

超伝導とジョセフソン効果の基礎

Superconductivity and the Josephson Effect from a Fundamental Point of View

鈴木 実

1. はじめに

ジョセフソン効果⁽¹⁾とは、二つの超伝導体を弱く結合させたときに現れる効果である。超伝導体のトンネル接合などで現れる。その現象は次の二つの関係式で表される。後に説明する位相を用いれば、一方の超伝導体の位相を θ_1 、もう一方の超伝導体の位相を θ_2 とし、 $\theta = \theta_2 - \theta_1$ とすると、ジョセフソン効果とは二つの超伝導体の間に

$$I = I_1 \sin \theta \quad (1)$$

という超伝導電流が流れることであり、かつ、二つの超伝導体の間に電圧 V が印加された場合、二つの超伝導体間に

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{2eV}{\hbar} \quad (2)$$

の角周波数を有する高周波電流が流れることである。前者を直流ジョセフソン効果といい、後者を交流ジョセフソン効果という。当時、ケンブリッジ大学の大学院生でピパード (A.B. Pippard) の学生だったジョセフソン (B.D. Josephson) が 1962 年に理論的にこれを予言した⁽¹⁾。ジョセフソンが 22 歳のときである。ジョセフソンの理論は超伝導電流がトンネル確率 T でトンネルすることを予言したものであったが、BCS 理論を創り上げたバーディーン (J. Bardeen) からはトンネル層には電子対 (クーパー対) はあり得ないからこの効果は存在

しない、と認められることはなかった⁽²⁾。しかし、誤っていたのはバーディーンの方であり、ジョセフソン効果は翌年アンダーソンとロウエル (P.W. Anderson, J.M. Rowell) によって実験で検証された⁽³⁾。

2. 超伝導と巨視的量子効果

ジョセフソン効果で、超伝導体トンネル接合の絶縁層をトンネルして流れる超伝導電流が位相 θ に比例する (実際は $\sin \theta$) という内容は当時すぐには理解されなかったようであるが、これはロンドン (F. London) が予言した $|\psi|e^{i\theta}$ で表される巨視的量子効果の発現としての位相を示すものであった⁽⁴⁾。超伝導状態は、電子対が相関を持って電子系の剛体として振る舞う現象である。その状態は $\psi = |\psi|e^{i\theta}$ のような一つの波動関数として振る舞い、その確率振幅は超伝導体内で一定になり位相が変化する。ギンズブルク・ランダウ理論 (V.L. Ginzburg, L.D. Landau) (GL 理論) においては超伝導現象は相転移を伴う秩序状態でその秩序パラメータ (superconducting order parameter) Ψ (または Δ) は ψ に等しく、その絶対値の二乗は超流動濃度を示す。ジョセフソンはジョセフソン効果の関係式を微視理論で導いたが、その帰結するところは巨視的量子効果と密接に関係している。

3. 超伝導オーダーパラメータと位相

超伝導状態は電子が対を形成して起こるという点は発現機構から見て大変重要であるが、超伝導状態の性質は、電子系が通常の自由電子ガスや電子液体ではなく、電子系の剛体として振る舞うことから現れるということのほうが本質的である。これは、フェルミ粒子である電子が対を作ることによってボーズ粒子 (独立した自由ボーズ粒子ではない) になり、それが全て最もエネル

鈴木 実 京都大学大学院工学研究科電子工学専攻
E-mail Suzuki@kuee.kyoto-u.ac.jp
Minoru SUZUKI, Nonmember (Graduate School of Engineering, Kyoto University, Kyoto-shi, 615-8510 Japan).
電子情報通信学会誌 Vol.95 No.8 pp.731-735 2012 年 8 月
©電子情報通信学会 2012

ギーの低い1粒子状態の基底状態を占有するからである。これはボーズ・アインシュタイン凝縮と呼ばれている。このようなことは1粒子状態を1個しか占有できないフェルミ粒子では起こらない。多くのボーズ粒子が、つまり電子対が同じ1粒子状態を占有することにより全体が一つの波動関数で表されるようになる。したがってそのような状態は一つの振幅 ψ と一つの位相 θ で表すことができる。

GL理論は、ランダウの相転移理論を取り入れた現象論でオーダパラメータ(秩序パラメータ)が用いられる。オーダパラメータが0でない場合は超伝導という秩序状態にあり、超伝導転移温度以上で0になる。一般にオーダパラメータは具体的な物理量に対応する。超伝導の場合は超流動濃度の振幅がオーダパラメータである。上に記した波動関数は1個の電子対に関するものであるが、全ての電子対が同じ状態にあるわけなので全体の電子対を意味する超流動濃度としても構わない。したがって超伝導のオーダパラメータは一つの粒子の波動関数のように振る舞い、振幅と位相で特徴付けられる。

超伝導体は巨視的な大きさを有する。その中の超流動濃度は全て一つの波動関数のように振る舞うので、巨視的なスケールにわたって一つの位相で表すことができる。あるいはコヒーレントといってもよい。このように目に見える大きさのスケールで巨視的な数の電子系が示す量子効果の発現としての振幅と位相で表される振る舞いを巨視的量子効果と呼ぶ。超伝導状態では巨視的量子効果が発現している。このような特徴を有する物理現象としては他に原子のボーズ・アインシュタイン凝縮やレーザーなどが知られている。

4. 位相とベクトルポテンシャル

量子力学の波動関数の位相 θ は作用を S としたときに

$$\theta = \frac{S}{\hbar} \quad (3)$$

で表される。これは量子力学の原理である⁽⁵⁾。この原理によりファインマンの経路積分による量子力学が組み立てられ、シュレーディンガーの波動力学、ハイゼンベルクのマトリックス力学と等価であることが示されている。したがって、ジョセフソンの関係式に出てくる位相も同じように式(3)で表される。

作用 S はラグランジアン L の時間積分である。電磁界があるときのラグランジアンは次のように表される。

$$L = T - V + q\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \quad (4)$$

したがって、A点(時刻 t_A , 座標 $\mathbf{r}_A$)からB点(時刻 t_B , 座標 $\mathbf{r}_B$)へ向かう経路で粒子が受けた作用から位相は次のように求められる。ここでは簡単のために T と V を省略する。

$$\theta = \frac{1}{\hbar} \int_{t_A}^{t_B} L dt = \frac{1}{\hbar} \int_{t_A}^{t_B} q\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} dt = \frac{1}{\hbar} \int_{\mathbf{r}_A}^{\mathbf{r}_B} q\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \quad (5)$$

これから位相は2点間のベクトルポテンシャルの線積分で与えられることが分かる。この式を見ると積分の前に $\hbar^{-1}$ という因子があるのが分かる。 $\hbar$ は作用の次元を持ち $1.05 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ という極めて小さい値である。したがって、ベクトルポテンシャルが僅かに変化しただけでも位相は大きく変わることを意味している。閉じた経路ではストークスの定理により

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{q}{\hbar} \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \frac{q}{\hbar} \int_C \text{rot} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\hbar} \int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \frac{q\Phi}{\hbar} = \frac{2\pi\Phi}{\Phi_0} \end{aligned} \quad (6)$$

となる。ここで $\Phi_0 = h/2e = 2.07 \times 10^{-15} \text{ Wb}$ は量子化磁束で自然に存在する最も小さなエネルギー単位である。したがって極めて僅かな磁界の変化でも超伝導体の位相は大きな変化を示すという巨視的量子効果の特徴を有するのである。

5. ジョセフソン効果の意義

このように巨視的量子効果の重要な役割を担う位相はベクトルポテンシャルにより大きな変化を示す。つまり微小信号に対して極めて感度の高い応答をするわけであるが、レーザーなどの光学とは違い、超伝導の巨視的量子効果では位相の変化を取り出すすべがない。いや、たった一つあるのがジョセフソン効果で式(1)と式(2)を使えば電流に変換することができる。一旦、電流に変換できれば現在のエレクトロニクスによりほぼ思いのまま処理できることとなる。つまりジョセフソン効果は超伝導現象における巨視的量子効果の位相を取り出す現在のところ唯一の手段であるということである。ジョセフソン効果の意義はまさにここにある。ジョセフソン効果の発見により超伝導における巨視的量子効果のエレクトロニクス応用が可能となったといっても過言ではない。

6. 超伝導オーダパラメータの対称性

超伝導オーダパラメータは電子対の2体の波動関数を統計平均し更に和をとった(積分した)ものである。超

伝導の電子対は2体のフェルミ粒子の波動関数で表され二つの粒子の空間座標の波動関数とスピン波動関数の積である。パウリの排他原理によりフェルミ粒子は一つの準位に1個しか占有できないことから多体の波動関数は粒子の交換に対して反対称でなければならない。スピン波動関数に注目すれば、二つのスピンは平行（対称）か反平行（反対称）しかないためそれに対応して空間座標波動関数もそれぞれ反対称か対称になる。空間座標を $\mathbf{r}_1$ と $\mathbf{r}_2$ を $\mathbf{r}=(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)/2$ 及び $\mathbf{r}'=(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2)/2$ と変換すれば $\mathbf{r}$ のパリティ対称性になる。電子間引力を中心力場とすれば、その固有関数である球面調和関数のパリティは角運動量子数 l で決まる。すなわち、 l が偶数ならパリティは偶、 l が奇数ならパリティは奇である。これからスピンの平行な場合は l が奇数、スピンが反平行な場合は l が偶数になる。スピンが平行な場合はスピン量子数が1となり、原子吸光スペクトルがスピン軌道相互作用により3本に分裂することから3重項（トリプレット）と呼ばれる。一方スピンが反平行な場合はスピン量子数は0となって原子吸光スペクトルは1本となり1重項（シングレット）と呼ばれる。分光学では $l=0, 1, 2, 3, \dots$ に対応するスペクトルを s, p, d, f, ... と呼ぶ慣例があるので、超伝導の電子対でもこの呼称を用いて例えば s 波対称性を有する電子対という。スピンが反平行の電子対からなる超伝導をシングレット超伝導、平行の電子対からなる超伝導をトリプレット超伝導という。シングレット超伝導は、更に s 波対称性、d 波対称性、という対称性を示す超伝導に分類することができる。一方、トリプレット超伝導は、p 波対称性、f 波対称性、などの対称性を示す超伝導に分けられる。

伝導電子が通常波数ベクトルで表示されるように、波動関数もフーリエ変換して $\mathbf{k}$ の関数として表現される。オーダパラメータの場合は更に $\mathbf{k}$ の振幅 k で0から ∞ まで積分される。したがって単位波数ベクトル $\mathbf{k}$ の関数である。 $\phi(\mathbf{k})$ は球面調和関数 $Y_{lm}^l(\theta, \phi)$ を用いて展開することができる。

$$\phi(\mathbf{k}) = \sum_{l,m} D_{lm} Y_{lm}^l(\theta, \phi) \quad (7)$$

球面調和関数のパリティに関する対称性から上と同様に l が偶数のときにシングレット超伝導（s 波、d 波など）、 l が奇数のときにトリプレット超伝導（p 波、f 波など）となる。具体的なオーダパラメータの関数は、超伝導物質の結晶の対称性によって決まる。波動関数が結晶の対称性（ポテンシャルの対称性）を満たすのと同様である。

$\mathbf{k}$ を極座標の慣用表記で $k_x = \sin \theta \cos \phi$, $k_y = \sin \theta \sin \phi$ とすれば、例えば p 波超伝導の場合は、 ϕ を θ に置き換えて、 $\Delta \cos \theta$, d 波超伝導の場合のオーダパラ

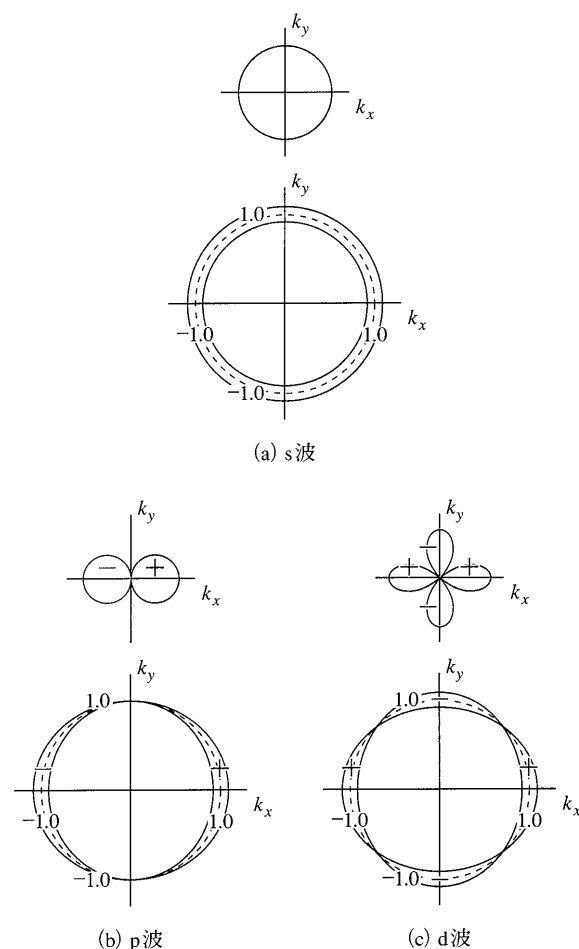


図1 種々の対称性を有する超伝導オーダパラメータ及び超伝導エネルギーギャップの角度依存性

メータは $\Delta(k_x^2 - k_y^2) = \Delta \cos 2\theta$ のようになる。超伝導オーダパラメータの角度依存性を図1に示す。p 波と d 波では振幅が0になる角度（node という）があることと位相が負になる角度範囲が存在することが特徴である。s 波超伝導以外では、オーダパラメータが0になる方向が存在し、符号が負になる領域が必ず存在する。また p 波のオーダパラメータではスピンの向きの自由度が残るのでスカラーではなくベクトルで表現されるのも特徴である。

オーダパラメータの振幅は電子対が励起した準粒子の状態密度のエネルギーギャップを与える。図1にはそれぞれの対称性における超伝導ギャップの角度依存性を示す。

7. 位相の動力学

トンネル形ジョセフソン接合の場合、図2の等価回路で表すことができる。

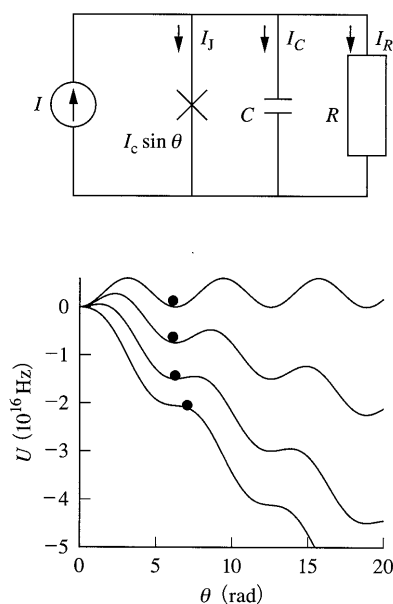


図2 質点の運動方程式を構成する傾いた洗濯板ポテンシャル図は上から $\alpha=0, 0.4, 0.8, 1.1$ の場合

$$I = I_c \sin \theta + C \frac{dV}{dt} + \frac{1}{R} V \quad (8)$$

ここで I は外部からの電流，右辺第1項はジョセフソン電流，第2項と第3項はそれぞれ容量と抵抗を流れる電流である．これに式(2)を代入して，

$$\frac{\hbar C}{2e} \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{\hbar}{2eR} \frac{d\theta}{dt} + I_c \sin \theta - I = 0 \quad (9)$$

が得られる．この方程式は質量 $m = (\hbar/2e)^2 C$ の粒子がポテンシャル $U = -(\hbar I_c / 2e)(\cos \theta + \alpha \theta)$ の中を運動する運動方程式と等価である．このポテンシャルは図2のような形から「傾いた洗濯板ポテンシャル」と呼ばれる．電流とともに傾きは増して，粒子が下降運動を開始することが $d\theta/dt$ の時間平均が有限となって接合の電圧状態へのスイッチと対応する．第2項の摩擦によりポテンシャルの谷に再捕捉 (retrap) されることが0電圧状態へ戻ることになり接合の電流電圧特性にヒステリシスが生じる．

更に $\omega_p^2 = 2eI_c / \hbar C$ ， $\tau = \omega_p$ ， $Q = RC\omega_p$ ， $\alpha = I/I_c$ として整理すると次の式が得られる．

$$\frac{d^2 \theta}{d\tau^2} + \frac{1}{Q} \frac{d\theta}{d\tau} + \sin \theta - \alpha = 0 \quad (10)$$

この運動方程式を数値的に解くことにより $\theta(t)$ を知ることができる．図3は $Q=0.5$ の過減衰 (overdamp) の場合における $\alpha=1.1$ のときのジョセフソン電流 I_J ， C

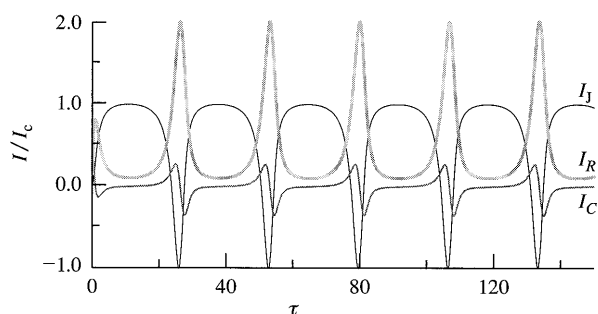


図3 RCSJモデルジョセフソン接合の $\alpha=1.1$ ， $Q=0.5$ の場合におけるジョセフソン電流 I_J ，容量電流 I_C 及び抵抗に流れる電流 I_R の τ 依存性

を流れる電流 I_C ，及び R を流れる電流 I_R の時間依存性である．電流が小さい場合，正弦波からの非調和成分が大きく，大きなひずみを持ち時間平均したときの直流成分が顕著である．これがジョセフソン接合の電流電圧特性のうち準粒子電流に加算された分に相当する．外部電流が大きくなると，正弦波形に急速に漸近して時間平均電流は0に近づき I - V 特性も準粒子 I - V 特性に漸近する．不足減衰 (underdamp) の場合はいずれの電流も正弦波形に近く I - V 特性は準粒子 I - V 特性とほぼ同じである．

上で定義した ω_p をジョセフソンプラズマ周波数という．この周波数より低い電磁波はジョセフソン接合部分を伝搬することができない．光のプラズマ周波数と同じ意味を持っている．また，式(1)と式(2)から

$$V = \frac{\hbar}{2e} \frac{d\theta}{dt} = \frac{\hbar}{2e} \frac{d}{dt} \sin^{-1} \frac{I}{I_c} = \frac{\hbar}{2eI_c \cos \theta} \frac{dI}{dt} \quad (11)$$

という関係が導かれる．これとインダクタンスの定義式 $V = L(dI/dt)$ を比べるとジョセフソン接合はジョセフソン電流に関してインダクタンスであり，その大きさは

$$L = \frac{\hbar}{2eI_c \cos \theta} \quad (12)$$

である．プラズマ周波数はこの L と接合容量 C のLC共振周波数である．

8. ジョセフソン接合の量子化準位

式(1)と式(2)から IV を積分してジョセフソン接合のエネルギー $E_J = (\hbar/2e)I_c$ が得られる．減衰がほとんど無視できる場合 (例えば $T=0$)，式(9)は

$$\left(\frac{\hbar}{2e} \right)^2 C \frac{d^2 \theta}{dt^2} + E_J (\sin \theta - \alpha) = 0 \quad (13)$$

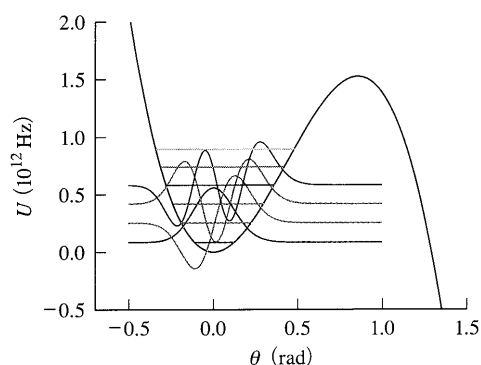


図4 ジョセフソン接合のエネルギー準位量子化. ポテンシャル U , エネルギー準位, 及び対応する波動関数. 計算は $\alpha=0.91$, $C=75$ fF, $I_c=60$ μ A の場合.

という形の運動方程式となる. これに $d\theta/dt$ を乗じて積分し, 運動量を $p=m(d\theta/dt)$ とすると以下のハミルトニアンが得られる.

$$\frac{p^2}{2m} - E_J(\cos \theta + \alpha \theta) = H \quad (14)$$

$U = -E_J(\cos \theta + \alpha \theta)$ はポテンシャルである. 質量が十分小さい (C が十分小さい) 場合はエネルギー準位は量子化される. 波動関数を $\psi(\theta)$ とすると $p = (\hbar/i)(d/d\theta)$ として次のシュレーディンガー方程式が得られる.

$$-E_C \frac{d^2 \psi}{d\theta^2} - E_J(\cos \theta + \alpha \theta) \psi = E \psi \quad (15)$$

ここで $E_C = 2e^2/C$ は容量 C に $2e$ の電荷を蓄積したときのエネルギーである. これを数値的に解いて得られるエネルギー準位と波動関数は図4のようになる. 実際にこのような準位が形成されていることはマイクロ波吸収によって確認されている⁽⁶⁾.

ポテンシャル $U(\theta)$ は $\theta=0$ の近辺では放物形になるのでエネルギー準位と波動関数は角周波数 $\omega_p(1-\alpha^2)^{1/4}$ の調和振動子の場合に近い. 電流が I_c に近くなるとポテンシャルの高さが減少し粒子は熱的にポテンシャルを脱出して接合は電圧状態にスイッチするが, 低温では量子的なトンネル効果により脱出して電圧状態にスイッチする. この現象を巨視的量子トンネル効果といい, 実際に 100 mK 以下で観察されている⁽⁷⁾. ジョセフソン接合が離散的な量子化エネルギー準位を有することから人工の原子ともいわれ, 基底準位とその上の準位の二つを用いて量子ビットに応用する提案もある⁽⁸⁾.

9. おわりに

超伝導における巨視的量子効果の特徴を最もよく表す位相を, 測定できる物理量として表に引き出す役目をしているのがジョセフソン効果である. このような位相で示されるジョセフソン接合の物理現象にはここで述べた以外にも興味深いものがまだまだ多く存在する. π 接合もその一つである⁽⁹⁾. また, 大きい接合では位相が空間座標の関数となり運動方程式は非線形の sine-Gordon 方程式になる. その解にはソリトンがあり実際に観察されている^{(10),(11)}. 多重積層ジョセフソン接合の物理は更に複雑である. 今後更に興味深い現象が見られる可能性もある. このようにジョセフソン接合を位相という面から眺めてみることによりジョセフソン効果を整理して理解することは更に深い理解を求めるために重要であると思われる.

文 献

- (1) B.D. Josephson, "Possible new effects in superconductive tunneling," Phys. Lett., vol. 1, no. 7, pp. 251-253, July 1962.
- (2) D.G. McDonald, "The Nobel laureate versus the graduate student," Physics Today, vol. 54, no. 7, pp. 46-51, July 2001.
- (3) P.W. Anderson and J.M. Rowell, "Probable observation of the Josephson superconducting tunneling effect," Phys. Rev. Lett., vol. 10, no. 6, pp. 230-232, March 1963.
- (4) F. London, "On the problem of the molecular theory of superconductivity," Phys. Rev., vol. 74, no. 5, pp. 562-573, Sept. 1948.
- (5) R.P. ファインマン and A.R. ヒップス, 量子力学と経路積分, みすず書房, 1995.
- (6) J.M. Martinis, M.H. Devoret, and J. Clarke, "Energy-level quantization in the zero-voltage state of a current-biased Josephson junction," Phys. Rev. Lett., vol. 55, no. 15, pp. 1543-1546, Oct. 1985.
- (7) R. Voss and R.A. Webb, "Macroscopic quantum tunneling in 1- μ m nb Josephson junctions," Phys. Rev. Lett., vol. 47, no. 4, pp. 265-268, July 1981.
- (8) J.M. Martinis, S. Nam, and J. Aumentado, "Rabi oscillations in a large Josephson-junction qubit," Phys. Rev. Lett., vol. 59, no. 11, p. 117901, Sept. 2002.
- (9) A.A. Golubov, M.Y. Kupriyanov, and Il'ichev, "The current-phase relation in Josephson junctions," Rev. Mod. Phys., vol. 76, no. 2, pp. 411-469, April 2004.
- (10) A. Matsuda and T. Kawakami, "Fluxon propagation on a Josephson transmission line," Phys. Rev. Lett., vol. 51, no. 8, pp. 694-697, Aug. 1983.
- (11) A. Fujimaki, K. Nakajima, and Y. Sawada, "Spatiotemporal observation of the soliton-antisoliton collision in a Josephson transmission line," Phys. Rev. Lett., vol. 59, no. 25, pp. 2895-2898, Dec. 1987.

(平成 24 年 2 月 29 日受付 平成 24 年 5 月 2 日最終受付)



すずき みのる
鈴木 実

昭 48 京大・工・電気第二卒. 昭 50 同大学院修士課程了. 同年日本電信電話公社(現 NTT)入社. 茨城電気通信研究所等で超伝導材料とジョセフソン効果の研究に従事. 平 11 京大大学院工学研究科教授, 現在に至る. 工博. 応用物理学会フェロー.