

単純リー群の特異ユニタリ表現の 幾何学的実現と随伴サイクル*

北海道大学・大学院理学研究院数学部門 山下 博

Hiroshi Yamashita

Department of Mathematics, Faculty of Science,
Hokkaido University

概要

$G_{\mathbb{R}}$ を連結かつ中心が有限な実半単純リー群とし, $K_{\mathbb{R}}$ を $G_{\mathbb{R}}$ の極大コンパクト部分群とする. $K_{\mathbb{R}}$ の連結な複素化を K で表す. $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ を $G_{\mathbb{R}}$ のリー代数とし, リーマン対称対 $(G_{\mathbb{R}}, K_{\mathbb{R}})$ が引き起こす複素化リー代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ の対称分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ とする.

許容的 $(\mathfrak{g}, K)$ -加群に対する随伴サイクルは, 当該加群の次数化の台を (代数多様体としての) 既約成分毎に重複度付きで記述するサイクルであり, 半単純リー群 $G_{\mathbb{R}}$ の無限次元許容表現に対して, リー代数の冪零軌道に関わる重要な幾何学的不変量のひとつを与える. また, このサイクルに現れる重複度は単なる正の整数ではなく, 冪零軌道上の点の固定部分群が作用する有限次元加群の次元として理解できることが知られている. この固定部分群の表現を当該 $(\mathfrak{g}, K)$ -加群に対する等方表現と呼ぶ (随伴サイクルと等方表現についての詳細は, Vogan [9], [10], あるいは [8], [14], [16] 等を参照). これらの幾何学的不変量は, 既約許容表現の一般 Whittaker 模型や表現の双対性理論と深く関係することが分かっており ([1], [13], [14]), 保型形式等の研究に役立つものと期待される.

いま, $S = G_{\mathbb{R}}/K_{\mathbb{R}}$ は既約エルミート対称空間であると仮定する. S 上の $G_{\mathbb{R}}$ -不変複素構造は, $\mathfrak{g}$ の K -不変な三角型分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{p}_+ \oplus \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}_-$ を定める. r を $G_{\mathbb{R}}$ の実階数とすれば, $\mathfrak{p}_+$ はちょうど $r+1$ 個の相異なる K -軌道 $\mathcal{O}_m$ ($m=0, 1, \dots, r$) に分解する. ここで, $\mathcal{O}_m$ の閉包が $\overline{\mathcal{O}_m} = \coprod_{s \leq m} \mathcal{O}_s$ となるように軌道をならべておく. さて, $G_{\mathbb{R}}$ のスカラー型正則離散系列表現の解析的延長上に生じる階数 m の Wallach $(\mathfrak{g}, K)$ -加群 L_m ($1 \leq m < r$) は, 1次元の極小 K -型をもつ基本的な特異既約ユニタリ表現であって, その随伴サイクルは重複度 1 付きの既約アフィン代数多様体 $\overline{\mathcal{O}_m}$ に等しい.

* 本研究は JSPS 科研費 22540002 の助成を受けたものである.

この論文では、随伴サイクルと等方表現の考えを用いて Wallach $(\mathfrak{g}, K)$ -加群のテンソル積表現 $\tilde{L} = L_{m_1} \otimes \cdots \otimes L_{m_k}$ ($m_1 + \cdots + m_k < r$) の既約分解を与え、既約成分として現れる特異ユニタリ最高ウェイト $(\mathfrak{g}, K)$ 加群が、簡約代数群 K の表現として、対応する等方表現からの誘導によって幾何学的に実現されることを示す (定理 8). これは、Dvorsky-Sahi ([2]) が管状型 $G_{\mathbb{R}}$ の場合に特異ユニタリ表現の Schrödinger 実現について函数解析学的手法により行った研究の Fock 模型版を、最高ウェイト表現を対象として代数的手法により与えるものである. 本論文における定式化によって、 $\tilde{L}$ に現れる既約表現に対する等方表現が既約であることが自然に分かる (系 9). これまでは個々の場合の計算に依っていた「特異ユニタリ最高ウェイト加群に対する等方表現が既約である」という定理 (山下 [15], cf. 和地・山下 [11]) に対して、すべての場合をカバーするものではないものの、より本質的な説明が得られる.

この論文で扱う Wallach $(\mathfrak{g}, K)$ -加群のテンソル積表現の分解は、 $G_{\mathbb{R}}$ が古典型 AIII, CI, DIII の場合には一方がコンパクト群である簡約双対対に関する表現のテータ対応を与えており、テータ対応を冪零 K -軌道の幾何を使って統一的な視点から理解することを可能にする. なお、ユニタリ最高ウェイト表現のテンソル積については、山田・菅原 [12] による創始期における研究や、近年には表現の分岐理論の枠組みでの研究 (小林 [6]) などがある.

講演では時間の都合で触れることができなかったが、関連した研究の結果、実階数 4 の例外型実単純リー群 FI, EII, EVI, EIX の四元数型特異既約ユニタリ表現 (Gross-Wallach [3]) が冪零 K -軌道の幾何学的量子化により実現できることを、最近明らかにした (山下・朱 [17]). これは、Wallach $(\mathfrak{g}, K)$ -加群 L_m が対応する等方表現からの誘導によって実現されるという事実 (命題 5) の類似を含む結果であるが、その証明は Wallach 表現の場合よりずっと複雑である.

本論文の構成は以下のとおりである. 第 1 節では、エルミート型単純リー群に対する複素解析的冪零 K -軌道とその直積の構造について、この論文の主結果の定式化や証明に必要な事柄をまとめる (命題 1, 命題 3). 第 2 節では Wallach $(\mathfrak{g}, K)$ -加群を導入し、そのテンソル積表現 $\tilde{L}$ を $(S(\mathfrak{p}_-), K)$ -加群として標準的に分解する (定理 6). 第 3 節では、この標準分解が $\tilde{L}$ の $(\mathfrak{g}, K)$ -加群としての既約分解を与えるという主定理 (定理 8) を述べた後、その証明の鍵となる 3 つの命題 (命題 11–13) を用意し、それらを使って定理 8 を証明する.

1 複素解析的冪零 K -軌道とその直積

1.1 $G_{\mathbb{R}}$ を連結で中心が有限なエルミート型実単純リー群とし、 K を $G_{\mathbb{R}}$ の極大コンパクト部分群の複素化、 $G_{\mathbb{R}}$ の複素化リー代数 $\mathfrak{g}$ の K -不変三角型分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{p}_+ \oplus \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}_-$ で表す. このとき、 $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{m}$ なる $\mathfrak{g}$ のカルタン部分代数 $\mathfrak{t}$ 、および、 $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{t}$ に関するルート系 Δ の正ルートの集合 Δ^+ を、上記の三角型分解と整合するように選ぶことができる. すなわち、

$\mathfrak{p}_+$ が非コンパクトな正のルート γ に関するルート部分空間 $\mathfrak{g}_\gamma$ たちの和に一致するようにしておく:

$$(1.1) \quad \mathfrak{p}_+ = \bigoplus_{\gamma \in \Delta_n^+} \mathfrak{g}_\gamma$$

ただし, $\Delta_n^+ = \{\gamma \in \Delta^+ \mid \mathfrak{g}_\gamma \subset \mathfrak{p}_+\}$ ($\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_+ \oplus \mathfrak{p}_-$). このとき, $\mathfrak{p}_+$ は $\mathfrak{g}$ の極大放物型部分代数 $\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}_+$ の冪零根基であるから, $\mathfrak{g}$ の冪零元のみからなる K -不変な可換部分代数である. $\mathfrak{p}_+$ に含まれる K -軌道を複素解析的冪零 K -軌道と呼ぶ.

いま, $\gamma_1, \dots, \gamma_r \in \Delta_n^+$ を非コンパクトな正ルートのなす基本列とする. ただし, γ_r は最大ルート, $i < r$ のとき γ_i は $\gamma_{i+1}, \dots, \gamma_r$ と強直交する Δ_n^+ の最大元となるようにとる. $i = 1, \dots, r$ に対して, ルートベクトル $X_{\gamma_i} \in \mathfrak{g}_{\gamma_i} \setminus \{0\}$ をとり,

$$(1.2) \quad X_m = \begin{cases} X_{\gamma_{r-m+1}} + \dots + X_{\gamma_r} & (1 \leq m \leq r) \\ 0 & (m = 0) \end{cases}$$

をとる複素解析的冪零 K -軌道を $\mathcal{O}_m = \text{Ad}(K)X_m$ で表す. X_m の K における固定部分群を $K(X_m)$ とすれば, K -等質空間として $\mathcal{O}_m \simeq K/K(X_m)$ となる.

命題 1. (1) $\mathfrak{p}_+$ の K -軌道分解は

$$(1.3) \quad \mathfrak{p}_+ = \coprod_{0 \leq m \leq r} \mathcal{O}_m$$

で与えられる.

(2) $\mathcal{O}_m$ の (ザリスキー位相に関する) 閉包 $\overline{\mathcal{O}_m}$ は $\cup_{0 \leq j \leq m} \mathcal{O}_j$ に等しく, $\mathcal{O}_m$ は $\overline{\mathcal{O}_m}$ における唯一の開軌道である. さらに, $m < r$ ならば, 境界部分 $\partial \mathcal{O}_m = \overline{\mathcal{O}_m} \setminus \mathcal{O}_m$ の $\overline{\mathcal{O}_m}$ における余次元は 2 以上である.

(3) アフィン代数多様体 $\overline{\mathcal{O}_m}$ は正規である.

この命題の主張 (1), (2) の証明については [14, Section 3.1] を参照, (3) については冪零軌道 $\mathcal{O}_m$ が球的 (spherical) かつ小さい (small) ことを確認の上, [5, Proposition 2.1] を用いればよい.

$\Gamma(\mathcal{O}_m)$ を K -等質空間 $\mathcal{O}_m \simeq K/K(X_m)$ 上の正則関数 (regular function) 全体のなす環とする. アフィン代数多様体 $\overline{\mathcal{O}_m}$ の座標環を $\mathbb{C}[\overline{\mathcal{O}_m}]$ とすれば, 関数の制限により, 自然に $\mathbb{C}[\overline{\mathcal{O}_m}] \subset \Gamma(\mathcal{O}_m)$ と見なすことができる. これらの環は K -加群の構造をもつことに注意しよう.

$\mathcal{O}_m$ が $\mathfrak{p}_+$ の開軌道でないときには, 命題 1 (2), (3) を踏まえて Kostant [7, Proposition 9] を適用すれば, 次のことが分かる.

系 2. $m < r$ のとき, $\mathbb{C}[\overline{\mathcal{O}_m}] = \Gamma(\mathcal{O}_m) \simeq \text{Ind}_{K(X_m)}^K(1)$ (K -同型) が成り立つ.

1.2. さて, m の分割 $m = m_1 + \cdots + m_k$ ($m_1, \dots, m_k > 0$) に対し,

$$(1.4) \quad \tilde{\mathcal{O}} = \mathcal{O}_{m_1} \times \cdots \times \mathcal{O}_{m_k}$$

とおく. 群 K は $\tilde{\mathcal{O}}$ に対角的に作用する. 次に

$$X_{m_1+\cdots+m_j} = Y_1 + \cdots + Y_j \quad (j = 1, \dots, k)$$

により $Y_j \in \mathcal{O}_{m_j}$ を帰納的に定め, $X' = (Y_1, \dots, Y_k) \in \tilde{\mathcal{O}}$ をとおる K 軌道を $\mathcal{O}' = K \cdot X'$ で表す. $X_m \in \mathcal{O}_m$, $Y_j \in \mathcal{O}_{m_j}$, $X' = (Y_1, \dots, Y_k) \in \mathcal{O}'$ の K における固定部分群をそれぞれ $K(X_m)$, $K(Y_j)$, $K(X')$ とすれば, $X_m = Y_1 + \cdots + Y_k$ だから,

$$K(X') = K(Y_1) \cap \cdots \cap K(Y_k) \subset K(X_m)$$

が成り立つ.

以下, 常に $0 < m < r$ と仮定する. 次の命題は本論文における主結果 (定理 8) の定式化に大切な役割をはたす.

命題 3. (1) $\mathcal{O}'$ は $\tilde{\mathcal{O}}$ において開かつ稠密である.

(2) $\partial\mathcal{O}' = \tilde{\mathcal{O}} \setminus \mathcal{O}'$ の $\tilde{\mathcal{O}}$ における余次元は 2 以上である.

(3) $K(X_m)$ と $K(X')$ は同一の冪零根基 N をもつ. すなわち, $K(X_m) = K(X_m)_{red} \ltimes N$, $K(X') = K(X')_{red} \ltimes N$ (M_{red} は群 M の簡約部分) が成り立ち, 等質空間

$$K(X_m)/K(X') \simeq K(X_m)_{red}/K(X')_{red}$$

は簡約である. さらに, $k = 2$ のときには $K(X_m)/K(X')$ は対称空間になる.

証明には, X_m を含む正規 $\mathfrak{sl}_2$ -triple を用いて固定部分群 $K(X_m)$ の Levi 分解を記述し, Moore 制限ルート定理と群 K に対する Bruhat 分解を用いる.

例 4 ($m = m_1 + m_2$ ($k = 2$) の場合).

(1) $G_{\mathbb{R}} = Sp(n, \mathbb{R})$ (C_n 型の分裂実型 CI) とする. このとき $r = n$ である. 群 $K = GL(n, \mathbb{C})$ は n 次複素対称行列のなす空間 $\mathfrak{p}_+ = \text{Sym}_n(\mathbb{C})$ に

$$K \times \mathfrak{p}_+ \ni (g, Z) \longmapsto gZ^t g \in \mathfrak{p}_+$$

により作用する. $X_m = \begin{pmatrix} I_m & O \\ O & O \end{pmatrix} \in \mathfrak{p}_+$ (I_m は m 次の単位行列) として,

$$(1.5) \quad \begin{aligned} K(X_m) &= \begin{pmatrix} O(m, \mathbb{C}) & * \\ O & GL(n-m, \mathbb{C}) \end{pmatrix} \\ K(X') &= \begin{pmatrix} O(m_1, \mathbb{C}) \times O(m_2, \mathbb{C}) & * \\ O & GL(n-m, \mathbb{C}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $O(m_1, \mathbb{C}) \times O(m_2, \mathbb{C}) \hookrightarrow O(m, \mathbb{C})$ はブロック対角に埋め込まれているものとする。したがって、

$$K(X_m)/K(X') \simeq O(m, \mathbb{C})/(O(m_1, \mathbb{C}) \times O(m_2, \mathbb{C}))$$

は対称空間である。

AIII 型と DIII 型の場合にも類似の考察によって、

$$K(X_m)/K(X') \simeq \begin{cases} GL(m, \mathbb{C})/(GL(m_1, \mathbb{C}) \times GL(m_2, \mathbb{C})) & (G_{\mathbb{R}} = SU(p, q)) \\ Sp(m, \mathbb{C})/(Sp(m_1, \mathbb{C}) \times Sp(m_2, \mathbb{C})) & (G_{\mathbb{R}} = SO^*(2n)) \end{cases}$$

が得られる。

(2) $G_{\mathbb{R}}$ は CI 型, AIII 型, DIII 型でないとする。このとき $G_{\mathbb{R}}$ は BDI 型 (実階数 2), EIII 型 (E_6 の実階数 2 の実型) あるいは EVII 型 (E_7 の実階数 3 の実型) のいずれかであるから、 $G_{\mathbb{R}}$ が EVII 型であって、 $m_1 = m_2 = 1$, $m = m_1 + m_2 = 2 < 3 = r$ の場合が、本論文の設定において考察すべき唯一の (非自明な) 場合となる。このとき、 $X_2 \in \mathcal{O}_2$ を具体的に選び、ルート系の情報等を用いて $K(X_2)$ と $K(X')$ のリー代数 $\mathfrak{k}(X_2)$ と $\mathfrak{k}(X')$ を記述すると次のようになる。

まず、簡約リー代数 $\mathfrak{k} = E_6 \oplus \mathbb{C}$ において、 $\mathfrak{l} = D_5 \oplus \mathbb{C}^2$ を Levi 部分とする極大放物型部分代数 $\mathfrak{q} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{n} \subset \mathfrak{k}$ を考える。 $\mathfrak{q}$ は E_6 のディンキン図形から長辺の端の点をひとつ除いて得られる D_5 に対応し、 $\mathfrak{l}$ の冪零根基 $\mathfrak{n}$ は 16 次元の可換部分代数である。このとき、

$$(1.6) \quad \begin{aligned} \mathfrak{k}(X_2) &= (\mathfrak{k}(X_2) \cap \mathfrak{l}) \oplus \mathfrak{n}, & \mathfrak{k}(X_2) \cap \mathfrak{l} &= B_4 \oplus \mathbb{C} \\ \mathfrak{k}(X') &= (\mathfrak{k}(X') \cap \mathfrak{l}) \oplus \mathfrak{n}, & \mathfrak{k}(X') \cap \mathfrak{l} &= D_4 \oplus \mathbb{C} \end{aligned}$$

となる。これより、 $\mathfrak{k}(X_2)/\mathfrak{k}(X') = B_4/D_4 = \mathfrak{o}(9, \mathbb{C})/\mathfrak{o}(8, \mathbb{C})$ が分かる ([15, Example 4.9] 参照)。

2 Wallach $(\mathfrak{g}, K)$ -加群とそのテンソル積表現 (問題の設定)

2.1. まず、Wallach $(\mathfrak{g}, K)$ -加群を導入し、その基本的性質をまとめよう。以下は Enright-Howe-Wallach, Joseph 等による結果であるが、本論文に近い形で整理されている文献として加藤・落合 [4, Section 4] が参考になろう。

いま、 $\zeta \in \mathfrak{t}^*$ を非コンパクト単純ルートに関する基本ウェイトとし、 $(\gamma_i - \gamma_j)/2$ ($1 \leq i < j \leq r$) の制限ルート系における重複度の $1/2$ 倍を c で表す。半整数 c は i, j のとり方によらず、リー代数 $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ のみにより定まる。このとき、階数 m の Wallach $(\mathfrak{g}, K)$ -加群 L_m とは、 $-mc\zeta$ を最高ウェイトとする既約ユニタリ $(\mathfrak{g}, K)$ -加群であって、1 次元極小 K -型 $\xi^m = \exp(-cm\zeta)$ をもつ。ただし、必要ならば $G_{\mathbb{R}}$ の有限被覆をとって、 ξ が K 上 1 価になるようにしておく。

$(\mathfrak{g}, K)$ -加群 L_m の最高ウェイトベクトル v_m は可換部分リー代数 $\mathfrak{p}_-$ の対称線形環 $S(\mathfrak{p}_-) = \mathbb{C}[\mathfrak{p}_+]$ 上に L_m を生成する. その零化イデアル $\text{Ann}_{S(\mathfrak{p}_-)} v_m$ はアフィン代数多様体 $\overline{\mathcal{O}_m}$ の定義イデアル I_m に等しいことが知られている. したがって,

$$L_m = S(\mathfrak{p}_-)v_m \simeq (\mathbb{C}[\mathfrak{p}_+]/I_m) \otimes \mathbb{C}v_m \simeq \mathbb{C}[\overline{\mathcal{O}_m}] \cdot \xi^m.$$

これと系 2 をあわせて, 次の命題を得る.

命題 5. (1) L_m の随伴サイクルは重複度 1 付きの既約アフィン多様体 $\overline{\mathcal{O}_m}$ に等しい. また, L_m に対する等方表現は K の 1 次元表現 ξ^m の $K(X_m)$ への制限に他ならない.

(2) $(S(\mathfrak{p}_-), K)$ -加群として下記の同型が成り立つ.

$$(2.1) \quad L_m \simeq \Gamma[\mathcal{O}_m] \cdot \xi^m \simeq \text{Ind}_{K(X_m)}^K(1) \cdot \xi^m \simeq \text{Ind}_{K(X_m)}^K(\xi^m|_{K(X_m)})$$

ただし, τ を $K(X_m)$ の有限次元表現としたとき, $S(\mathfrak{p}_-)$ は $\mathcal{O}_m \simeq K/K(X_m)$ 上の正則関数の掛け算により, $K/K(X_m)$ 上のベクトル束 $K \times_{K(X_m)} \tau$ の代数的切断のなす誘導表現の空間 $\text{Ind}_{K(X_m)}^K(\tau)$ に働く.

2.2. 以上の準備のもとに, この論文で考察する問題を次のとおり設定する.

問題. $0 < m < r$ とする. m の分割 $m = m_1 + \cdots + m_k$ に対して, Wallach $(\mathfrak{g}, K)$ -加群のテンソル積表現

$$\tilde{L} = L_{m_1} \otimes \cdots \otimes L_{m_k} \simeq \Gamma[\tilde{\mathcal{O}}] \cdot \xi^m \quad (\tilde{\mathcal{O}} = \mathcal{O}_{m_1} \times \cdots \times \mathcal{O}_{m_k})$$

の既約分解を $(\mathfrak{g}, K)$ -加群の随伴サイクルと等方表現を用いて与え, $\tilde{L}$ に現れる既約表現を幾何学的に実現せよ.

この問題に対して, まず $\tilde{L}$ を $(S(\mathfrak{p}_-), K)$ -加群として標準的に分解しよう.

定理 6. テンソル積 $\tilde{L} = L_{m_1} \otimes \cdots \otimes L_{m_k}$ は, $(S(\mathfrak{p}_-), K)$ -加群として

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \tilde{L} &\simeq \bigoplus_{\sigma \in \Xi} [n_\sigma] \cdot \text{Ind}_{K(X_m)}^K(\sigma \otimes 1_N) \cdot \xi^m \\ &\text{with } n_\sigma = \dim \text{Hom}_{K(X')_{red}}(1, \sigma) \end{aligned}$$

と分解する. ここに, Ξ は零でない $K(X')_{red}$ -固定ベクトルをもつ簡約群 $K(X_m)_{red}$ の既約表現 σ (の同値類) 全体の集合であり, n_σ は $K(X')_{red}$ -固定ベクトルの空間の次元である.

証明. 命題 3, 命題 5 及び表現の誘導の階段性定理を用いて, K -加群としての同型

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \tilde{L} &\simeq \Gamma[\mathcal{O}'] \cdot \xi^m \quad \text{with} \\ \Gamma[\mathcal{O}'] &\simeq \text{Ind}_{K(X')}^K(1) \simeq \text{Ind}_{K(X_m)}^K(\text{Ind}_{K(X')}^{K(X_m)}(1)) \end{aligned}$$

を得る。次に、等質空間 $K(X_m)/K(X') \simeq K(X_m)_{red}/K(X')_{red}$ に対して Frobenius 相互律を用いて $\text{Ind}_{K(X')}^{K(X_m)}(1)$ を分解すれば、 K -加群としての同型 (2.2) が得られる。

一方、 $X_m = Y_1 + \cdots + Y_k$, $Y_j \in \mathcal{O}_{m_j}$ ($j = 1, \dots, k$) に注意すると、テンソル積表現の定義から、 $\tilde{L}$ への $S(\mathfrak{p}_-)$ の作用は冪零軌道 $\mathcal{O}_m \simeq K/K(X_m)$ 上の関数の掛け算によることが分かる。これは (2.2) が $S(\mathfrak{p}_-)$ -加群としての同型でもあることを示している。□

注意 7. $G_{\mathbb{R}}$ が管状型の場合には、 $(S(\mathfrak{p}_-), K)$ -加群としての分解 (2.2) は、 $\tilde{L}$ に対応するユニタリ表現の Siegel 放物型部分群への制限の分解を与えることに対応しているはずである。

3 主定理とその証明

3.1. $\sigma \in \Xi$ に対して $\sigma^{\natural} = (\sigma \otimes 1_N) \cdot (\xi^m|_{K(X_m)})$ とおき、(2.2) の右辺の誘導表現を

$$\Gamma(\sigma) = \text{Ind}_{K(X_m)}^K(\sigma \otimes 1_N) \cdot \xi^m = \text{Ind}_{K(X_m)}^K(\sigma^{\natural})$$

で表す。このとき、前節で設定した問題に対する解答は次のとおりである。

定理 8. (1) 任意の $\sigma \in \Xi$ に対して、 $\Gamma(\sigma)$ は $\tilde{L}$ の既約 $(\mathfrak{g}, K)$ -部分加群である。したがって、(2.2) はテンソル積表現 $\tilde{L} = L_{m_1} \otimes \cdots \otimes L_{m_k}$ の $(\mathfrak{g}, K)$ -加群としての既約分解を与える。

(2) $\Gamma(\sigma)$ の随伴多様体は $\overline{\mathcal{O}_m}$ であり、対応する等方表現は $\sigma^{\natural}$ に等しい。

(3) 対応 $\sigma \mapsto \Gamma(\sigma)$ は集合 Ξ と $\tilde{L}$ に現れる既約 $(\mathfrak{g}, K)$ -加群の同値類全体との間に一対一対応を与える。

これが本論文の主定理である。 $\Gamma(\sigma)$ はテンソル積表現 $\tilde{L}$ に現れる特異ユニタリ最高ウェイト加群の幾何学的実現 (Fock 模型) を与える。

また、この定理から特に次のことが分かる。

系 9. Wallach 表現のテンソル積に現れる特異ユニタリ最高ウェイト表現に対する等方表現は常に既約であり、具体的に特定できる

注意 10. 我々は [15] (cf. [11]) において特異ユニタリ最高ウェイト表現に対する等方表現を PRV-成分への射影を用いて個別に計算し、等方表現が常に既約であることを示した。この論文の結果 (定理 8, 系 9) は、特異ユニタリ最高ウェイト表現に対する等方表現の既約性について、すべての場合をカバーするものではないものの、冪零軌道の幾何と関連づけた統一的な理解を可能にする。さらに、この結果を例外型 EVII の場合 (例 4(2) 参照) に適用すれば、極小表現 L_1 のテンソル積 $L_1 \otimes L_1$ の分解に現れるユニタリ最高ウェイト加群に対する等方表現や K -スペクトルを簡単に記述することができる。

3.2. 次に、定理 8 の証明のポイントとなる 3 つの命題を述べる。

第1に、ユニタリ最高ウェイト表現のテンソル積 $\tilde{L}$ の既約分解と随伴サイクルに関して、次のことが成り立つ。

命題 11. (1) $\tilde{L}$ は加算個のユニタリ最高ウェイト $(\mathfrak{g}, K)$ -加群の離散直和に分解し、各既約成分の重複度は有限である。すなわち、 $\mathfrak{t}^*$ の加算部分集合 Φ が存在し、 $(\mathfrak{g}, K)$ -加群の同型

$$(3.1) \quad \tilde{L} \simeq \bigoplus_{\lambda \in \Phi} [m_\lambda] \cdot L(\lambda)$$

が成り立つ。ここで、 $L(\lambda)$ は $\lambda \in \Phi$ を最高ウェイトとする既約ユニタリ $(\mathfrak{g}, K)$ -加群であり、その $\tilde{L}$ における重複度 m_λ は正の整数である。

(2) $L(\lambda)$ ($\lambda \in \Phi$) の随伴多様体は $\overline{\mathcal{O}_m}$ に等しく、対応する等方表現 $(\rho_\lambda, \mathcal{W}_\lambda)$ は商空間

$$(3.2) \quad \mathcal{W}_\lambda = L(\lambda) / \mathfrak{m}(X_m) L(\lambda)$$

への $K(X_m)$ の自然な作用 ρ_λ により得られる。ただし、 $\mathfrak{m}(X_m)$ は一点集合 $\{X_m\} \subset \mathfrak{p}_+$ を定義する $S(\mathfrak{p}_-)$ の極大イデアルである。

この命題の主張 (1) はよく知られた事実であり、証明は [1, Proposition 7.1] に対するものと同様である。なお、 $\tilde{L}$ は K -加群として $N = (\otimes^k S(\mathfrak{p}_-)) \cdot \xi^m$ の商加群と同型であり、 K の中心の作用を考慮することによって、 N は K -加群として重複度有限であることが分かる。したがって、 $\tilde{L}$ の K -加群としての既約分解も重複度有限になる。主張 (2) については、[14, Corollary 3.9] を見よ。

第2のポイントは、 $\mathcal{O}_m$ の境界部分 $\partial \mathcal{O}_m = \overline{\mathcal{O}_m} \setminus \mathcal{O}_m$ の $\overline{\mathcal{O}_m}$ における余次元が2以上であること (命題 1 (2)) を踏まえ、[10, Proposition 7.9] を $\Gamma(\sigma)$ に適用することによって得られる次の命題である。

命題 12 (Vogan). $\sigma \in \Xi$ とする。このとき、 $\Gamma(\sigma) = \text{Ind}_{K(X_m)}^K(\sigma^\natural)$ は有限生成 $S(\mathfrak{p}_-)$ -加群であり、 $S(\mathfrak{p}_-)$ -加群としての随伴多様体は $\overline{\mathcal{O}_m}$ 、対応する等方表現は

$$(3.3) \quad \Gamma(\sigma) / \mathfrak{m}(X_m) \Gamma(\sigma) \simeq \sigma^\natural$$

で与えられる。

第3に、自然な $K(X_m)$ -準同型写像 $\pi_\lambda : L(\lambda) \rightarrow \mathcal{W}_\lambda$ は $(S(\mathfrak{p}_-), K)$ -準同型

$$(3.4) \quad T_\lambda : L(\lambda) \longrightarrow \text{Ind}_{K(X_m)}^K(\rho_\lambda), \quad (T_\lambda(v))(x) = \pi_\lambda(x^{-1} \cdot v) \quad (x \in K; v \in L(\lambda))$$

を引き起こす。 $L(\lambda)$ の $S(\mathfrak{p}_-)$ における零化イデアルが素イデアルとなる事実 (cf. [14, Theorem 3.7]) を用いて、次の命題を得る。

命題 13 ([16, Corollary 2.1]). $(S(\mathfrak{p}_-), K)$ -準同型 T_λ は単射である。よって、 $L(\lambda)$ は $\text{Ind}_{K(X_m)}^K(\rho_\lambda)$ の中に $(S(\mathfrak{p}_-), K)$ -加群として埋め込まれる： $L(\lambda) \hookrightarrow \text{Ind}_{K(X_m)}^K(\rho_\lambda)$

3.3. 定理 8 の証明. 命題 11–13 を用いて定理 8 を証明する.

(第 1 段階) まず (2.2) と (3.1) から, $(S(\mathfrak{p}_-), K)$ -加群の同型

$$\tilde{L} \simeq \bigoplus_{\lambda \in \Phi} [m_\lambda] \cdot L(\lambda) \simeq \bigoplus_{\sigma \in \Xi} [n_\sigma] \cdot \Gamma(\sigma)$$

が成り立つ. 命題 11 と命題 12 を使って各辺の等方表現をとると, $K(X_m)$ -加群としての同型

$$(3.5) \quad \tilde{L}/\mathfrak{m}(X_m)\tilde{L} \simeq \bigoplus_{\lambda \in \Phi} [m_\lambda] \cdot \rho_\lambda \simeq \bigoplus_{\sigma \in \Xi} [n_\sigma] \cdot \sigma^{\mathfrak{h}}$$

が得られる. これに誘導関手 $\text{Ind}_{K(X_m)}^K(*)$ を施し, さらに命題 13 を用いると, K -加群として

$$\tilde{L} \simeq \bigoplus_{\lambda \in \Phi} [m_\lambda] \cdot L(\lambda) \xrightarrow{\oplus \lambda T_\lambda} \bigoplus_{\lambda \in \Phi} [m_\lambda] \cdot \text{Ind}_{K(X_m)}^K(\rho_\lambda) \simeq \bigoplus_{\sigma \in \Xi} [n_\sigma] \cdot \Gamma(\sigma) \simeq \tilde{L}$$

を得る. これより, $\tilde{L}$ が K -加群として重複度有限であることに注意して各 K -型の重複度を比較すれば, 任意の $\lambda \in \Phi$ に対して埋め込み $T_\lambda : L(\lambda) \hookrightarrow \text{Ind}_{K(X_m)}^K(\rho_\lambda)$ は全射であることが分かる. すなわち, $(S(\mathfrak{p}_-), K)$ -同型

$$(3.6) \quad L(\lambda) \simeq \text{Ind}_{K(X_m)}^K(\rho_\lambda)$$

が得られた.

(第 2 段階) $\lambda \in \Phi$ に対して $\sigma \in \Xi$ が存在して $L(\lambda)$ の等方表現 ρ_λ が $\sigma^{\mathfrak{h}}$ と同値になることを示そう. 実際, (3.5) から有限個の $\sigma_1, \dots, \sigma_q \in \Xi$ (重複を許す) が存在して $\rho_\lambda \simeq \bigoplus_{i=1}^q \sigma_i^{\mathfrak{h}}$ となる. したがって (3.6) から

$$(3.7) \quad L(\lambda) \simeq \bigoplus_{i=1}^q \text{Ind}_{K(X_m)}^K(\sigma_i^{\mathfrak{h}})$$

が成り立つ. この直和分解に沿った $L(\lambda)$ から $\text{Ind}_{K(X_m)}^K(\sigma_i^{\mathfrak{h}})$ への射影作用素を P_i で表す. $L(\lambda)$ は λ を最高ウェイトとする既約 K -加群 V_λ を重複度 1 で含むから, $P_{i_0}(V_\lambda) \neq 0$ なる番号 i_0 がただひとつ存在する. V_λ は $S(\mathfrak{p}_-)$ 上 $L(\lambda)$ を生成するので,

$$L(\lambda) \simeq \bigoplus_{i=1}^q P_i(L(\lambda)) = P_{i_0}(L(\lambda)) = \text{Ind}_{K(X_m)}^K(\sigma_{i_0}^{\mathfrak{h}})$$

となる. これより $\rho_\lambda \simeq \sigma_{i_0}^{\mathfrak{h}}$ が分かる.

(第 3 段階) 最後に, $\lambda \in \Phi$ に対して $\rho_\lambda \simeq \sigma^{\mathfrak{h}}$ なる $\sigma \in \Xi$ を対応させる写像 $\theta : \Phi \rightarrow \Xi$ が全単射であることを確認する. θ が全射であることは (3.5) からしたがひ, 単射性は $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ならば $L(\lambda_1)$ と $L(\lambda_2)$ の K -型の分布が異なることから導かれる.

以上により, 主定理は完全に証明された. $\square$

参考文献

- [1] N. Abe and H. Yamashita, A note on Howe duality correspondence and isotropy representations for unitary lowest weight modules of $Mp(n, \mathbb{R})$, *J. Lie Theory*, **19** (2009), 671–683.
- [2] A. Dvorsky and S. Sahi, Tensor products of singular representations and an extension of the θ -correspondence, *Selecta Math.*, (N.S.) **4** (1998), 11–29.
- [3] B. H. Gross and N. R. Wallach, On quaternionic discrete series representations, and their continuations, *J. reine angew. Math.*, **481** (1996), 73–123.
- [4] S. Kato and H. Ochiai, The degrees of orbits of the multiplicity-free actions, *in*: “Nilpotent orbits, associated cycles and Whittaker models for highest weight representations”, *Astérisque*, **273** (2001), 139–158.
- [5] D. R. King, Small spherical nilpotent orbits and K -types of Harish Chandra modules, preprint (arXiv:math/0701034), 2006.
- [6] T. Kobayashi, Multiplicity-free theorems of the restrictions of unitary highest weight modules with respect to reductive symmetric pairs, *in*: “Representation Theory and Automorphic Forms”, *Progress in Math.* **255**, Birkhäuser, 2007, pp. 45–109.
- [7] B. Kostant, Lie group representations on polynomial rings, *Amer. J. Math.*, **85** (1963), 327–404.
- [8] K. Nishiyama, H. Ochiai and K. Taniguchi, Bernstein degree and associated cycles of Harish-Chandra modules – Hermitian symmetric case, *in*: “Nilpotent orbits, associated cycles and Whittaker models for highest weight representations”, *Astérisque*, **273** (2001), 13–80.
- [9] D. A. Vogan, Associated varieties and unipotent representations, *in*: “Harmonic Analysis on Reductive Groups (W.Barker and P.Sally eds.)”, *Progress in Math.*, Vol. **101**, Birkhäuser, 1991, 315–388.
- [10] D. A. Vogan, The method of coadjoint orbits for real reductive groups, *in*: “Representation Theory of Lie Groups (eds. J. Adams and D. Vogan)”, 177–238, *IAS/Park City Mathematics Series* **8**, AMS, 2000.
- [11] A. Wachi and H. Yamashita, Isotropy representations for singular unitary highest weight modules, in preparation.
- [12] H. Yamada and T. Sugawara, Tensor products of singular holomorphic representations of $SU(n, n)$ and $Mp(n, \mathbb{R})$, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, **58** (1982),

315–318.

- [13] 山下 博 (述), 阿部紀行 (記), 簡約リー群の表現と冪零軌道, *Lecture Notes in Mathematical Sciences*, The University of Tokyo, **3**, 2008, 77 (+iii) pages.
- [14] H. Yamashita, Cayley transform and generalized Whittaker models for irreducible highest weight modules, *in*: “Nilpotent orbits, associated cycles and Whittaker models for highest weight representations”, *Astérisque*, **273** (2001), 81–137.
- [15] H. Yamashita, Isotropy representation and projection to the PRV-component, *RIMS Kōkyūroku*, **1294** (2002), 62–71.
- [16] H. Yamashita, Isotropy representation for Harish-Chandra modules, *in* “Infinite dimensional harmonic analysis III”, *World Sci. Publ.*, Hackensack, NJ, 2005, 325–351.
- [17] , H. Yamashita and F. Zhu, Quantization of quaternionic nilpotent K -orbits, 日本数学会 2012 年度秋季総合分科会, 函数解析学分科会講演アブストラクト, 83–84.