

主系列表現の既約性について

早大 理工

大豆生田 雅一

§0. 序

G を連結, 半単純, 非コンパクトリー群で中心が有限とする。 K を G の極大コンパクト部分群, G, K のリー環をそれぞれ $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{s}$ と対応するカルタン分解とする。

$\mathfrak{s}$ の極大可換部分空間 σ_{α} と σ_{α} 上実数値一次関数 α に対し $\mathfrak{g}_{\alpha} \in$

$$\mathfrak{g}_{\alpha} = \{ X \in \mathfrak{g} \mid [H, X] = \alpha(H)X, \text{ すべての } H \in \sigma_{\alpha} \}$$

と定義し $\mathfrak{g}_{\alpha} \neq 0$ なる α の全体を Σ とする。 Σ に辞書式順序を導入して $\Sigma^+ = \{ \alpha \in \Sigma \mid \alpha > 0 \}$ とおく。さらに $m(\alpha) \in \mathfrak{g}_{\alpha}$

の次元, $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Sigma^+} m(\alpha) \alpha$, $\mathfrak{n} = \sum_{\alpha \in \Sigma^+} \mathfrak{g}_{\alpha}$, $\overline{\mathfrak{n}} = \sum_{\alpha \in \Sigma^+} \mathfrak{g}_{-\alpha}$ と

する。 σ_{α} , $\mathfrak{n}$, $\overline{\mathfrak{n}}$ に対応する G の解析的部分群をそれぞれ A_{α} , N , $\overline{N}$, λ , A_{α} の K における中心化群を M とする。

このとき $A_{\alpha} = \exp(\sigma_{\alpha})$ で $G \cong K \times A_{\alpha} \times N$ 微分同相で

$g \in G$, $g = R(g) \exp H(g) n(g)$ $R(g) \in K$, $H(g) \in \sigma_{\alpha}$, $n(g) \in N$ と一意

に分解される。 K/M 上の K 不変測度 dk_M と, $\int_{K/M} dk_M = 1$

と正規化しておく。 $b \in K/M$, $g \in G$ に対し $g \cdot b = (gK)M \in K/M$,
 $\mathcal{H} = L^2(K/M, dK_M)$ とする。 $\pi = \pi$, G の $\mathcal{H}$ 上の表現 π の
 様を定義する。

$$\lambda \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\sigma_{\mathfrak{g}}, \mathbb{C}) \quad g \in G, \quad \varphi \in \mathcal{H}, \quad b \in K/M, \quad b = K/M$$

$$(\pi_{\lambda}(g)\varphi)(b) = e^{(\pi(\lambda) - \rho)(H(g^{-1}K))} \varphi(g^{-1}b)$$

このとき, S. Helgason の [1] において $(\pi_{\lambda}, \mathcal{H})$ の既約性と
 Harish-Chandra の $\mathbb{C}$ -関数 (1.1) との関係を与えた。 以下より。

$\dim \sigma_{\mathfrak{g}} = 1$ の場合には次の性質が成り立つ。

$$d\pi \in \mathcal{N} \text{ の } \lambda\text{-ル測度 } \int_{\mathcal{N}} e^{-2\rho H(\pi)} d\pi = 1, \quad \Sigma_0 = \{\alpha \in \Sigma \mid \alpha \neq -\alpha\}, \quad \Sigma_0^+ = \Sigma_0 \cap \Sigma^+, \quad \lambda \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\sigma_{\mathfrak{g}}, \mathbb{C}) \text{ に対し}$$

$$\Phi(\lambda) = \int_{\mathcal{N}} e^{-(\pi(\lambda) + \rho)H(\pi)} d\pi \quad \Re \langle \pi(\lambda), \alpha \rangle > 0 \quad \alpha \in \Sigma_0^+$$

$$d(\lambda) = \prod_{\alpha \in \Sigma_0^+} \Gamma(\langle \pi(\lambda), \alpha_0 \rangle) 2^{-\langle \pi(\lambda), \alpha_0 \rangle} \quad \alpha_0 = \alpha / \langle \alpha, \alpha \rangle$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ は リンク形式から作られる $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(\sigma_{\mathfrak{g}}, \mathbb{C})$ 上の
 双線形形式, Γ は通常の Γ -関数。

すると, $\Phi(\lambda)$ は解析接続しえるものを再び $\Phi(\lambda)$ と書くと

$$(\pi_{\lambda}, \mathcal{H}) \text{ が既約} \iff \Phi(\lambda)\Phi(-\lambda) \neq 0 \quad \Phi(-\lambda) = d(\lambda)^{-1} \Phi(\lambda)$$

以下の議論で, この結果の非ユタリ主系列表現に関する
 類似の結果に対する予想を挙げてみる。

§1. 非ユタリ主系列表現

(σ, E_{σ}) は $\mathfrak{M}$ の既約ユタリ表現, E_{σ} の内積を $(\cdot, \cdot)_{E_{\sigma}}$ で表わ
 す。 $\pi = \pi$ $\mathcal{H}_{\sigma}$ 上の線形ヒルベルト空間とする。

2.

① $\varphi: K \rightarrow E_\sigma$ は K の正規化されたハール測度 dk に関する可測関数.

② $\varphi(km) = \sigma(m)\varphi(k)$ かつ $k \in K, m \in M$ に対して成立.

$$\textcircled{3} \quad \|\varphi\|_{\mathcal{H}_\sigma}^2 = \int_K \|\varphi(k)\|_{E_\sigma}^2 dk < \infty$$

上の ① ~ ③ を満たす φ の全体を $\mathcal{H}_\sigma$ とする.

$g \in G, \varphi \in \mathcal{H}_\sigma, k \in K$ に対して.

$$(\pi_{\sigma, \lambda}(g)\varphi)(k) = e^{(\lambda + \rho)H(g^{-1}k)} \varphi(kg^{-1}k) \quad \lambda \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\sigma_{\mathbb{R}}, \mathbb{C})$$

すると $(\pi_{\sigma, \lambda}, \mathcal{H}_\sigma)$ は G の連続表現となる.

定義 M の既約 $\mathbb{Z}$ -等変表現 (σ, E_σ) と $\lambda \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\sigma_{\mathbb{R}}, \mathbb{C})$ に対して, $(\pi_{\sigma, \lambda}, \mathcal{H}_\sigma)$ を G の非 $\mathbb{Z}$ -等変系列表現という.

次に (τ, V_τ) , K の有限次元 $\mathbb{Z}$ -等変表現とする. $\tau = \tau$

$$C(G: \tau) = \{f: G \rightarrow V_\tau \mid \text{(i) 連続, (ii) } f(gk) = \tau(k^{-1})f(g) \text{ } g \in G, k \in K\}$$

$$\text{Hom}_M(E_\sigma, V_\tau) = \{A \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(E_\sigma, V_\tau) \mid \tau(m)A = A\sigma(m) \quad \forall m \in M\}$$

$$\text{Hom}_M(V_\tau, E_\sigma) = \{B \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V_\tau, E_\sigma) \mid B\tau(m) = \sigma(m)B \quad \forall m \in M\}$$

$A \in \text{Hom}_M(E_\sigma, V_\tau), \varphi \in \mathcal{H}_\sigma, g \in G$ に対して.

$$(P_A^\lambda \varphi)(g) = \int_K e^{-(\lambda + \rho)H(g^{-1}k)} \tau(kg^{-1}k) A \varphi(k) dk, \quad \lambda \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\sigma_{\mathbb{R}}, \mathbb{C})$$

と定義する.

$P_A^\lambda: \mathcal{H}_\sigma \rightarrow C(G: \tau)$ 連続線型写像となる (但し $C(G: \tau)$ には $\mathbb{Z}$ -コンパクト性収束の位相を付ける.)

なお.

$$\text{補題 1} \quad \varphi \in \mathcal{H}_\sigma, g, g_0 \in G, \quad (P_A^\lambda \varphi)(g^{-1}g_0) = P_A^\lambda(\pi_{\sigma, \lambda}(g)\varphi)(g_0)$$

か、すべての $\lambda \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathcal{O}_F, \mathbb{C})$ 及び M の既約 $\mathbb{C}$ -タリ表現 σ と π とで成り立つ。

系 2 P_A^λ の核は $(\pi_{\sigma, \lambda}, \mathcal{H}_\sigma)$ の不変閉部分空間となる。

§2. $(\pi_{\sigma, \lambda}, \mathcal{H}_\sigma)$ の既約性と P_A^λ の単射性

以後 K の有限次元 $\mathbb{C}$ -タリ表現は常に既約と仮定する。又 K, M の既約 $\mathbb{C}$ -タリ表現 σ, τ の双線型表現 $\pi \in \mathcal{H}_\sigma \otimes \mathcal{H}_\tau$ なら、線型写像 A の転置写像 A^t を表わす。

補題 3 $(\sigma, E_\sigma), (\tau, V_\tau)$ をそれぞれ M, K の既約 $\mathbb{C}$ -タリ表現, $\text{Hom}_M(V_\tau, E_\sigma) \neq \{0\}$ $B \neq 0 \in \text{Hom}_M(V_\tau, E_\sigma)$ $v \in V_\tau$ $\phi \neq 0$ $\Phi_{B, v}(K) = B(\tau(K^{-1})v)$ とする。すると, $\Phi_{B, v} \in \mathcal{H}_\sigma$ があり, $\Phi_{B, v}$ は $(\pi_{\sigma, \lambda}, \mathcal{H}_\sigma)$ の巡回ベクトルであることと $P_{\tau, B}^{-\lambda}$ が $\mathcal{H}_{\sigma \otimes \tau}$ 上単射であることは同値。

証明.

まず E_σ, V_τ の双対空間を E_σ', V_τ' と書く。 $E_\sigma \times E_\sigma', V_\tau \times V_\tau'$ 上の標準的な双線型形式をそれぞれ $\langle \cdot, \cdot \rangle_{E_\sigma}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{V_\tau}$ と書く。

$\phi \in \mathcal{H}_\sigma, \phi' \in \mathcal{H}_\tau$ に対し $\langle \phi, \phi' \rangle_\sigma = \int_K \langle \phi(k), \phi'(k) \rangle_{E_\sigma} dk$ とすると

(1) $\langle \pi_{\sigma, \lambda}(g) \Phi_{B, v}, \phi' \rangle_\sigma = \langle v, (P_{\tau, B}^{-\lambda} \phi')(g) \rangle_{V_\tau}$ $\phi \in \mathcal{H}_{\sigma \otimes \tau}$ が成り立つ。

従って $P_{\tau, B}^{-\lambda}$ が単射であれば $\Phi_{B, v}$ は巡回ベクトルとなる。

逆に、 $v_0 \neq 0$ $v_0 \in V_\tau$ Φ_{B, v_0} が巡回ベクトルとなることは

と $\varphi_B v_0$ が巡回ベクトルとなることは同値となる (7 の既約性) から (1) より $P_B^{-\lambda}$ が単射となる。

命題 4

$(\pi_{\sigma, \lambda}, \mathcal{H}_{\sigma})$ が既約であるための必要十分条件は次の性質をもつ K の既約 $\mathcal{U}$ -リ表現 (τ, V_{τ}) が存在すること。

(i) $\text{Hom}_M(E_{\sigma}, V_{\tau}) \neq \{0\}$ i.e. $\dim \text{Hom}_M(E_{\sigma}, V_{\tau}) \geq 1$

(ii) $B \in \text{Hom}_M(E_{\sigma}, V_{\tau}), B^* \in \text{Hom}(V_{\tau}, E_{\sigma}) \in$

$$(B^*v, e)_{E_{\sigma}} = (v, Be)_{V_{\tau}} \quad v \in V_{\tau}, e \in E_{\sigma} \quad \text{とし}$$

$$\hat{B} = {}^+B^* \quad \text{のとき, } B \neq 0 \text{ なら}$$

$$P_B^{\lambda}, P_{\hat{B}}^{-\lambda} \text{ が共に単射となる。}$$

証明.

$(\pi_{\sigma, \lambda}, \mathcal{H}_{\sigma}) \in K$ と制限した表現に含まれる K の既約 $\mathcal{U}$ -リ表現の一つ (τ, V_{τ}) とする。すると $(\pi_{\sigma, \lambda}, \mathcal{H}_{\sigma})$ が既約となる。

のとき $\text{Hom}_M(E_{\sigma}, V_{\tau}) \neq \{0\}$ であり, $B \in \text{Hom}_M(E_{\sigma}, V_{\tau})$ とすると, $P_B^{\lambda} \varphi_{B^*, v}(e) = (\dim_{\mathbb{C}} V_{\tau})^{-1} \text{Trace}(BB^*)v$. $v \in V_{\tau}$. 従って $P_B^{\lambda} \neq 0$. 故に系 2 から $P_B^{\lambda} (B \neq 0)$ は単射. 同様に $(\pi_{+\sigma, -\lambda}, \mathcal{H}_{+\sigma})$ が既約なら $P_{\hat{B}}^{-\lambda}$ は単射. $(\pi_{+\sigma, -\lambda}, \mathcal{H}_{+\sigma})$ の既約性は $(\pi_{\sigma, \lambda}, \mathcal{H}_{\sigma})$ の既約性と

$$\langle \pi_{\sigma, \lambda}(g)\varphi, \pi_{+\sigma, -\lambda}(g)\varphi' \rangle_{\sigma} = \langle \varphi, \varphi' \rangle_{\sigma} \quad \varphi \in \mathcal{H}_{\sigma}, \varphi' \in \mathcal{H}_{+\sigma}$$

から得られる。

逆に (i), (ii) を仮定する.

例. P_B^λ が単射であるとき $(\pi_{0,\lambda}, \mathcal{H}_0)$ の中で存在する不変閉部分空間は $\varphi_{B^*,v}$ $v \in V_\tau, v \neq 0$ と含む.

(i) が成立すると (ii) より $\varphi_{B^*,v} \neq 0$ 又. 補題 3 により $(\pi_{0,\lambda}, \mathcal{H}_0)$ の既約性は P_B^λ の単射性と同値となる.

例の証明.

$\mathcal{H} \in (\pi_{0,\lambda}, \mathcal{H}_0)$ の中で存在する任意の不変閉部分空間とする. すると $\varphi \in \mathcal{H}, (P_B^\lambda \varphi)(c) \neq 0$ となるものが存在する.

$$\chi_\tau(K) = \text{Trace}(\tau(K^{-1}))$$

$$\int_K \chi_\tau(K) \varphi(K^{-1}K_0) dK = \int_K \chi_\tau(K) (\pi_{0,\lambda}(K) \varphi)(K_0) dK = F(K_0)$$

$\mathcal{H}$ が閉部分空間であり, 又不変性から $F \in \mathcal{H}$

次に簡単な計算より

$$(P_B^\lambda F)(c) = (P_B^\lambda \varphi)(c), \quad P_B^\lambda F = P_B^\lambda \varphi_{B^*,v} \quad \exists v \in V_\tau \text{ となる.}$$

従って P_B^λ の単射性より $F = \varphi_{B^*,v}, v \neq 0$, が得られる.

(注意) S. Helgason [2] により (σ, E_σ) が自明な表現であるときには (σ, V_τ) として K の自明な表現を取ればよい. 従って命題 4 の次の様になる.

$\pi_{0,\lambda} = \pi_\lambda, \quad \mathcal{H}_0 = \mathcal{H}. \quad (\sigma, E_\sigma)$ が M の自明な表現のとき) とすると.

$(\pi_\lambda, \mathcal{H})$ 既約. $P^\lambda, P^{-\lambda}$ が共に単射.

§3 $\mathcal{P}_A^\lambda$ の単射性

$C^\infty(K; E_\sigma) = \{F: K \rightarrow E_\sigma \mid C^\infty\text{-関数}\} \quad ((0, E_\sigma) \text{ M の既約表現})$

$$C^\infty(K, \sigma) = C^\infty(K; E_\sigma) \cap \mathcal{H}_\sigma$$

$ID(K) \ni K$ 上左不変微分作用素の全体から作る代数

$$C^\infty(K; E_\sigma) \text{ に } \|\cdot\| \text{ を } \nu_D(F) = \sup_{R \in K} \|(D F)(R)\|_{E_\sigma} \quad D \in ID(K)$$

とし, σ 局所内位相を入れ E_σ の $\mathcal{Q}(K; E_\sigma)$ とする

と $C^\infty(K, \sigma)$ は閉部分空間であり

$$\mathcal{Q}(K, E_\sigma) \ni F \mapsto \overline{F}(R) = \int_M \sigma(m) F(Rm) dm$$

が連続な射影と存在。 $\Rightarrow \sigma dm$ は $\int_M dm = 1$ なる M の

ハール測度。 $C^\infty(K, \sigma) \text{ に } \mathcal{Q}(K; E_\sigma)$ からの誘導位相を入れ

E_σ の $\mathcal{Q}(K, \sigma)$ 存在の Hilbert 空間 $\mathcal{Q}(K, E_\sigma)'$ $\mathcal{Q}(K, \sigma)'$ とする。

$$\varphi: K \rightarrow E_\sigma \text{ 局所可積分であり } \varphi(Rm) = \sigma(m)^{-1} \varphi(R)$$

$m \in M, R \in K$ とする。

$$\varphi' \in \mathcal{Q}(K, \sigma) \quad \langle S_\varphi \varphi' \rangle = \langle \varphi \varphi' \rangle_\sigma = \int_K \langle \varphi(R), \varphi'(R) \rangle_{E_\sigma} dR$$

すると

補題 5 $\mathcal{Q}(K, \sigma) \ni \varphi \mapsto S_\varphi \in \mathcal{Q}(K, \sigma)'$ は単射。

証明。

$$\varphi' \in \mathcal{Q}(K, \sigma) \text{ かつ } \varphi'_0 \in \mathcal{Q}(K; E'_\sigma) \quad \overline{\varphi'_0} = \varphi'$$

とある。 すると $\langle S_\varphi \varphi' \rangle = \int_K \langle \varphi(R), \varphi'_0(R) \rangle_{E_\sigma} dR$ 。

故に $S_\varphi = 0$ なら 全ての $\varphi'_0 \in \mathcal{Q}(K; E'_\sigma) \text{ かつ } \varphi'_0 = 0$

$$\int_K \langle \varphi(k) \mid \varphi_0'(k) \rangle dk = 0 \quad \text{故に } \varphi = 0.$$

以上より $\mathcal{H}_\sigma \subset \mathcal{D}(K, \sigma)'$ と考えられ $\mathcal{H}_\sigma = \tau \cdot P_A^\lambda$ の定義 $\in \mathcal{D}(K, \sigma)'$ に σ で拡張する。

$$S \in \mathcal{D}(K, \sigma)' \quad \text{と} \quad \tilde{S} \in \mathcal{D}(K, E_\sigma')' \quad \in.$$

$$\langle \tilde{S} \mid \varphi_0 \rangle = \langle S \mid \overline{\varphi_0} \rangle \quad \varphi_0 \in \mathcal{D}(K, E_\sigma')$$

これを用いて、次は $(\mathbb{E}_p)_p \in E_\sigma$ の基底、 $(\mathbb{E}_p^*)_p \in E_\sigma'$ の双対基底とする。 $F \in \mathcal{D}(K) (= C^\infty(K) \text{ と } \varphi \equiv 1 \text{ なる } \chi_p \text{ による})$ τ 作用素を入れ込む。 すると $\mathcal{D}(K) = \mathcal{D}(K; \mathbb{Q})$

と持て。 $F_p(K) = F(K) \mathbb{E}_p^*$ とすると $F_p \in \mathcal{D}(K, E_\sigma')$ $\tau = \tau$

$$\tilde{S}_p \in \mathcal{D}(K)' \quad \in \quad \langle \tilde{S}_p \mid F \rangle = \langle \tilde{S} \mid F_p \rangle \quad F \in \mathcal{D}(K) \text{ と}$$

なる。

$$S \in \mathcal{D}(K, \sigma)' \quad \lambda \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\sigma_p, \mathbb{Q}) \quad A \in \text{Hom}_{\mathbb{H}}(E_\sigma, V_\sigma)$$

$$P_A^\lambda S)(g) = \sum_p \int_K e^{-(F\lambda + p)H(g+k)} \tau(K(g+k)) A \mathbb{E}_p d\tilde{S}_p(K)$$

すると P_A^λ は基底の取り方によらず $\in \mathcal{H}_\sigma$ のときも前の定義と一致する。

補題 6 P_A^λ が $\mathcal{D}(K, \sigma)$ 上単射である $\Leftrightarrow$ $\mathcal{D}(K, \sigma)'$ 上単射であることは同値。

証明。

補題 5 に $\tau \in \mathcal{D}(K, \sigma)'$ 上単射であれば、 $\mathcal{D}(K, \sigma)$ の上で τ 単射。 逆に $S \in \mathcal{D}(K, \sigma)'$ $P_A^\lambda S = 0$, P_A^λ が $\mathcal{D}(K, \sigma)$ 上単射

8

解とある。故に任意の $f \in \mathcal{D}(K)$ に対して

$$\begin{aligned} 0 &= \int_K f(k) (P_A^\lambda S)(k^{-1}g) dk \\ &= \int_K f(k) \sum_p \int_K e^{-(F\lambda + \rho)(H(q^{-1}kR_0))} \tau(k(q^{-1}kR_0)) A \mathcal{E}_p d\tilde{S}_p(k) dk \\ &= \int_K e^{-(F\lambda + \rho)(H(q^{-1}k))} \tau(k(q^{-1}k)) A \left(\sum_p \int_K f(kR_0^{-1}) d\tilde{S}_p(R_0) \mathcal{E}_p \right) dk \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$F(k) = \sum_p \int_K f(kR_0^{-1}) d\tilde{S}_p(R_0) \mathcal{E}_p = \sum_p (f * \tilde{S}_p)(k) \mathcal{E}_p.$$

故に定義より $F \in \mathcal{D}(K, \sigma)$

然し $F \equiv 0$. 故に任意の $f \in \mathcal{D}(K)$ 及び右に於いて
 $f * \tilde{S}_p = 0$. 相成り立つから $\mathcal{S} = 0$, 結局 $\mathcal{S} = 0$
 となる。

以後, $\dim_{\mathbb{R}} \sigma_{\mathcal{F}} = 1$ とする。このとき $w \in K$, $\text{Ad}(w)\sigma_{\mathcal{F}} = \sigma_{\mathcal{F}}$
 かつ $\text{Ad}(w)|_{\sigma_{\mathcal{F}}} = -1$. とするものを固定する。すると, (σ, E_{σ}) の
 既約性から次の補題が成立する。

補題 7 $\dim \sigma_{\mathcal{F}} = 1$ のとき $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(\sigma_{\mathcal{F}}, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$ であり

$$\lambda \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\sigma_{\mathcal{F}}, \mathbb{C}) \quad \Re \langle F\lambda, \alpha \rangle > 0 \quad \forall \alpha \in \Sigma^+, \quad v \in E_{\sigma}$$

$$S'_{\lambda, v} \in \mathcal{D}(K, \sigma)^* \quad \varepsilon. \quad \varphi \in \mathcal{D}(K, \sigma) \text{ に対して}$$

$$\langle S'_{\lambda, v}, \varphi \rangle = \int_N e^{-(F\lambda + \rho)(H(\bar{n}))} \langle v, \varphi(wK(\bar{n})) \rangle_{E_{\sigma}} d\bar{n}$$

と定義すると任意の $\varphi \in \mathcal{D}(K, \sigma)$ に対して

$$\lambda \mapsto \langle S'_{\lambda, v}, \varphi \rangle \quad \text{は} \quad \mathbb{C} \cong \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\sigma_{\mathcal{F}}, \mathbb{C}) \text{ 全体}$$

に有理型関数として解析接続出来, さらに有理型関数
 $\alpha_{\mathbb{R}}(\lambda)$ が存在して, 次の (i), (ii) が成立つ,

(i) $\lambda \mapsto \frac{1}{\alpha(\lambda)} \langle S'_\lambda, \varphi' \rangle$ は $\mathfrak{h}^*$ の $\varphi' \in \mathcal{D}(K, \tau)$ に対して整同数となる。

(ii) 各 $\lambda \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\sigma_{\mathfrak{g}}, \mathbb{C})$ に対して $\varphi' \in \mathcal{D}(K, \tau)$ が存在して $\frac{1}{\alpha(\lambda)} \langle S'_\lambda, \varphi' \rangle \neq 0$ となる。

証明については S Helgason 111 定理 4.5, 又は Knapp-Stein 137 定理 3 と同様。

2. 簡単な計算より。

補題 8 $\lambda \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\sigma_{\mathfrak{g}}, \mathbb{C})$ $\omega \in K$, $\text{Ad}(\omega)\sigma_{\mathfrak{g}} \subset \sigma_{\mathfrak{g}}$ とある。

$$\omega \lambda(H) = \lambda(\text{Ad}(\omega)H) \quad H \in \sigma_{\mathfrak{g}}, \quad \alpha(\lambda)^{-1} S'_\lambda v = S_\lambda v$$

なる。

$$P_A^\lambda S_{\lambda, v}(q) = e^{-(\sqrt{-1}\lambda + \rho)H(q)} T(K(q)) T(\omega) \mathbb{Q}_\lambda(\lambda, \tau) A v$$

$z = \tau$

$$\Re \langle \sqrt{-1}\lambda, \alpha \rangle > 0 \quad \forall \alpha \in \Sigma^+ \text{ のとき }.$$

$$\mathbb{Q}(\lambda, \tau) = \int_N e^{-(\sqrt{-1}\lambda + \rho)H(\bar{n})} T(K(\bar{n})) d\bar{n}$$

が絶対収束し $\mathbb{Q}_\sigma(\lambda, \tau) = \alpha_\sigma(\lambda)^{-1} \mathbb{Q}(\lambda, \tau)$ は $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(\sigma_{\mathfrak{g}}, \mathbb{C})$ 上整同数となる。

系 9 P_A^λ が単射であるならば $\mathbb{Q}_\sigma(\lambda, \tau) A \neq 0$ なら

$$\Re \langle \sqrt{-1}\lambda, \alpha \rangle > 0 \quad \alpha \in \Sigma^+ \text{ のとき } \mathbb{Q}_\sigma(\lambda, \tau) A \neq 0 \text{ かつ}$$

P_A^λ が単射となるための必要十分条件となる。(証明略)

証明

前半は、補題 6, 補題 8 より得られる。

$\varphi \in \mathcal{H}_r \subset \mathcal{H}_0$.

$$F \in \mathcal{D}(K) \quad \int_K F(K) dK = \int_N \int_M F(K(\pi) m) e^{-2\rho H(\pi)} d\pi dm.$$

Harish-Chandra 121.

$$\text{又 } v. \quad H(a^{-1}K(\pi)a) = H(a^{-1}\pi a) - H(\pi) - \log a. \quad d(a^{-1}\pi a) = e^{2\rho \log a} d\pi$$

と

$$(P_A^\lambda \varphi)(a) = e^{(\Gamma\lambda - \rho)\log a} \int_N e^{-(\Gamma\lambda + \rho)H(\pi)} e^{(\Gamma\lambda - \rho)H(a\pi a^{-1})} \tau(K(\pi)) A\varphi(K(a\pi a^{-1})) d\pi$$

$$\operatorname{Re} \langle \Gamma\lambda, \alpha \rangle > 0 \quad \alpha \in \Sigma^+, \quad a \in A_{\mathfrak{g}}^+ = \exp \sigma_{\mathfrak{g}}^+ \quad \alpha \in \Sigma$$

$$e^{-(\Gamma\lambda + \rho)H(\pi)} e^{(\Gamma\lambda - \rho)H(a\pi a^{-1})} \tau(K(\pi)) A\varphi(K(a\pi a^{-1})) = F_\lambda(\pi, a)$$

if $d\pi$ is τ integrable.

$$\text{よ } \text{ら } a_t = \exp tH. \quad H \in \sigma_{\mathfrak{g}}^+ \quad \text{と } \alpha \in \Sigma.$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} F_\lambda(\pi, a_t) \quad \text{も可積分}$$

$$= \text{すなわち } \sigma_{\mathfrak{g}}^+ = \{ H \in \sigma_{\mathfrak{g}} \mid \alpha(H) > 0 \quad \forall \alpha \in \Sigma^+ \}.$$

$$\text{故 } \text{ら } \lim_{t \rightarrow +\infty} a_t^{-1} \pi a_t^{-1} = e \quad \text{と}$$

$$e^{-(\Gamma\lambda + \rho)\log a_t} (P_A^\lambda \varphi)(a_t) \rightarrow \left(\int_N e^{-(\Gamma\lambda + \rho)H(\pi)} \tau(K(\pi)) d\pi \right) A\varphi(e)$$

$$(t \rightarrow +\infty)$$

$$\text{従 } \text{て } \operatorname{Re} \langle \Gamma\lambda, \alpha \rangle > 0 \quad \alpha \in \Sigma. \quad \dim(\lambda)^+ \neq 0 \quad \text{と } \text{推定可也}$$

也.

$$\Phi_0(\lambda; \tau) A \neq 0 \quad \text{なら } P_A^\lambda \text{ は単射と存する.}$$

これはよく、 $\Phi(\lambda; \tau)$ とプランシェレル測度との関係、

(Knapp - Stein 137) を含め、この命題が成立する。と
//

が予想される。

命題 G は連結, 半単純, 非コンパクトリー群で中心が有限, さらに $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{a}_g = 1$ とする. $(\pi_{\sigma, \lambda}, \mathcal{H}_{\sigma}) \in \text{非正規}$ リー系列表現. 対応するアランザレル制度 $\in P(\sigma, \lambda)$ とする. $\sigma = \lambda$ とし, $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a}_g, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$ 上の有理型関数 $P_{\sigma}(\sigma, \lambda)$ が存在して, $(\pi_{\sigma, \lambda}, \mathcal{H}_{\sigma})$ が可約である為の必要十分条件は λ が $P(\sigma, \lambda) P_{\sigma}(\sigma, \lambda)$ の符号関数となること.

References.

- [1] Harish-Chandra. Spherical Functions on a semisimple Lie group I, II Amer. J. Math. vol. 80 (1958) 241-310, 553-613.
- [2] Helgason. S. A duality for symmetric spaces with applications to group representations Advances in Math. vol. 5 (1970) 1-154.
- [3] Knapp A.W. and Stein E.M. Intertwining operators for semisimple groups. Ann. of Math. vol. 93 (1971) 489-578.
- [4] Warner G. Harmonic analysis on semi simple Lie groups II. Springer-Verlag. (1975)