

## らせん渦の線形安定性解析 － ノーマルモード解析と短波長解析の関係 －

東北大 流体研 服部裕司 (Yuji Hattori)

Institute of Fluid Science, Tohoku University

九大 数理 福本康秀 (Yasuhide Fukumoto)

Graduate School of Mathematics, Kyushu University

### Abstract

ヘリコプタ翼のように回転翼から形成されるらせん状の渦の安定性を考える。われわれの以前の短波長安定性解析により、らせん渦は渦輪と同様に曲率不安定性をもつことがわかっている。本研究ではノーマルモード安定性解析によりらせん渦の曲率不安定性に対する振りの効果を調べた。不安定成長率の内積による表式を求め、 $O(\epsilon)$  である成長率に対し  $O(\epsilon^2)$  の修正として振りの効果があらわれることを明らかにした。実際に振りによる成長率の変化を数値的に求め、短波長極限で短波長安定性解析による結果と一致することを確認した。

## 1 はじめに

一般に翼のエッジから翼後方に伸びる翼端渦は、たとえば航空機においては、誘導抵抗や後方乱気流の問題に大きく寄与する。この翼端渦の動的性質を知り、翼型の最適化や制御法への道を開くことは産業応用上大きな意味をもつ。ヘリコプタや流体機械のように翼が回転翼である場合、渦の中心線はらせん状になる。ここでは、これを理想化し、一定の曲率と振率をもち、無限に伸びるものをらせん渦と呼ぶことにする。

らせん渦の不安定性は、長波長のものについてはいくつかの研究がある [1–5]。Betchov[1] は局所誘導近似 (LIA) によりらせん渦糸がある長さよりも大きい波長をもつ擾乱に対して不安定であることを示した。Widnall[2] は cut-off 法により有限の大きさの渦核の場合の不安定性を研究したが、渦の中心線の運動のみに着目し、渦核内部の運動は無視している。Okulov[4] および Okulov and Sørensen[5] は同様だが改良された方法により、複数のらせん渦糸の相互作用が安定性に及ぼす影響について調べている。しかしながら、渦核の大きさと同程度の波長の擾乱に関する安定性については、われわれの短波長安定性解析 [6] がはじめてのものである。この解析により、らせん渦が渦輪と同様に渦構造の曲率に起因する曲率不安定性をもつことが示された。不安定成長率は  $\epsilon = \text{渦核半径}/\text{曲率半径}$  ( $< 1$ ) を展開パラメタとして  $O(\epsilon)$  であり、このオーダーでは同じ半径をもつ渦輪 (すなわち振率 0) の場合に一致する。次のオーダー  $O(\epsilon^2)$  で振りと回転の効果が出現する。

短波長安定性解析は、ノーマルモード安定性解析と短波長極限で一致する結果を数多くの場合にもたらす。しかしながら、不安定モードの構造など、短波長安定性解析では得られない情報も少なくない。本論文では、らせん渦の不安定性をノーマルモード安定性解析により調べた結果について述べる。

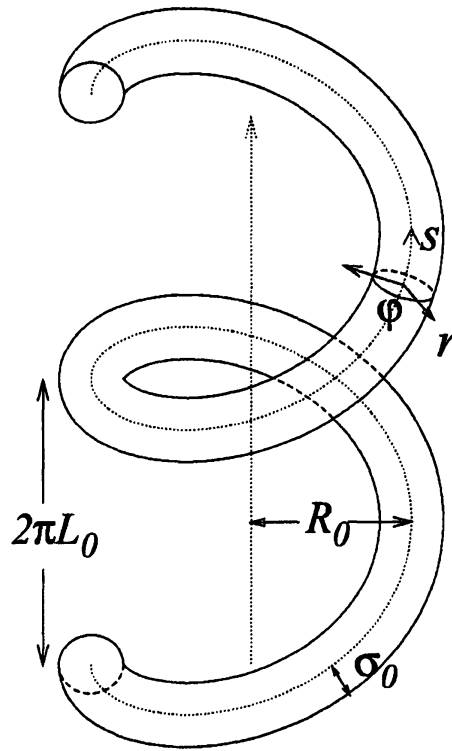


Figure 1: Helical vortex tube.

## 2 問題設定と解析のアウトライン

### 2.1 問題設定

問題設定は Hattori and Fukumoto[6] と同様である。一定の曲率と捩率をもつらせんを中心線とし、これに垂直な断面において半径  $\sigma_0$  の円内のみに渦度をもつらせん渦管を考える (Fig. 1)。らせん渦は一般に自己誘導速度や境界条件により、らせんの対称軸のまわりに回転する。以下では、この回転の効果も考える。

### 2.2 解析のアウトライン

解析は以下の手順にしたがう：

1. 基本流を  $\epsilon$  を展開パラメタとする摂動展開により求める。
2. 基本流の周りに線形化した Euler 方程式を摂動展開する。
3. 0 次の擾乱の固有モードを求める。このモードは中立安定であり、Kelvin 波とよばれる。
4. 1 次の擾乱の方程式から、0 次のモードの組み合わせによってパラメタ共鳴不安定性が生じることを示す。これは渦輪の曲率不安定性と同じものである。

5. 2次の擾乱の方程式から曲率不安定性の変調を導く。ここでらせん渦の振りと回転の効果があられる。

### 3 ノーマルモード安定性解析

#### 3.0 準備

解析を始める前にいくつか準備をしておく。座標系は Fukumoto and Okulov[7] と同様にする。まず、空間曲線に対する Frenet フレーム  $\{\mathbf{e}_i\}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) を用いて次のように  $(r, \varphi, s)$  を定義する

$$\mathbf{x} = \mathbf{X}(s) + r \cos \varphi \mathbf{e}_2 + r \sin \varphi \mathbf{e}_3. \quad (1)$$

ここで  $\mathbf{X}(s)$  は、らせんの中心線である

$$\mathbf{X}(s) = \begin{pmatrix} R_0 \cos \frac{s}{\sqrt{R_0^2 + L_0^2}} \\ R_0 \sin \frac{s}{\sqrt{R_0^2 + L_0^2}} \\ \frac{L_0}{\sqrt{R_0^2 + L_0^2}} s \end{pmatrix}. \quad (2)$$

らせんの曲率  $\kappa_1$ , 捩率  $\kappa_2$  は

$$\kappa_1 = \frac{R_0}{R_0^2 + L_0^2}, \quad \kappa_2 = \frac{L_0}{R_0^2 + L_0^2} \quad (3)$$

となる。 $R_c = \kappa_1^{-1}$  を曲率半径という。しかしながら  $(r, \varphi, s)$  は直交座標系とはならない。 $\varphi$  の代わりに  $\theta = \varphi + \kappa_2 s$  を用いることで、 $(r, \theta, s)$  が直交座標系となる。

このとき、空間微分は

$$\nabla = \frac{1}{1 - \kappa_1 r \cos \varphi} \mathbf{e}_s \frac{\partial}{\partial s} + \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\mathbf{e}_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (4)$$

のようにあらわされる。また、基底ベクトルの微分は次のようになる

$$\frac{\partial}{\partial r} \mathbf{e}_s = \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{e}_r = \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{e}_\theta = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{e}_s = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\theta, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta = -\mathbf{e}_r,$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \mathbf{e}_s = \kappa_1 (\cos(\theta - \kappa_2 s) \mathbf{e}_r - \sin(\theta - \kappa_2 s) \mathbf{e}_\theta),$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \mathbf{e}_r = -\kappa_1 \cos(\theta - \kappa_2 s) \mathbf{e}_s, \quad \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{e}_\theta = \kappa_1 \sin(\theta - \kappa_2 s) \mathbf{e}_s.$$

次に、支配方程式をいまの座標系で表現する。支配方程式は、回転系における Euler 方程式

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} = -\nabla p \quad (5)$$

(ただし遠心力  $\Omega \times (\Omega \times \mathbf{x})$  は圧力に含めた)、および連続の式

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (6)$$

である。上の表現を利用すると連続の式は

$$\left( \frac{1}{1 - \kappa_1 r \cos \varphi} e_s \frac{\partial}{\partial s} + e_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{e_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \cdot (w e_s + u e_r + v e_\theta) = 0 \quad (7)$$

であり、これは

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{1 - \kappa_1 r \cos \varphi} \left( \frac{\partial w}{\partial s} - \kappa_1 u \cos \varphi + \kappa_1 v \sin \varphi \right) = 0 \quad (8)$$

となる。同様に Euler 方程式は

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v^2}{r} + \frac{w}{1 - \kappa_1 r \cos \varphi} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\kappa_1 \cos \varphi}{1 - \kappa_1 r \cos \varphi} w^2 \\ + \frac{2\Omega_0}{\sqrt{R_0^2 + L_0^2}} (R_0 w \cos \varphi - L_0 v) = -\frac{\partial p}{\partial r}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{uv}{r} + \frac{w}{1 - \kappa_1 r \cos \varphi} \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{\kappa_1 \sin \varphi}{1 - \kappa_1 r \cos \varphi} w^2 \\ + \frac{2\Omega_0}{\sqrt{R_0^2 + L_0^2}} (-R_0 w \sin \varphi + L_0 u) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{w}{1 - \kappa_1 r \cos \varphi} \frac{\partial w}{\partial s} + w \left( -\frac{\kappa_1 \cos \varphi}{1 - \kappa_1 r \cos \varphi} u + \frac{\kappa_1 \sin \varphi}{1 - \kappa_1 r \cos \varphi} v \right) \\ + \frac{2\Omega_0 R_0}{\sqrt{R_0^2 + L_0^2}} (v \sin \varphi - u \cos \varphi) = -\frac{1}{1 - \kappa_1 r \cos \varphi} \frac{\partial p}{\partial s} \end{aligned} \quad (11)$$

となる。

ここで無次元化を以下のように行う

$$r^* = \frac{r}{\sigma_0}, \quad s^* = \frac{s}{R_c}, \quad \mathbf{u}^* = \frac{\mathbf{u}}{u_0}, \quad t^* = \frac{u_0 t}{\sigma_0}. \quad (12)$$

ただし  $u_0 = \Gamma_0/(2\pi)$  であり  $\Gamma_0$  は循環である。これに伴い、定数は以下のように無次元化される

$$\kappa_1^* = \sigma_0 \kappa_1 = \epsilon = \sigma_0/R_c, \quad \Omega_0^* = \Omega_0 \sigma_0/u_0 = \beta \epsilon^2. \quad (13)$$

さらに捩率と曲率の比を  $\kappa_2/\kappa_1 = L_0/R_0 = \alpha$  によりあらわす。

この無次元化により支配方程式は以下ようになる (無次元変数の \* は省略した)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v^2}{r} + \epsilon \frac{w}{1 - \epsilon r \cos \varphi} \frac{\partial u}{\partial s} + \epsilon \frac{\cos \varphi}{1 - \epsilon r \cos \varphi} w^2 \\ + \epsilon^2 \frac{2\beta}{\sqrt{1 + \alpha^2}} (w \cos \varphi - \alpha v) = -\frac{\partial p}{\partial r}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{uv}{r} + \epsilon \frac{w}{1 - \epsilon r \cos \varphi} \frac{\partial v}{\partial s} - \epsilon \frac{\sin \varphi}{1 - \epsilon r \cos \varphi} w^2 \\ + \epsilon^2 \frac{2\beta}{\sqrt{1 + \alpha^2}} (-w \sin \varphi + \alpha u) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \epsilon \frac{w}{1 - \epsilon r \cos \varphi} \frac{\partial w}{\partial s} + \epsilon w \left( -\frac{\cos \varphi}{1 - \epsilon r \cos \varphi} u + \frac{\sin \varphi}{1 - \epsilon r \cos \varphi} v \right) \\ + \epsilon^2 \frac{2\beta}{\sqrt{1 + \alpha^2}} (v \sin \varphi - u \cos \varphi) = -\frac{\epsilon}{1 - \epsilon r \cos \varphi} \frac{\partial p}{\partial s}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\epsilon}{1 - \epsilon r \cos \varphi} \left( \frac{\partial w}{\partial s} - u \cos \varphi + v \sin \varphi \right) = 0. \quad (17)$$

### 3.1 基本流

上の方程式の定常解を摂動展開により求める。尚、渦は  $O(1)$  では Rankine 渦とする。 $O(\epsilon^2)$  では一般に渦の断面は楕円に変形する。しかしながら、この変形を評価するためには自己誘導速度を求める必要があるが、らせん渦の場合にはこれを解析的に正確に求めることは困難である [7-9]。そこで、今回はらせん渦の渦核境界が変形しないとし、滑り境界条件を課し、渦核内部 ( $r < 1$ ) のみを考えることにする。これは非物理的な設定に見えるが、実は曲率不安定性の短波長極限の性質は境界条件の取り方に依存しないことがわかっている [6]。

基本流を次のように摂動展開する

$$u_0 = \epsilon u_{01} + \epsilon^2 u_{02} + \cdots, \quad (18)$$

$$v_0 = v_{00} + \epsilon v_{01} + \epsilon^2 v_{02} + \cdots, \quad (19)$$

$$w_0 = \epsilon w_{01} + \epsilon^2 w_{02} + \cdots, \quad (20)$$

$$p_0 = p_{00} + \epsilon p_{01} + \epsilon^2 p_{02} + \cdots. \quad (21)$$

$O(1)$  の解として Rankine 渦を

$$v_{00} = r, \quad p_{00} = \frac{r^2}{2} \quad (22)$$

を選ぶ。すると  $O(\epsilon)$  の解は

$$u_{01} = \frac{5}{8} (1 - r^2) \sin \varphi, \quad v_{01} = \left( \frac{5}{8} - \frac{7}{8} r^2 \right) \cos \varphi, \quad w_{01} = 0, \quad p_{01} = \left( \frac{5}{8} r - \frac{3}{8} r^3 \right) \cos \varphi \quad (23)$$

と求められる。さらに  $O(\epsilon^2)$  の解は

$$u_{02} = \left( \frac{1}{8}r - \frac{1}{8}r^3 \right) \sin 2\varphi, \quad (24)$$

$$v_{02} = \left( \frac{1}{8}r - \frac{1}{16}r^3 \right) \cos 2\varphi, \quad (25)$$

$$w_{02} = \left[ \left( \frac{5}{8}\alpha + 2\gamma \right) r - \frac{3}{8}\alpha r^3 \right] \cos \varphi, \quad (26)$$

$$p_{02} = \left( \alpha\gamma + \frac{5}{32} \right) r^2 - \frac{9}{128}r^4 + \left( -\frac{15}{64}r^2 + \frac{5}{32}r^4 \right) \cos 2\varphi \quad (27)$$

となる。ただし、 $\gamma = \beta/\sqrt{1+\alpha^2}$  である。

### 3.2 線形化 Euler 方程式の摂動展開

前節で求めた基本流の周りに支配方程式を  $\epsilon$  に関して展開する。 $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}'$ ,  $p = p_0 + p'$  とおいて支配方程式に代入し、 $u', p'$  の 1 次の項のみを残して整理すると  $O(\epsilon^2)$  までで次を得る

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{v_{00}}{r} \frac{\partial u'}{\partial \theta} - \frac{2v_{00}}{r} v' + \frac{\partial p'}{\partial r} \\ &= \epsilon \left[ -u_{01} \frac{\partial u'}{\partial r} - \frac{\partial u_{01}}{\partial r} u' - \frac{v_{01}}{r} \frac{\partial u'}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_{01}}{\partial \theta} v' + \frac{2v_{01}}{r} v' \right] \\ &+ \epsilon^2 \left[ -u_{02} \frac{\partial u'}{\partial r} - \frac{\partial u_{02}}{\partial r} u' - \frac{v_{02}}{r} \frac{\partial u'}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_{02}}{\partial \theta} v' + \frac{2v_{02}}{r} v' - w_{02} \frac{\partial u'}{\partial s} \right. \\ &\quad \left. - 2\gamma(w' \cos \varphi - \alpha v') - \frac{\partial u_{01}}{\partial s^*} w' \right], \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v'}{\partial t} + \frac{\partial v_{00}}{\partial r} u' + \frac{v_{00}}{r} u' + \frac{v_{00}}{r} \frac{\partial v'}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial p'}{\partial \theta} \\ &= \epsilon \left[ -u_{01} \frac{\partial v'}{\partial r} - \frac{\partial v_{01}}{\partial r} u' - \frac{v_{01}}{r} \frac{\partial v'}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_{01}}{\partial \theta} v' - \frac{u_{01}}{r} v' - \frac{v_{01}}{r} u' - \frac{\partial v_{00}}{\partial s^*} w' \right] \\ &+ \epsilon^2 \left[ -u_{02} \frac{\partial v'}{\partial r} - \frac{\partial v_{02}}{\partial r} u' - \frac{v_{02}}{r} \frac{\partial v'}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_{02}}{\partial \theta} v' - \frac{u_{02}}{r} v' - \frac{v_{02}}{r} u' - w_{02} \frac{\partial v'}{\partial s} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial v_{01}}{\partial s^*} w' - 2\gamma(-w' \sin \varphi + \alpha u') \right], \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial w'}{\partial t} + \frac{v_{00}}{r} \frac{\partial w'}{\partial \theta} + \frac{\partial p'}{\partial s} \\ &= \epsilon \left[ -u_{01} \frac{\partial w'}{\partial r} - \frac{v_{01}}{r} \frac{\partial w'}{\partial \theta} - v_{00} \sin \varphi w' - r \cos \varphi \frac{\partial p'}{\partial s} \right] \\ &+ \epsilon^2 \left[ -u_{02} \frac{\partial w'}{\partial r} - \frac{\partial w_{02}}{\partial r} u' - \frac{v_{02}}{r} \frac{\partial w'}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial w_{02}}{\partial \theta} v' - w_{02} \frac{\partial w'}{\partial s} \right. \\ &\quad \left. + (u_{01} \cos \varphi - v_{01} \sin \varphi - v_{00} r \sin \varphi \cos \varphi) w' \right. \\ &\quad \left. - 2\gamma(v' \sin \varphi - u' \cos \varphi) - r^2 \cos^2 \varphi \frac{\partial p'}{\partial s} \right], \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial u'}{\partial r} + \frac{u'}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v'}{\partial \theta} + \frac{\partial w'}{\partial s} \\
&= \epsilon \left[ -r \cos \varphi \frac{\partial w'}{\partial s} + u' \cos \varphi - v' \sin \varphi \right] \\
&+ \epsilon^2 \left[ -r^2 \cos^2 \varphi \frac{\partial w'}{\partial s} + r \cos^2 \varphi u' - r \sin \varphi \cos \varphi v' \right]. \quad (31)
\end{aligned}$$

ここで、擾乱の  $s$  方向の波長が渦核と同じ程度である場合を扱うこととし、 $s$  の無次元化を  $s^* = s/\sigma_0$  に取り換えている。この無次元化で  $\varphi = \theta - \epsilon \alpha s$  となる。

### 3.3 0 次の擾乱

$O(1)$  の擾乱として次の形のものを考える

$$\mathbf{u}' = \exp[i(\omega t + m\theta + ks)] \mathbf{u}'_{10,m}. \quad (32)$$

$\mathbf{u}'_{10,m}$  の満たす線形方程式は以下のように書くことができる

$$L_0(\omega, k, m) \mathbf{u}'_{10,m} = 0, \quad (33)$$

$$L_0(\omega, k, n) = -i\omega I_v + M(k, n), \quad I_v = \text{diag}(1, 1, 1, 0), \quad (34)$$

$$M(k, n) = \begin{pmatrix} in & -2 & 0 & \frac{d}{dr} \\ 2 & in & 0 & \frac{in}{r} \\ 0 & 0 & in & ik \\ \frac{d}{dr} + \frac{1}{r} & \frac{in}{r} & ik & 0 \end{pmatrix}. \quad (35)$$

(33) が非自明な解をもつためには次の分散関係が成り立つ必要がある

$$D(k, \omega, m) = (m - \omega)\eta J'_{|m|}(\eta) + 2mJ_{|m|}(\eta) = 0, \quad \eta^2 = \frac{4 - (m - \omega)^2}{(m - \omega)^2} k^2. \quad (36)$$

解は Kelvin 波として知られるものである

$$u'_{10,m}(r) = i\eta \left[ \left( \frac{-m + \omega}{2} - 1 \right) J_{m-1}(\eta r) + \left( \frac{m - \omega}{2} - 1 \right) J_{m+1}(\eta r) \right], \quad (37)$$

$$v'_{10,m}(r) = \eta \left[ \left( \frac{m - \omega}{2} + 1 \right) J_{m-1}(\eta r) + \left( \frac{m - \omega}{2} - 1 \right) J_{m+1}(\eta r) \right], \quad (38)$$

$$w'_{10,m}(r) = -\frac{k}{m - \omega} [4 - (m - \omega)^2] J_m(\eta r), \quad (39)$$

$$p'_{10,m}(r) = [4 - (m - \omega)^2] J_m(\eta r) \quad (40)$$

( $J$  は Bessel 関数)。

### 3.4 1 次の擾乱: 曲率不安定性

線形化 Euler 方程式の右辺の  $O(\epsilon)$  項は  $e^{\pm i\varphi}$  の定常「波」と見ることができる。したがって、 $\varphi$  に関して波数が 1 異なる波の組み合わせからパラメタ共鳴不安定性が発生する可能性がある。これが曲率不安定性である。

ここで、ソース項が  $e^{\pm i\theta}$  ではなく  $e^{\pm i\varphi}$  の依存性をもつことに注意されたい。完全な共鳴は  $O(1)$  の擾乱を

$$\begin{aligned} \mathbf{u}'_0 &= A\mathbf{u}'_{10,m} \exp[i(\omega t + m\varphi + ks)] \\ &\quad + B\mathbf{u}'_{10,m+1} \exp[i(\omega t + (m+1)\varphi + ks)] \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} &= A\mathbf{u}'_{10,m} \exp[i(\omega t + m\theta + (k - \epsilon m\alpha)s)] \\ &\quad + B\mathbf{u}'_{10,m+1} \exp[i(\omega t + (m+1)\varphi + (k - \epsilon(m+1)\alpha)s)] \end{aligned} \quad (42)$$

と選んだときにおこる。つまり、直交座標系  $(r, \theta, s)$  では  $s$  方向の波数に  $\epsilon\alpha$  のズレが生じる。 $k, \omega$  は

$$D(k - \epsilon m\alpha, \omega, m) = D(k - \epsilon(m+1)\alpha, \omega, m+1) = 0 \quad (43)$$

をみたすように選ぶ必要がある。 $O(\epsilon)$  ではこのズレは成長率の値に影響しないが、 $O(\epsilon^2)$  ではこれを考慮する必要がある。

$O(1), O(\epsilon)$  の式は以下のようにあらわされる

$$L_0(\omega, k - \epsilon m\alpha, m)\mathbf{u}'_{10,m} = 0, \quad (44)$$

$$L_0(\omega, k - \epsilon(m+1)\alpha, m+1)\mathbf{u}'_{10,m+1} = 0, \quad (45)$$

$$L_0(\omega, k - \epsilon m\alpha, m)\mathbf{u}'_{11,m} = BN_1^{-1}\mathbf{u}'_{10,m+1} - \frac{dA}{dt_1}I_v\mathbf{u}'_{10,m}, \quad (46)$$

$$L_0(\omega, k - \epsilon(m+1)\alpha, m+1)\mathbf{u}'_{11,m+1} = AN_1^{+1}\mathbf{u}'_{10,m} - \frac{dB}{dt_1}I_v\mathbf{u}'_{10,m+1}. \quad (47)$$

$N_1^{\pm 1}$  は線形化 Euler 方程式 (28)–(31) の右辺の  $O(\epsilon)$  の項を  $e^{\pm i\varphi}$  の成分に分解した作用素である。 $O(1)$  の擾乱の振幅  $A, B$  は、 $O(\epsilon)$  の擾乱に対する方程式の可解条件のために  $t_1 = \epsilon t$  の時間スケールで変化する。式 (46) と  $\mathbf{u}'_{10,m}$ , 式 (47) と  $\mathbf{u}'_{10,m+1}$  の内積を取ることにより振幅の時間変化が以下のように決まる

$$\frac{dA}{dt_1} = a_1 B, \quad \frac{dB}{dt_1} = b_1 A, \quad (48)$$

$$a_1 = \frac{\langle \mathbf{u}'_{10,m} | N_1^{-1} \mathbf{u}'_{10,m+1} \rangle}{\langle \mathbf{u}'_{10,m} | I_v \mathbf{u}'_{10,m} \rangle}, \quad (49)$$

$$b_1 = \frac{\langle \mathbf{u}'_{10,m+1} | N_1^{+1} \mathbf{u}'_{10,m} \rangle}{\langle \mathbf{u}'_{10,m+1} | I_v \mathbf{u}'_{10,m+1} \rangle}. \quad (50)$$

ただし、内積は  $\mathbf{u}_i = (u_i, v_i, w_i, p_i)$  と書くことにして

$$\langle \mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_2 \rangle \equiv \int_0^1 (\bar{u}_1 u_2 + \bar{v}_1 v_2 + \bar{w}_1 w_2 + \bar{p}_1 p_2) r \, dr \quad (51)$$

により定義する。

値の評価は (43) に対応する分散関係の交点

$$D(k_0, \omega_0, m) = D(k_0, \omega_0, m+1) = 0 \quad (52)$$

を基にして、 $\epsilon$  に関する展開によりおこなう。 $O(\epsilon)$  では渦輪の場合と同じ結果になる。

### 3.5 2 次の擾乱: 振りと回転の効果

$O(\epsilon^2)$  の擾乱の時間発展は以下ようになる

$$\begin{aligned} L_0(\omega, k - \epsilon m \alpha, m) \mathbf{u}'_{12,m} &= AN_1^{-1} \mathbf{u}'_{11,m+1} - \frac{dB}{dt_1} I_v \mathbf{u}'_{11,m} + AN_1^{+1} \mathbf{u}'_{11,m-1} \\ &\quad + BN_2^{-1} \mathbf{u}'_{10,m+1} - \frac{dA}{dt_2} I_v \mathbf{u}'_{10,m}, \end{aligned} \quad (53)$$

$$\begin{aligned} L_0(\omega, k - \epsilon(m+1)\alpha, m+1) \mathbf{u}'_{12,m+1} &= BN_1^{+1} \mathbf{u}'_{11,m} - \frac{dA}{dt_1} I_v \mathbf{u}'_{11,m+1} + BN_1^{-1} \mathbf{u}'_{11,m+2} \\ &\quad + AN_2^{+1} \mathbf{u}'_{10,m} - \frac{dB}{dt_2} I_v \mathbf{u}'_{10,m+1}. \end{aligned} \quad (54)$$

上の表現中、 $\mathbf{u}'_{11,m}$  と  $\mathbf{u}'_{11,m+1}$  はそれぞれ  $B, A$  で除して振幅依存性を取り除いてある。 $N_2^{\pm 1}$  は線形化 Euler 方程式 (28)–(31) の右辺の  $O(\epsilon^2)$  の項の中で  $e^{\pm i\varphi}$  の成分を取り出したものである ( $e^{\pm 2i\varphi}$  の項は曲率不安定性には影響しない)。1 次の場合と同様に振幅  $A, B$  が  $t_2 = \epsilon^2 t$  の時間スケールで変化する。上の式と  $\mathbf{u}'_{10,m}, \mathbf{u}'_{10,m+1}$  との内積をすることにより、振幅方程式に以下の項が加わる

$$\frac{dA}{dt} = (\epsilon a_1 + \epsilon^2 a_2) B + i\epsilon^2 c_2 A, \quad \frac{dB}{dt} = (\epsilon b_1 + \epsilon^2 b_2) A + i\epsilon^2 d_2 B \quad (55)$$

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{\langle \mathbf{u}'_{10,m} | N_2^{-1} \mathbf{u}'_{10,m+1} \rangle}{\langle \mathbf{u}'_{10,m} | I_v \mathbf{u}'_{10,m} \rangle} \\ ic_2 &= \frac{\langle \mathbf{u}'_{10,m} | N_1^{-1} \mathbf{u}'_{11,m+1} \rangle + \langle \mathbf{u}'_{10,m} | N_1^{+1} \mathbf{u}'_{11,m-1} \rangle - a_1 \langle \mathbf{u}'_{10,m} | I_v \mathbf{u}'_{11,m} \rangle}{\langle \mathbf{u}'_{10,m} | I_v \mathbf{u}'_{10,m} \rangle} \\ b_2 &= \frac{\langle \mathbf{u}'_{10,m+1} | N_2^{+1} \mathbf{u}'_{10,m} \rangle}{\langle \mathbf{u}'_{10,m+1} | I_v \mathbf{u}'_{10,m+1} \rangle} \\ id_2 &= \frac{\langle \mathbf{u}'_{10,m+1} | N_1^{+1} \mathbf{u}'_{11,m} \rangle + \langle \mathbf{u}'_{10,m+1} | N_1^{-1} \mathbf{u}'_{11,m+2} \rangle - b_1 \langle \mathbf{u}'_{10,m+1} | I_v \mathbf{u}'_{11,m+1} \rangle}{\langle \mathbf{u}'_{10,m+1} | I_v \mathbf{u}'_{10,m+1} \rangle} \end{aligned}$$

結局、不安定成長率は次の  $\sigma$  の実部で与えられる

$$\sigma = \epsilon (a_1 b_1)^{1/2} \left[ 1 + \frac{\epsilon}{2} \left( \frac{a_2}{a_1} + \frac{b_2}{b_1} \right) \right] + i\epsilon^2 \frac{c_2 + d_2}{2}. \quad (56)$$

係数  $c_2, d_2$  を求めるためには  $O(\epsilon)$  の解  $\mathbf{u}'_{11,m}, \mathbf{u}'_{11,m+1}$  を求めることが必要だが、これは  $\sigma$  の虚部のみに寄与し、実部のみを評価する際には必要でない。したがって、擾乱の解としては  $O(1)$  の Kelvin 波の情報のみで十分である。ただ、 $\epsilon$  展開の形で成長率を評価するためには、 $\omega, k$  の  $\epsilon$  依存性を考慮し、対応する分散関係の交点 (52) を基に行列  $N_1$  や  $\mathbf{u}_{10,m}$  などに含まれる  $\epsilon$  依存性を展開して取り出す必要がある。

### 3.6 不安定成長率に対する振りの効果と短波長極限

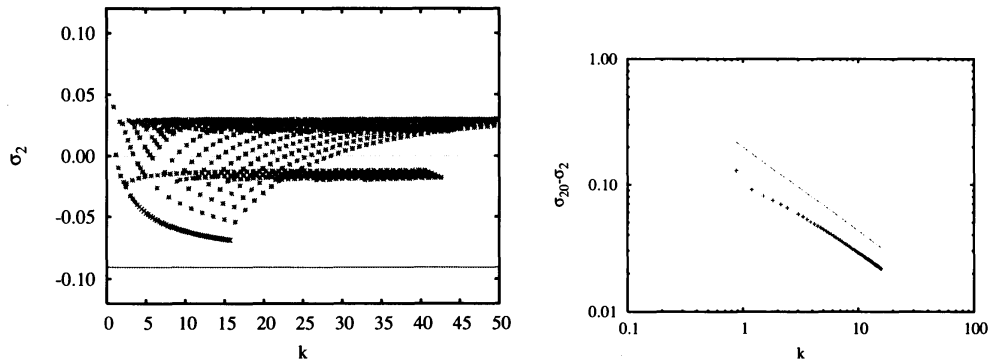


Figure 2: Torsion effects on growth rates.

Fig. 2 の左図は不安定成長率の  $O(\epsilon^2)$  の項を  $\alpha = 1, \gamma = 0$  の場合に求めたもの (つまり、振りの効果による不安定成長率の修正) である。曲率不安定となる交点の中で、2 個の波の  $r$  方向の節の数が一致するもの (principal mode) のみを選んでいく。  $m$  は 0 から 50 までとした。実線は短波長安定性解析による短波長の極限の値  $-\frac{3\sqrt{15}}{128}$  [6] を示す。これにゆっくり近づくように見える点列がある。実際、  $m \sim k \rightarrow \infty$  の極限での漸近形

$$\eta_1 = m - \frac{a_1}{2^{1/3}} m^{1/3} + \frac{1}{4} + O(m^{-1/3}) \quad (57)$$

$$\eta_2 = m + 1 - \frac{a_1}{2^{1/3}} m^{1/3} - \frac{1}{4} + O(m^{-1/3}) \quad (58)$$

$$k \sim \frac{m}{\sqrt{15}} \quad (59)$$

$$J_m(\eta_1) \sim -\frac{2^{2/3}}{m^{2/3}} \frac{\text{Ai}'(a_1)}{4} = -2^{-4/3} m^{-2/3} \text{Ai}'(a_1) \quad (60)$$

$$J'_m(\eta_1) \sim -2^{-2/3} m^{-2/3} \text{Ai}'(a_1) \quad (61)$$

$$J''_m(\eta_1) \sim -2^{-2/3} m^{-4/3} a_1 \text{Ai}'(a_1) \quad (62)$$

$$u_m \sim -i \frac{2m}{r} J_m(\eta r) \quad (63)$$

$$v_m \sim \frac{m(m-\omega)}{r} J_m(\eta r) \quad (64)$$

$$w_m \sim \frac{15}{2} k J_m(\eta r) \quad (65)$$

$$p_m \sim \frac{15}{4} J_m(\eta r) \quad (66)$$

(Ai は Airy 関数) を用いると、(56) の  $O(c^2)$  の項が極限值に収束することが示される。収束の速さは Fig. 2 の右図に示すように  $m^{-2/3}$  の程度である。

## 4 おわりに

ノーマルモード安定性解析によりらせん渦の曲率不安定性に対する振りの効果を調べた。不安定成長率の内積による表式を求め、 $O(\epsilon)$  である成長率に対し  $O(\epsilon^2)$  の修正として振りの効果があらわれることを明らかにした。実際に principal mode についてこの値を評価し、短波長極限で短波長安定性解析の結果と一致することを確かめた。

今回のらせん渦は  $O(1)$  で中心らせん軸に沿う流れ (軸流) はないと仮定した。しかし、回転翼端渦など応用の場面であられるらせん渦には一般に軸流が存在する。今後の研究で軸流の効果を明らかにしていきたい。

本研究は科研費 20540379 の援助を受けた。

## References

- [1] R. Betchov, "On the curvature and torsion of an isolated vortex filament," J. Fluid Mech. **22**, 471-479 (1965).
- [2] S. E. Widnall, "The stability of a helical vortex filament," J. Fluid Mech. **54**, 641-663 (1972).
- [3] S. Kida, "Stability of a Steady Vortex Filament," J. Phys. Soc. Japan **51**, 1655-1662 (1981).
- [4] V. L. Okulov, "On the stability of multiple helical vortices," J. Fluid Mech. **521**, 319-342 (2004).
- [5] V. L. Okulov and J. N. Sørensen, "Stability of helical tip vortices in a rotor far wake," J. Fluid Mech. **576**, 1-25 (2007).
- [6] Y. Hattori and Y. Fukumoto, "Short-wavelength stability analysis of a helical vortex tube," Phys. Fluids **21**, 014104 (2009).
- [7] Y. Fukumoto and V. L. Okulov, "The velocity field induced by a helical vortex tube," Phys. Fluids **17**, 107101 (2005).

- [8] P. A. Kuibin and V. L. Okulov, "Self-induced motion and asymptotic expansion of the velocity field in the vicinity of a helical vortex filament," *Phys. Fluids* **10**, 607-614 (1998).
- [9] J. Boersma and D. H. Wood, "On the self-induced motion of a helical vortex," *J. Fluid Mech.* **384**, 263-280 (1999).
- [10] Y. Fukumoto and Y. Hattori, "Curvature instability of a vortex ring," *J. Fluid Mech.* **526**, 77-115 (2005).