity, and Snake-like continua, Trans. A.M.S. 289 (1985), p.355-365.
3. _____; Dense orbit on the interval, Mich. Math. J. 34 (1987) p.3-11.
4. _____; Dense periodicity on the interval, Proc. A.M.S. 94 (1985) p.731-735.
5. R.H. Bing; Snake-like continua, Duke Math. J. (1951) p.653-663.

6. T. Y. Li - J. A. Yorke ; Period three implies chaos, Amer. Math. Monthly 82 (1975), p. 985 - 992.
7. P. Stephan ; A theorem of Sarkovski on the coexistence of periodic points of continuous endomorphisms of the real line, Comm. Math. Phys. 54 (1977), p. 237 - 248.
8. J. Hocking - G. Young ; Topology, Addison - Wesley Pub. (1961).