

正則列で生成されたイデアルの 整閉包について

広島大・理 伊藤 史朗 (Shiroh Itoh)

この小文では、あとで述べる定理 A の証明の概略と、講演では述べなかったその応用について記述したい。なお、詳細は [1] をみて下さい。

§1. Main Theorem.

ネータ環 A のイデアル I について $\bar{I}$ はその整閉包を表わす。即ち、 $\bar{I} = \{x \in A \mid x \text{ は } x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0, a_i \in I^i, \text{ なる関係式を満たす}\}$ である。

定理 A. ネータ環 A と、正則列で生成される A のイデアル Q について、 $\overline{Q^{n+1}} \cap Q^n = \bar{Q}Q^n$ が任意の自然数 n について成立する。

A が次元 2 の正規局所環で解析的不分岐、

$\mathbb{Q}$ をその parameter イデアル とし, $G = \bigoplus_{n \geq 0} \overline{\mathbb{Q}^n} / \overline{\mathbb{Q}^{n+1}}$ とおくと $H_{G_+}^1(G)_n = 0$ ($n < 0$) となることがわかっている ([2]). $H_{G_+}^1(G)$ も次の complex $0 \rightarrow G \rightarrow G_{\bar{x}} \times G_{\bar{y}} \rightarrow G_{\bar{x}\bar{y}} \rightarrow 0$ (ここで, x, y は $\mathbb{Q}$ の生成系で, $\bar{x}, \bar{y}$ は x, y の initial form) で計算してみると, $H_{G_+}^1(G)_{-1} = 0$ から容易に $\overline{\mathbb{Q}^{n+1}} \cap \mathbb{Q}^n = \overline{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}^n$ であることが導かれる. 従って定理 A はこの事実の一般化である. 又証明の拠所となるべき事実がどのようなものであるかも暗示している. 実際のところ, 我々は次の定理 B を用いて定理 A の証明を行う. (本当はもっと簡単な証明が望ましいと思うのだが....)

定理 B. ネーター環 A とその正則列 $x_1, \dots, x_d$ ($d \geq 2$) を考える. $\mathbb{Q} = (x_1, \dots, x_d)$, $R = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{Q}^n t^n$, $R' = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{\mathbb{Q}^n} t^n$ (t は変数) とおく. $2 \leq r \leq d$ なる自然数を固定し, $J = (t^{-1}, x_1 t, \dots, x_r t) R$ とおくと $H_J^2(R')_n = 0$, $n \leq 0$. さらに各 $x_j t$ ($j = 1, \dots, d$) は $R' / t^{-1} R'$ の正則元である.

定理 B の証明は省略するが, この証明には Rees による次の結果を使用するということを注意しておく.

補題 u をネーター環 A の正則元, B を A の A_u における整閉包とする。このとき uB は素イデアル分解 $uB = Q_1 \cap \cdots \cap Q_r$ ができ、 $P_i = \sqrt{Q_i}$ ($i=1, \dots, r$) とおいたとき各 $(B_{P_i})_{\text{red}}$ は DVR.

以下、定理 A の証明の概略を述べる。まず定理 B から次の主張が導かれる。

命題 C. $\overline{Q^{n+1}} \cap (x_1, x_2)^m = \overline{Q} \cdot (x_1, x_2)^m$.

証明 (の概略). $R = \sum Q^n t^n$, $R' = \sum \overline{Q}^n t^n$, $J = (t^{-1}, x_1 t, x_2 t)R$ とおく。 $H_J^1(R')$ を Čech complex $0 \rightarrow R'_{x_1 t} \times R'_{x_2 t} \times R'_{t^{-1}} \rightarrow R'_{x_1 t x_2 t} \times R'_{x_1 t t^{-1}} \times R'_{x_2 t t^{-1}} \rightarrow R'_{x_1 t x_2 t t^{-1}} \rightarrow 0$ を用いて計算すると $H_J^1(R')_0 = 0$ から命題 C の主張が導かれる。

定理 A の証明 (の概略):

d についての帰納法で証明する。 $d=1$ のときは明らか。 $d=2$ のときは命題 C. をこで $d>2$ とする。このとき A は局所環として一般性を失わない。 $R' = \sum \overline{Q}^n t^n$ とおき、 $t^{-1}R'$ の素因子を $P_1, \dots, P_r$ と

す。 $V_i = (R'_{P_i})_{\text{red}}$ とおく。補題より各 V_i は DVR である。さらに, $a \in A$, $n \in \mathbb{N}$ に対して, $a \in \overline{Q^n} \iff a \in \overline{Q^n V_i}$ $i=1, \dots, r$ となる。そこで x_i を選んで $x_i V_i = \overline{Q V_i}$, $i=1, \dots, r$ とするようにとっておく。
 $B = A[x_2/x_1]$, $I = (x_1, x_3, \dots, x_d)B$ とおく。 x_1 の選ぶ方から $\overline{I^{n+1}} \cap A = \overline{Q^{n+1}}$ 。又 $I^n \cap A = \overline{Q^n}$ は明らかである。さて帰納法の仮定から $\overline{I^{n+1}} \cap I^n = I^n \overline{I}$ 。
 以上のことを用いて $\overline{Q^{n+1}} \cap \overline{Q^n} \subseteq \overline{Q^n Q}$ とするこゝが (途中の計算はめんどうであるか) 証明できる。

§2. 応用

前節の結果の応用を証明抜きで述べる。

こちらも詳細は [1] をみて下さい。

命題 D. A を Cohen-Macaulay 局所環, Q をその parameter イデアルとする。もし $\overline{Q^{n+2}} = \overline{Q^n Q^2}$, $\forall n \geq 0$, であれば $G = \bigoplus_{n \geq 0} \overline{Q^n} / \overline{Q^{n+1}}$ は Cohen-Macaulay 環である。

戻のところで、命題 C の証明のために定理 A を考

えたのである。命題Dの証明においては $\overline{Q^2} \cap Q = \overline{Q}Q$ が成立することが分れば、あとは引用で済むのである。

命題E. A を d 次元 Cohen-Macaulay 局所環で解析的不分岐, Q をその parameter イデアルとす。各 $n \geq 0$ に対し,

$$l_A(A/\overline{Q^{n+1}}) \leq l_A(A/Q) \binom{n+d}{d} - \{l_A(\overline{Q}/Q) + l_A(\overline{Q^2}/Q\overline{Q})\} \binom{n+d-1}{d-1} + l_A(\overline{Q^2}/Q\overline{Q}) \binom{n+d-2}{d-2}.$$

$n \geq 1$ のとき, 等号成立 $\Leftrightarrow \overline{Q^{n+1}} = \overline{Q^{n-1}Q^2}$.

以下 (A, M) は 2 次元 Cohen-Macaulay 局所環, 解析的不分岐, A/M は無限体とす。 A の parameter イデアル Q に対し $g(Q) = l_A(H^1(X, \mathcal{O}_X))$ とおく。ここで $X = \text{Proj}(\bigoplus_{n \geq 0} \overline{Q^n})$ である。さらに $H(A) = \sup \{g(Q) \mid Q \text{ は } A \text{ の parameter イデアル}\}$ とおく (cf. [2]).

命題F.

(1) $H(A) = 0 \Leftrightarrow$ 任意の parameter イデアル Q について $\overline{Q^{n+1}} \subseteq Q^n, \forall n \geq 0$.

(2) $H(A) = 1 \Rightarrow$ 任意の parameter イデアル Q に
 $\exists n \in \mathbb{Z} \quad \overline{Q^{n+2}} \subseteq Q^n, \forall n \geq 0.$

参考文献

- [1] S. Itoh, Integral closures of ideals generated
 by regular sequences. preprint
- [2] J. Lipman, Desingularization of two-dimensional
 schemes, Ann. of Math., 107 (1978), 151-207.
- [3] D. Rees, Nagoya Lectures.