

The additivity of the clasp singularities

神大 理 森元勘治 (Kanji Morimoto)

§0 Introduction

S^3 内の tame knot k に対していろいろな numerical invariants が定義されており、(c.f. [1] [5] [7] [8] [9] [10])、それらの不変量と knots の connected sum との関係を調べることは重要な問題と言えよう。たとえば knot の genus 及び、bridge index -1 は、加法性を持つことが知られている (c.f. [5] [7] [8])。また、最近 [6] において、M. G. Scharlemann により、unknotting number one knots は prime であることが示された。さて、本稿において我々は clasp number の加法性について考察する。clasp number の加法性は一般にはまだ不明であるが、部分的結果として、次の定理を得た。(clasp number $c(k)$ の定義は後ほど与える)。

定理 k_1, k_2 を二つの non-trivial knots とする。このとき、 $c(k_1 * k_2) = 2$ ならば $c(k_1) = c(k_2) = 1$ である。

ここで、 $k_1 * k_2$ は k_1 と k_2 の connected sum である。

この定理と後述の命題を合わせて、次の系を得る。

系 k_1, k_2 を二つの knots とする。このとき、 $c(k_1 * k_2) \leq 2$ ならば $c(k_1 * k_2) = c(k_1) + c(k_2)$ である。

本稿の議論は P.L. Category で行う。 $cl(\cdot)$, $Int(\cdot)$, $d(\cdot)$ は、それぞれ、closure, interior boundary を示す。集合 A の濃度を $|A|$ で示す。

§ 1 Intersections of a clasp disk and a 2-sphere

k を S^3 内の tame knot, B を 2-disk とすれば、以下の如き immersion f が存在することはよく知られている (c.f. [3] [10] [11])。

$f: B \rightarrow S^3$ s.t. $f|_{\partial B}: \partial B \rightarrow k$ は同相写像 かつ $f^{-1}(\tilde{\Sigma})$ の各 component は、 ∂B の点と $Int B$ の点を結ぶ arc。ここで、 $\tilde{\Sigma} = \{x \in f(B) \mid |f^{-1}(x)| \geq 2\}$ 。

このとき、 $D=f(B)$ を k の a clasp disk と呼ぶ。

$C_0(k) = |\{\text{components of } \widehat{\Sigma}\}|$ とおき、 $c(k) = \min_0 \{C_0(k)\}$ とおく。 $c(k)$ を k の the clasp number と呼ぶ。 $c(k)$ の定義から、 $u(k) \leq c(k)$ 及び $g(k) \leq c(k)$ である。ここで $u(k), g(k)$ は the unknotting number of k 及び the genus of k である。

$D=f(B)$ を $C_0(k)=c(k)$ となる k の clasp disk とする。 $\Sigma=f^{-1}(\widehat{\Sigma})$, $\Sigma=\sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \dots \cup \sigma_{2c(k)}$ とおく。ここで σ_i は Σ の component である ($i=1, 2, \dots, 2c(k)$)。さらに、 $\partial\sigma_i \cap \text{Int} B = \{x_i\}$, $\partial\sigma_i \cap \partial B = \{y_i\}$, $X = \bigcup_{i=1}^{2c(k)} \{x_i\}$ and $Y = \bigcup_{i=1}^{2c(k)} \{y_i\}$ とおく。

今、 k を non-prime knot とし、 S を k の non-trivial connected sum を与える 2-sphere とする (以下 connected sum と言えは、非自明なものだけを意味する)。

S と D は横断的に交わるとしてよいから、 $\widehat{T} = S \cap D$ $T=f^{-1}(\widehat{T})$ とおけば、 T は一本の properly embedded arc in B といくつかの simple loops in $\text{Int} B$ からなる。

補題 上の状況において、 k の connected sum を与え、以下の条件 (1)~(3) を満たす 2-sphere が存在する。

(1) α を T の subarc で $\text{Int}\alpha \cap \Sigma = \emptyset$ and $\partial\alpha \subset \Sigma$ とすれば、 $\partial\alpha$ は Σ の一つの component に含まれない。

(2) α を T の subarc で $\text{Int}\alpha \cap \Sigma = \emptyset$ and $\partial\alpha = \{P, Q\}$ where $P \in \partial B$ and $Q \in \sigma_i \subset \Sigma$ とする。 β を σ_i の subarc で、 $\partial\beta = \{Q, x_i\}$ とする。 B_1, B_2 を $\alpha \cup \beta$ によって分離される B 内の二つの disks とする。このとき、 $B_1 \cap (\Sigma - \sigma_i) \neq \emptyset$ and $B_2 \cap (\Sigma - \sigma_i) \neq \emptyset$ である。

(3) α を T の loop component、 B' を α に bound される B 内の disk とすれば、 $|B' \cap X| \geq 2$ である。

証明

(1) $\partial\alpha$ が Σ の一つの component σ_i に含まれるとすれば、 σ_i の subarc と T の subarc による二辺形が存在し、 isotopy で交わりをはずすことができる。

(2) $B_1 \cap (\Sigma - \sigma_i) = \emptyset$ とする。 $B_1 \cap \{x_i\} = \emptyset$ ならば、 $f(B_1)$ に沿った isotopy で交わりをはずすことができる。 $B_1 \cap \{x_i\} \neq \emptyset$ ならば、 (1) における二辺形が存在するか、または、上の disk B_1 と同じ条件 (i.e. $B_1 \cap \{x_i\} = \emptyset$) を満たす disk が存在し、交わりをはずすことができる。

(3) β を B' 内の innermost loop とし、 B^* を β によって張られる disk とする。 $D^* = f(B^*)$ は S^3 内の disk で $D^* \cap S = \partial D^*$ 故、 E_1, E_2 を ∂D^* によって分離される S

内の二つの disks とし、 $S_i = E_i \cup D^*$ ($i=1,2$) とおく。さらに B_i を S_i に張られる S^3 内の 3-ball で $B_1 \cap B_2 = D^*$ を満たすものとする。さて、 $|B^* \cap X| = 0$ のとき、 $B_i \cap k = \emptyset$ としてよい故、 S_2 を少し B_2 内に押し込むことにより、交わりをはずすことができる。 $|B^* \cap X| = 1$ のとき、 $D^* \cap k$ は 1 点故 $(B_i, B_i \cap k)$ は 1-string tangle ($i=1,2$)。 S は k の connected sum を与える故、 $(B_i, B_i \cap k)$ は unknotted tangle ではないとしてよい (c.f. [4])。よって S_1 を少し B_1 内に押し込むことにより、交わりをはずすことができる。

§2 Proof of Theorem

次の命題は 補題から直接に示されるが、[6]の結果、又は genus の加法性からの系でもある。

命題 $c(k) = 1$ ならば k は prime knot である。

注意。 $c(k) = 1$ であるための必要十分条件は、 k が doubled knot となることである。(c.f. Ch IV of [5])。

さて、定理の証明である。 $k = k_1 * k_2$ とおく。以下の証明

において、記号は §1 と同じ記号 $S, D=f(B), \Sigma, \tilde{\Sigma}, T, \tilde{T}, X, Y$ を使う。また、 S は補題の条件を満たしているものとする。 m を T の arc component とし、 B_1, B_2 を m によって分離される B 内の二つの disks とする。さらに $\ell_1 = B_1 \cap \partial B$, $\ell_2 = B_2 \cap \partial B$ とおく。

主張1 $|B_1 \cap X| = |B_2 \cap X| = 2$

補題より $|B_1 \cap X| \neq 0$ and $|B_2 \cap X| \neq 0$ 。 $|B_1 \cap X| = 1$ とする。

$B_1 \cap X = \{x_i\}$ and $f(g_i) = f(g_j)$ とする。補題より B_1 は T の loop component を含まないから、 y_j と x_i を結ぶ B 上の arc γ で $f(\gamma)$ が S と横断的に 1 点で交わる simple loop となるものが存在し、矛盾。よって主張が示された。

主張2 T は loop component を持たない。

B_1 が T の loop component を含むとする。補題と主張1より outermost loop が存在し、 n とする。 A を $\partial B_1 \times n$ にはさまれた B_1 内の annulus とし、 $\Sigma' = \{x \in A \mid |q^{-1}(q(x))| \geq 2\}$ とする。ここで $q = f|_A$ である。しからば、 $q: A \rightarrow S^3$ は immersion で $q(A) \cap S = q(\partial A) \cap S = q(n \cup m)$ である。さらに Σ' の各 component は ∂A の異なる components を結ぶ arcs である。ここで、用語を二つ準備する。 r_1, r_2 を Σ' の components で $q(r_1) = q(r_2)$ とする。 A' を $r_1 \cup r_2$ によって切りとられる A 内の disk で $A' \cap \ell_1 = \emptyset$ とする。

このとき $g(A')$ を取りのぞくことにより、新しい immersion
 $g^*: A^* \rightarrow S^3$ s.t. A^* is an annulus $g^*(A^*) \cap S = g^*(\partial(A^* - l^*))$
 ここで l^* is a subarc with $g^*(l^*) = g(l_1)$ 。この操作を、
 a double curve surgery of type I と呼ぶ。次に、 r_i, s_i を
 $(i=1,2)$ Σ' の components で $g(r_1)=g(r_2)$, $g(s_1)=g(s_2)$ かつ
 $r_i \cup s_i$ に切りとられる A 内の disk で $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ かつ
 $A_i \cap l_1 = \emptyset$ を満たすものが存在するものとする。このとき
 $g(A_1)$ と $g(A_2)$ を入れかえることにより、新しい immersion
 $g^*: A^* \rightarrow S^3$ を得る。この操作を a double curve surgery
 of type II と呼ぶ。“double curve surgery” という用語につ
 いては [2] の Ch IV を参照されたい。さて、主張 2 の証明で
 あるが、type I の surgeries をくり返すことにより、

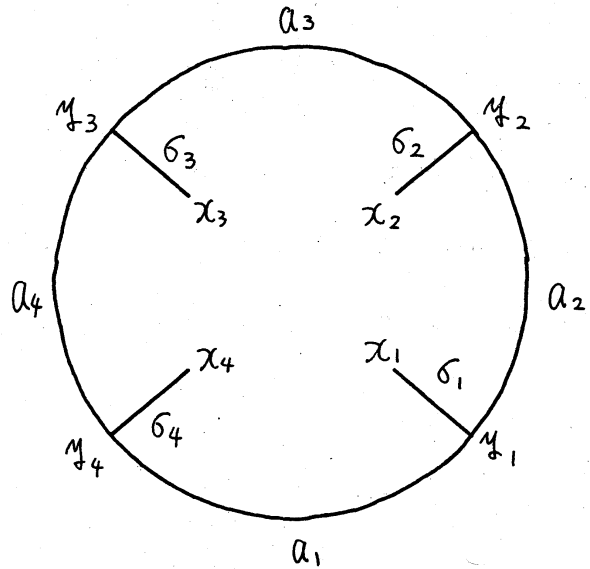
embedding $g^*: A^* \rightarrow S^3$ s.t. A^* is an annulus, $g^*(A^*) \cap S =$
 $g^*(\partial(A^* - l^*))$, where l^* is a subarc of ∂A^* with $g(l^*)$
 $= g(l_1)$ を得る。このとき、 $g(l_1)$ が isotopy で S に押し
 付けられることがすぐわかり矛盾。主張 2 が示された。

主張 3 $|l_1 \cap Y| = |l_2 \cap Y| = 2$

主張 2 に注意すれば、主張 1 と同様の議論で示される。

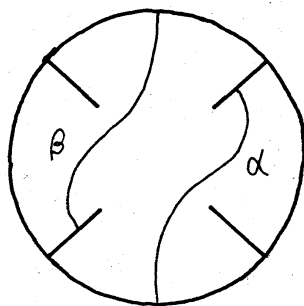
さて、 $\Sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \sigma_3 \cup \sigma_4$, $\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4\}$ によ、て区切
 られる ∂B 上の arcs を a_1, a_2, a_3, a_4 とおく。これらの順
 序は図 1 の通りである。主張 2 より $T=m$ である。 $\partial m = \{P_0, Q_0\}$

とおく。主張より $P_0 \in a_1, Q_0 \in a_3$ としてよい。

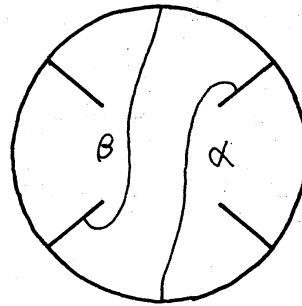


$m \cap \Sigma = \emptyset$ のとき、 k は二つの clasp number one knots の connected sum であり、命題より、knots の prime decomposition の uniqueness から (c.f. [7]) $c(k_1) = c(k_2) = 1$ を得る。

$m \cap \Sigma \neq \emptyset$ とする。 α, β を m の subarcs で $\text{Int} \alpha \cap \Sigma = \text{Int} \beta \cap \Sigma = \emptyset$, $\partial \alpha = \{P_0, P_1\}$, $\partial \beta = \{Q_0, Q_1\}$, $P_1 \in \Sigma$, $Q_1 \in \Sigma$ とする。しからば、 $P_1 \in \sigma_2, Q_1 \in \sigma_4$ としてよい。 α, β に関して、図2の三つの場合がある。



Case A



Case B

図2

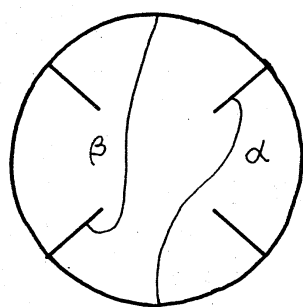


図 2

Case C

Case C のとき。 $|m \cap \delta_4| > |m \cap \delta_i|$ ($i=1,2,3$) となり矛盾。

よって Case C は起らない。

Case A のとき。 $|m \cap \delta_2| > |m \cap \delta_1|$, $|m \cap \delta_4| > |m \cap \delta_3|$ より $f(\delta_1) = f(\delta_3)$, $f(\delta_2) = f(\delta_4)$ である。故に $|m \cap \delta_i|$ is odd ($i=1,2,3,4$) である。 l を ∂B の subarc で $\partial l = \partial m$ かつ $\{y_1, y_2\} \subset l$ とし、 B' を $l \cup m$ によって張られる B 内の disk とする。 $|m \cap \delta_i|$ is odd より $B' \cap X = \{x_3, x_4\}$ である。 $\Sigma' = \Sigma \cap B'$ とおき、 $i=1,2$ に対して、 μ_i を Σ' の component で、 δ_i の subarc かつ $\mu_i \cap l \neq \emptyset$ とする。 また、 ν_i を Σ' の component で、 $\nu_i \cap X \neq \emptyset$ かつ、 ν_1 (ν_2) は、 μ_1 (μ_2) によって分離される B' 内の disk で μ_2 (μ_1) を含まないものに含まれるとする。 $s_1, \dots, s_p$, $r_1, \dots, r_q$ を図 3 の如き Σ' の components とする。

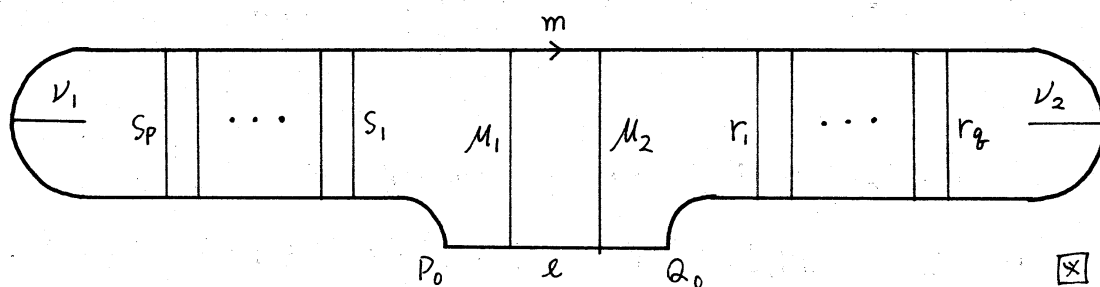


図 3

m に P_0 を始点 Q_0 を終点とする向きを入れ、 $m \cap \Sigma' = \{z_1, z_2, \dots, z_{2(p+q+2)}\}$ とおく。ここで z_i は m の向きに沿った $m \cap \Sigma'$ の i -番目の点である。このとき図2から、 $z_i \in \sigma_4$ ならば i is even。 $z_i \in \sigma_3$ ならば i is odd。である。 $g = f|_{B'}$ とおく。以下で double curve surgeries を用いて g の singularities を取り除いて行くが、新しい immersion に対しても同じ記号 g と B' を用いる。

Case A-1 $g(\mu_1) = g(\nu_1)$ のとき。

$\nu_1 \subset \sigma_3$ 故 $z_{p+1} \in \sigma_3$ 即ち p is even。まず、type I の surgeries を用いて $g(s_i) \neq g(s_j)$ ($1 \leq i < j \leq p$), $g(r_i) \neq g(r_j)$ ($1 \leq i < j \leq q$) とできる。このとき $p = q$ である。しからば S 上の loops に注意して、type II の surgeries を用いて $p = q = 0$ にできる。(1回の surgeries で減少する singularities の数は偶数であることに注意せよ)。

Case A-2 $g(\mu_1) = g(\nu_2)$ のとき。

$\nu_1 \subset \sigma_4$ 故 $z_{p+1} \in \sigma_4$ 即ち p is odd。よって Case A-1 の議論を用いて $p = q = 1$ $g(\mu_1) = g(\nu_2)$ となる。よって もう一度 surgery を行って、 $p = q = 0$, $g(\mu_1) = g(\nu_2)$ を得る。

さて、我々は以上で、immersion $g: B' \rightarrow S^3$ s.t.

$$\partial B' = m \cup \ell, \quad g(\ell) = f(\ell), \quad g(B') \cap S = g(m), \quad p = q = 0$$

and $g(M_i) = g(V_i)$ ($i=1,2$) を得た。

この immersion に注目すれば、 S が k の connected sum を与えないことがわかる。故に Case A は生じない。

全く同様の議論を用いて Case B は生じないことがわかる。

これで定理は証明された。

References

- [1] R.H.Fox : A quick trip through knot theory , Topology of 3-manifolds and related topics , Prentice - Hall , Englewood Clifts , N.J. , 1962 , 120 - 167.
- [2] J.Hempel : 3-manifolds , Ann. of Math. Studies 86 Princeton N.J. Princeton University Press 1976.
- [3] Y.Nakagawa : Elementary disks and their equivalences , Quart. J. Math. Oxford (2) , 27 (1976) , 355 - 369.
- [4] Y.Nakanishi : Primeness of links , Math. Sem. Notes Kobe University , 9 (1981) , 415 - 440.
- [5] D.Rolfsen : Knots and links , Mathematics Lecture Series 7 , Publish or Perish Inc. , Berkeley , Ca. 1976.
- [6] M.G.Scharlemann : Unknotting number one knots are prime , Preprint.
- [7] H.Schubert : Die eindeutige zerlegbarkeit eines knotens in primknoten , Sitzungsber. Akad. Wiss. Heidelberg , math - nat. Kl. , 3. Abh. (1949).
- [8] H.Schubert : Über eine numerish knoteninvariante , Math. Zeitschr. Bd. 61 , S. 245 - 288 (1954).
- [9] H.Seifert : Über das Geschlecht von knoten , Math. Ann. 110 (1935) , 571 - 592.
- [10] T.Shibuya : Some relations among various numerical invariants for links , Osaka J. Math. 11 (1974) 315 - 322.
- [11] N.Smythe : Handlebodies in 3-manifolds , Proc. Amer. Math. Soc. 26 (1970) . 534 - 538.