

リバーシブル系に現れる対称ホモクリニック軌道の計算機援用証明

広島大学理学研究科 平岡 裕章 (Yasuaki Hiraoka)

Graduate School of Science, Hiroshima University

Email: hiraok@hiroshima-u.ac.jp

1 序

本論文ではリバーシブルな連続力学系に現れる対称ホモクリニック軌道の存在証明に対する新しい精度保証付き数値計算法を提案する. 考察する問題設定はリバーシブルな連続力学系 (リバーシブル性については後述)

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x \in \mathbf{R}^N \quad (1)$$

が双曲型平衡点を原点 O に持つとする. ここでベクトル場 f は滑らかであるとしよう. この設定で原点 O を結ぶ近似ホモクリニック数値解

$$\{(\xi^i, t_i) \mid \xi^i \in \mathbf{R}^N, t_i \in \mathbf{R}, i = 0, 1, \dots, K\} \quad (2)$$

が与えられている状況を考える. このとき, 近似ホモクリニック数値解 (2) の近傍に力学系 (1) の真のホモクリニック軌道が存在するか否かを厳密に調べる精度保証付き数値計算法を提案する事が本稿の目的である.

特にここでの議論ではリバーシブル性を課しているが, この仮定は取り除くことも可能で, 分岐として取り扱うことが必要な一般のヘテロクリニック軌道への拡張も考えられる. またここでの方法は exponential dichotomy 性を用いたメルニコフ積分の厳密計算を基にしていることから, 反応拡散系に現れる進行波解の安定性解析 (エバンス関数) への応用も期待される. このような本手法の一般化や応用に関する議論, 及びその他の先行研究との比較については 4 節で扱うことにする.

2 アルゴリズム

本手法のアルゴリズムは次の手順から構成される:

- 手順 1. 近似解の構成
- 手順 2. 基本行列解の包み込み
- 手順 3. 安定多様体の構成
- 手順 4. 初期値の解析

まず始めに相空間上で離散的な点の集合として与えられている近似ホモクリニック数値解 (2) を用いて, $\mathbf{R}$ 上で定義される近似解 $w: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^N$ を構成する (手順 1). 次にこの近似解 $w(t)$ に対する (1) の変分方程式を考え, ある重要な性質を満たす基本行列解を構成する (手順 2). この基本行列解を用いて $w(t)$ の近傍で原点に収束する真の解を構成し, 原点の安定多様体の特徴づける (手順 3). 最後に手順 3 で構成された安定多様体と

原点の不安定多様体との交わりを調べることでホモクリニック軌道の存在を主張するのである。以上がアルゴリズムの概要である。ここでリバーシブル性を積極的に用いる箇所は手順4であるが、この点については2.4節で解説する。

ここで力学系(1)に対する仮定を述べておく。

- 仮定1 (S -リバーシブル性): $N=2n$ とし, $S^2 = I_{2n}$ なるある線形写像 $S: \mathbf{R}^{2n} \rightarrow \mathbf{R}^{2n}$ に関して $f(Sx) = -Sf(x)$ を満たす。ここで I_{2n} は $\mathbf{R}^{2n}$ 上の恒等写像とする。
- 仮定2 (原点の固有値): $\{\pm\lambda_i \mid i = 1, \dots, n, \operatorname{Re}\lambda_i > 0, \lambda_1 < \operatorname{Re}\lambda_j (j \geq 2)\}$ 。

リバーシブル系の性質から λ が固有値なら $-\lambda$ も固有値であることが従うため、仮定2は $0 < \lambda_1 \in \mathbf{R}$ かつ $\lambda_1 < \operatorname{Re}\lambda_i, i = 2, \dots, n$, を課すものである。また本稿では対称ホモクリニック軌道 (すなわち $x(-t) = Sx(t)$ を満たすホモクリニック軌道 $x(t)$) を扱う事から、近似ホモクリニック数値解(2)としては S に関して対称な

$$\{(\xi^i, t_i) \mid i = 0, \pm 1, \dots, \pm K, \xi^{-i} = S\xi^i, t_{-i} = -t_i, \xi^{\pm K} \approx 0\} \quad (3)$$

となるものを用意しておく。ここで ξ^0 は S -不変部分空間 $\operatorname{Fix}(S) := \{x \in \mathbf{R}^{2n} \mid Sx = x\}$ の元として選んでいることに注意しておく (図1参照)。本節ではこれらの準備の下に各手順

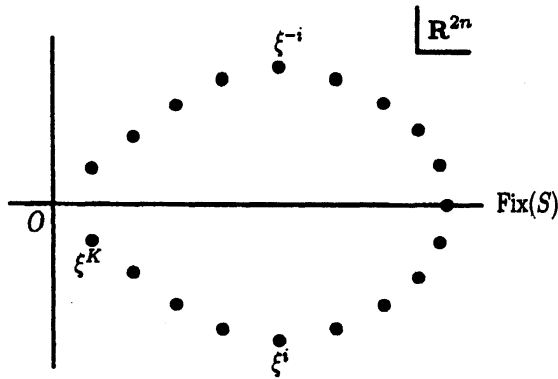


図1: 近似数値解

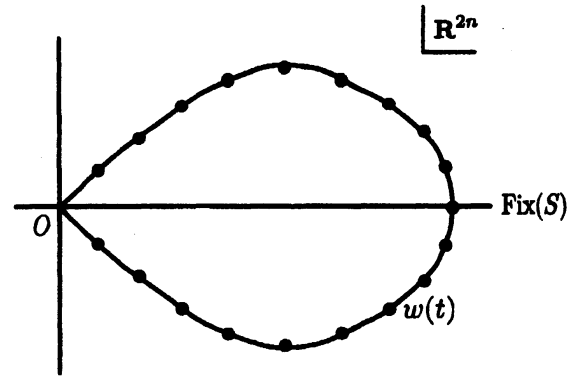


図2: 近似解 $w(t)$

の詳細を解説していく。

2.1 手順1：近似解の構成

このステップでは離散的に与えられている近似ホモクリニック数値解(3)を用いて、連続曲線: $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^{2n}$ で与えられる近似解を構成していく。基本的には次のように近似解 $w(t) \in \mathbf{R}^{2n}, t \in \mathbf{R}$ を構成する (図2参照):

- $w(t_i) = \xi^i$
- 各区間 $[t_i, t_{i+1}]$ では多項式補間
- $w(t) = \xi^K e^{-\lambda_1(t-t_K)}, t \geq t_K$
- $w(t) = Sw(-t), t \leq 0$

つまり有限時刻 $t \in [0, t_K]$ の間は各区間 $[t_i, t_{i+1}]$ ごとに多項式補間を行い、漸近部分 $t \geq t_K$ では固有値 λ_1 のオーダーで指数的に原点へ収束するように設定しておく。ちなみに、本

稿では対称ホモクリニック軌道を扱うため本質的には $t \leq 0$ での近似解を用意する必要は無いが念のため記載しておいた。

実際の構成にあたっては、補間多項式の次数に応じて付加的な情報を $w(t)$ に載せることが可能である。例えば各端点 $t = t_i$ での（高階）微分の値を用いて補間多項式の係数を決定出来るが、これらの微分の情報は手順3で導入する作用素が縮小的になるような形で与えることになる。これに関しては2.3節で改めて議論を行う。

2.2 手順2：基本行列解の包み込み

近似解 $w(t)$ に対する (1) の変分方程式

$$\dot{x} = A(t)x, \quad A(t) = f_x(w(t)) \quad (4)$$

を考え、その基本行列解を $X(t)$ で表すことにする。このとき (4) に関して次の性質を示すことができる ([1][5] を参照)。

補題 1 変分方程式 (4) は $\mathbf{R}_+ = [0, \infty)$ 上で射影行列

$$P = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

に関して exponential dichotomy 性を持つ。すなわち正定数 M, α が存在して

$$\begin{aligned} |X(t)PX(s)^{-1}| &\leq Me^{-\alpha(t-s)}, & 0 \leq s \leq t < \infty, \\ |X(t)(I-P)X(s)^{-1}| &\leq Me^{-\alpha(s-t)}, & 0 \leq t \leq s < \infty \end{aligned}$$

を満たす。

そこで手順2では、論文 [5] で与えられている補題1の証明法を参考にして、上記の性質を満たす基本行列解 $X(t)$ の包み込みを行うことにする。まず $A(t)$ の漸近挙動から、次の性質

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_i(t) e^{-\lambda_i(t-t_K)} = p_i \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_{-i}(t) e^{\lambda_i(t-t_K)} = Sp_i \quad (5)$$

を満たす基本解 $\varphi_i(t), i = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$, が存在することがわかる ([1] を参照)。ここで p_i は固有値 λ_i に対応する固有ベクトルであり、リバーシブル性から Sp_i が固有値 $-\lambda_i$ に対応する固有ベクトルとなることに注意しておく。このような漸近的振る舞いをする基本解を用いて基本行列解を $X(t) = [\varphi_{-1}(t) \cdots \varphi_{-n}(t) \varphi_1(t) \cdots \varphi_n(t)]$ で定めると、この $X(t)$ が補題1の性質を満たすことは簡単な計算から導かれる。そこで具体的な $\varphi_i(t), i = \pm 1, \dots, \pm n$, の包み込みの方法であるが、ここでは漸近部分 $t \geq t_K$ と有限区間 $t \in [0, t_K]$ に分けて構成していく。

まず始めに時刻 $t \geq t_K$ において (5) を満たす基本解を逐次近似列から具体的に構成していく。すなわち各固有ベクトル p_i, Sp_i から始まる (4) の逐次近似列を [1] の 3.8 節における議論を用いて具体的に計算するわけである。ここで各固有ベクトルから構成される逐次近似列の収束関数が存在しそれが (4) の解であり、更に (5) を満たすことは、[1] と同様の議論を用いることで示される。またここでの議論より、有限回の反復で得られる逐次近

似解と収束関数との誤差評価を具体的に与えることも可能である。これにより時刻 $t \geq t_K$ 上で (4) の基本解を逐次近似解を用いて包み込むことが可能となる。

次にここで得られた基本解の包み込みを用いて有限区間 $[0, t_K]$ 上での包み込みを行う。ここでは常微分方程式の初期値問題を扱う精度保証付き数値計算である Lohner 法 (例えば [6] を参照) を用いる。つまり前段階で求めた基本解の包み込みの $t = t_K$ での包み込みを初期値の集合として (4) を $t = 0$ まで負の時間方向に解いていくわけである。これにより (5) を満たす基本解の包み込みが $\mathbf{R}_+$ で完成し、補題 1 の性質を持つ基本行列解 $X(t)$ の包み込みが得られる。

2.3 手順 3 : 安定多様体の構成

次に手順 2 で考察した基本行列解 $X(t)$ を用いて、時刻 $t \rightarrow \infty$ で原点に収束する (1) の解を追跡する。つまり原点の安定多様体の特徴付けをここで行う。その為に新しい変数 $v := x - w$ を導入し、 v を用いて力学系 (1) を書き直すと次が得られる。

$$\begin{aligned}\dot{v} &= A(t)v + g(t, v) \\ g(t, v) &:= -\dot{w}(t) + f(w(t) + v) - A(t)v.\end{aligned}\quad (6)$$

平衡点の双曲性と $w(t)$ の漸近的振る舞いより、十分小さい ϵ に対して $\sup_{t \in \mathbf{R}_+} |v(t)| < \epsilon$ となる (6) の解から構成される $x(t)$ は原点の安定多様体上にあることに注意する。

$\mathbf{R}_+$ 上で連続かつ有界な関数の集合を $B(\mathbf{R}_+)$ で表すことにする。この集合はノルム $\|v\| := \sup_{t \in \mathbf{R}_+} |v(t)|$ の下でバナッハ空間となる。このとき exponential dichotomy 性を用いることで次が示される [5]。

補題 2 $B(\mathbf{R}_+)$ 上では (6) と

$$v(t) = X(t)P \left\{ X(0)^{-1}v(0) + \int_0^t X(s)^{-1}g(s, v)ds \right\} - \int_t^\infty X(t)(I - P)X(s)^{-1}g(s, v)ds \quad (7)$$

は同値。

(補題の証明) 定数変化法を用いて (6) を積分方程式に変形し exponential dichotomy 性を用いることで (6) から (7) が導かれる。逆は (7) を直接微分することで (6) が得られることからわかる。

そこで $B(\mathbf{R}_+)$ 上で $\eta \in \mathbf{R}^{2n}$ に依存した次の作用素

$$(T_\eta(v))(t) := X(t)P \left\{ X(0)^{-1}\eta + \int_0^t X(s)^{-1}g(s, v)ds \right\} - \int_t^\infty X(t)(I - P)X(s)^{-1}g(s, v)ds \quad (8)$$

を定義する。定義より $T_\eta(v) = v$ なる不動点は (6) の解となることに注意する。ここで η は初期値をコントロールするパラメーターとして働く。また exponential dichotomy 性より $T_\eta : B(\mathbf{R}_+) \rightarrow B(\mathbf{R}_+)$ となることも示される。

さて $B(\mathbf{R}_+)$ の半径 M の閉球を $B_M(\mathbf{R}_+) := \{v \in B(\mathbf{R}_+) \mid \|v\| \leq M\}$ で表すものとする。このとき論文 [11] と同様の縮小写像に関する議論を用いることで、原点に収束する (1) の解の追跡について以下の検証条件が得られる。

命題 3 $\|T_\eta(0)\| \leq Y$, $\sup_{w_1, w_2 \in B_\epsilon(\mathbf{R}_+)} \|T'_\eta(w_1)w_2\| \leq Z$ なる正定数 Y, Z が $Y + Z < \epsilon$ を満たすならば, $B_{Y+Z}(\mathbf{R}_+)$ 内に T_η の不動点 v_η が一意に存在する.

この命題により作用素 T_η の不動点の存在を調べる事が可能になるわけであるが, 検証条件に現れる正定数 Y, Z は ϵ, η を与えるごとに直接計算可能である点に注意しておく. これらの定数の計算では (8) やその v に関する微分の評価を行う必要があるが, exponential dichotomy 性を満たす基本行列解 $X(t)$ の包み込みが手順 2 で得られている事と $w(t)$ の構成法から具体的に計算可能となる. つまり有限区間 $[0, t_K]$ 上では精度保証付き数値計算を用い, $[t_K, \infty)$ 上では手順 1, 2 で構成したそれぞれの漸近形を用いて評価を行うわけである.

また, ある部分集合 $D \subset \mathbf{R}^{2n}$ 内の任意の $\eta \in D$ について命題の条件を満たす正定数 Y, Z, ϵ が存在するならば, $w(0)$ 近傍における原点の安定多様体が η をパラメーターとして $w(0) + v_\eta(0), \eta \in D$, によって記述されることに注意する. そこで実際の数値検証では, 区間の直積として与えられる D に対して命題の検証条件を調べ, 安定多様体を構成していくことになる.

さて, 手順 4 へ進む前に作用素 (8) の縮小写像性と近似解 $w(t)$ の関係についてまとめておく. 作用素 (8) は現時点ではニュートン化などの処方をしていない為 (これは今後の課題である), 一般には Y, Z は小さくならず縮小写像となることは期待できない. まして基本行列解 $X(t)$ は $t \geq t_K$ で exponential dichotomy 性を持つように構成しているため, $0 \leq t \ll t_K$ では指数的に大きくなる列ベクトル成分 (基本解に対応) が出てくることも考えられる. そこでここでは $g(t, v)$ やその v に関する微分を小さくすることで写像を縮小的にする試みについて紹介する.

ではまず始めに Y を小さく抑える為の方法について考えてみる. Y は

$$(T_\eta(0))(t) = X(t)P \left\{ X(0)^{-1}\eta + \int_0^t X(s)^{-1}g(s, 0)ds \right\} - \int_t^\infty X(t)(I - P)X(s)^{-1}g(s, 0)ds$$

の上からの評価で与えられるので, $g(t, 0)$ が小さく抑えられていれば Y も小さくする事は可能である. ここで $g(t, 0)$ は (6) から

$$g(t, 0) = f(w(t)) - \dot{w}(t) \quad (9)$$

によって与えられている. 命題 3 の後にも述べたように, 区間 $[0, t_K]$ 上では精度保証付き数値計算を用いて Y を計算する. 特に積分計算は各時間ステップ $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, \dots, K-1$, ごとの積分値を精度保証付きで求めていくことになる. よって各時間ステップごとに $g(t, 0)$ が小さければ積分値も小さく抑えられる. ここで $g(t, 0), t \in [t_i, t_{i+1}]$, はテイラーの定理から

$$g(t, 0) = g(t_i) + \frac{dg}{dt}(t_i, 0)(t-t_i) + \frac{1}{2} \frac{d^2g}{dt^2}(t_i, 0)(t-t_i)^2 + \dots + \frac{1}{n!} \frac{d^ng}{dt^n}(t_\theta, 0)(t-t_i)^n, \quad t_\theta \in [t_i, t_{i+1}]$$

で表されることに注意する. これより $n-1$ 階までの $t = t_i$ での微分係数が $\frac{d^k g}{dt^k}(t_i, 0) = 0, k = 0, 1, \dots, n-1$, であれば $g(t, 0)$ が

$$g(t, 0) \in \frac{1}{n!} \frac{d^ng}{dt^n}([t_i, t_{i+1}], 0)[0, (t_{i+1} - t_i)^n]$$

と評価され、時間ステップに関して n 次のオーダーで抑えられることになる。

ここで $n-1$ 階までの全ての微係数を零にする際に、手順 1 の最後に述べた補間多項式の係数が用いられる。すなわち $\frac{d^k g}{dt^k}(t_i, 0) = 0, k = 0, 1, \dots, n-1$, となるように近似解の高階微係数 $\frac{d^{k+1} w}{dt^{k+1}}(t_i)$ を (9) から帰納的に定め、これを用いて補間多項式を求めていくのである。これにより十分細かい時間ステップを取っておくことで $g(t, 0)$ をその微小区間上で小さくすることができ、結果として Y を小さくできることが期待される。

次に Z に関して考察してみよう。この場合は

$$(T'_\eta(w_1)w_2)(t) = \int_0^t X(t)PX(s)^{-1}g_v(s, w_1)w_2 ds - \int_t^\infty X(t)(I-P)X(s)^{-1}g_v(s, w_1)w_2 ds, \\ w_1, w_2 \in B_\epsilon(\mathbf{R}_+)$$

より $g_v(t, w_1)w_2$ を小さく抑えれば良いことがわかる。ここでベクトル場 $f(x)$ が n 次多項式で与えられている場合を考えてみると

$$\begin{aligned} g_v(t, w_1(t))w_2(t) &= f_x(w(t) + w_1(t))w_2(t) - Aw_2(t) \\ &= f_{xx}(w(t))w_2(t)w_1(t) + \dots + \frac{1}{(n-1)!}f_{nx}(w(t))w_2(t)w_1(t)^{n-1} \\ &\subset f_{xx}(w(t))[-\epsilon^2, \epsilon^2] + \dots + \frac{1}{(n-1)!}f_{nx}(w(t))[-\epsilon^n, \epsilon^n] \end{aligned}$$

が成り立ち、 ϵ に関して 2 次のオーダーで評価できることがわかる。

これより命題 3 の検証条件 $Y + Z < \epsilon$ の右辺が ϵ に関して 1 次で与えられていることから、十分小さい時間ステップと ϵ を取ることにより作用素 (8) の縮小写像性が期待される。

2.4 手順 4：初期値の解析

最後に手順 3 で特徴付けを行った安定多様体と原点の不安定多様体の交わりを調べ、ホモクリニック軌道の存在を保証する為の十分条件を導出する。そこで、まず始めにリバーシブル系における基本的性質を簡単にまとめておく（例えば論文 [8] を参照）。

力学系 $\dot{x} = f(x)$ が S -リバーシブル、すなわち $f(Sx) = -Sf(x)$ を満たしているとする。このとき、一つ目の性質として $x(t)$ が解であれば $Sx(-t)$ も解であることが簡単な計算から導かれる。また $\text{Fix}(S) := \{x \in \mathbf{R}^{2n} \mid Sx = x\}$ で S に関する不変部分空間を表すことにすると、 $x(0) \in \text{Fix}(S)$ ならば $x(t) = Sx(-t)$ となることが初期値に対する一意性から示される。従って原点の安定多様体を $W^s(0)$ として $x(0) \in \text{Fix}(S) \cap W^s(0)$ であるならば、 $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} Sx(-t) = 0$ となり、 $x(0)$ は実は不安定多様体上の点でもあることがわかる。つまり対称ホモクリニック軌道を構成することになる。よって手順 3 から構成される安定多様体と $\text{Fix}(S)$ の交わりを調べることで、具体的に不安定多様体を構成せずに、対称ホモクリニック軌道の存在検証が行えることになる。これまでの議論で $\mathbf{R}_+$ のみを扱った理由はここにある。

またリバーシブル系における対称ホモクリニック軌道は構造安定であることが知られている [3]。この性質より対称ホモクリニック軌道の存在を調べる際には、分岐現象として扱う必要は無いこともコメントしておく。

さて上記の議論から対称ホモクリニック軌道の存在検証の為には $x_\eta(0) = w(0) + v_\eta(0) \in \text{Fix}(S)$ となる初期値の存在を調べればよいことが解った。ここで $w(0) = \xi^0 \in \text{Fix}(S)$ であることを思い出しおくと、結局 $v_\eta(0) \in \text{Fix}(S)$ なる $\eta \in D$ が原点を結ぶホモクリニック軌道を与えることになる。そこで $v_\eta(0)$ を解析する為に次の直和分解を導入する：

$$\mathbf{R}^{2n} = \text{Fix}(S) \oplus V, \quad V := \{x \in \mathbf{R}^{2n} \mid Sx = -x\}.$$

ここで直和分解が成立することは、任意の $x \in \mathbf{R}^{2n}$ が $\text{Fix}(S)$ と V の成分へ一意分解 $x = \frac{x+Sx}{2} + \frac{x-Sx}{2}$ を持つことからわかる。またこの直和分解に付随する $\text{Fix}(S)$ への射影を $Q: \mathbf{R}^{2n} \rightarrow \text{Fix}(S)$ で表す。これらの準備の下で次の作用素を導入する：

$$\begin{aligned} E: \text{Fix}(S) \oplus V &\rightarrow V, \\ E(\eta_1, \eta_2) &:= (I - Q)\tilde{E}(\eta_1, \eta_2), \quad (\eta_1, \eta_2) \in \text{Fix}(S) \oplus V, \\ \tilde{E}(\eta_1, \eta_2) &:= v_\eta(0) = X(0) \left(PX(0)^{-1}\eta - \int_0^\infty (I - P)X(s)^{-1}g(s, v_\eta)ds \right). \end{aligned} \quad (10)$$

ここで $\eta_1 = Q\eta$, $\eta_2 = (I - Q)\eta$ としてある（以後文脈から明らかな場合はこのような表記も用いる）。定義より $E(\eta_1, \eta_2) = 0$ なる η が $v_\eta(0) \in \text{Fix}(S)$ となることがわかる。よって作用素 E の不動点定式化を D 上で行い、不動点の存在を精度保証付き数値計算で調べることで $w(t)$ 近傍のホモクリニック軌道が最終的に得られることになる。

具体的には、 $\frac{\partial}{\partial \eta_2} E(\eta_1, \eta_2)$ に対する近似行列を用いて簡易ニュートン型作用素を導入する。例えば作用素 (10) の形から

$$R := \frac{\partial}{\partial \eta_2} \{(I - Q)X(0)PX(0)^{-1}\eta\}$$

を $\frac{\partial}{\partial \eta_2} E(\eta_1, \eta_2)$ に対する近似行列として用いるとしよう。このときホモクリニック軌道の存在を保証する為の不動点定式化は

$$F(\eta_1, \eta_2) := R^{-1} \{R\eta_2 - E(\eta_1, \eta_2)\} \quad (11)$$

で与えられ、最終的に $F: D_{\eta_1} \times D_{\eta_2} \rightarrow D_{\eta_2}$ の $\eta_2 \in D_{\eta_2}$ に関する不動点を調べる問題に帰着できた。ここで D_{η_1}, D_{η_2} はそれぞれ $D_{\eta_1} = QD, D_{\eta_2} = (I - Q)D$ で与えられる。

3 数値検証例

では2節で提案した対称ホモクリニック軌道の存在検証法を具体例へ適用し、アルゴリズムの妥当性を検討していこう。ここでは次の2次元リバーシブル力学系

$$\frac{du}{dt} = f(u), \quad f(u) = \begin{pmatrix} u_2 \\ 4u_1 - 3u_1^2 \end{pmatrix} \quad (12)$$

を例として扱う。ここでベクトル場 $f(u)$ は $S(u_1, u_2) = (u_1, -u_2)$ に関してリバーシブルとなっており、 S -不変部分空間は $\text{Fix}(S) = \{(u_1, u_2) \mid u_2 = 0\}$ で与えられることに注意する。実はこの力学系は KdV 方程式を進行波座標系で表したものをシステムの形に変形し

たものであり、1ソリトン解として与えられるホモクリニック軌道が存在する。ここでは KdV 方程式にニュートン法を適用することで得られた近似ホモクリニック数値解

$$\{(\xi_1^i, \xi_2^i, t_i) \mid i = 0, \pm 1, \dots, \pm K\}$$

を用いて本手法を適用してみる。図3は実際に検証で用いる数値解 (ξ_1^i, ξ_2^i) をプロットしたものであり、 $K = 6000$, $t_K = 4.0$ としてある。またここでは近似数値解を3次多項式で補

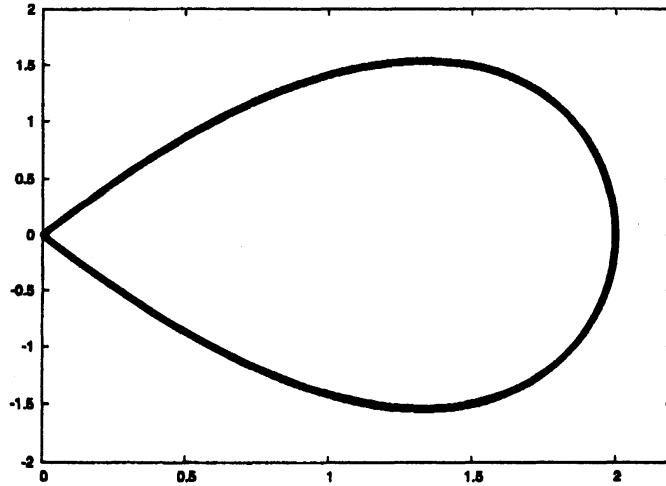


図3: 近似数値ホモクリニック軌道

間して $w(t)$ を構成してみる。まず解の追跡に関する命題3の検証条件は、 $\epsilon = 0.00005$ とすると $Y = 0.000013012$, $Z = 0.000002167$ として計算され $Y + Z < \epsilon$ を満たすことが示される。これにより $w(t)$ の $\epsilon = 0.00005$ 近傍での安定多様体が構成されたことになる。ここで初期値をコントロールするパラメーター集合は $D = [-10^{-10}, 10^{-10}] \times [-10^{-5} \times 10^{-5}]$ とした。次にこの安定多様体と $\text{Fix}(S)$ との交わりを作用素 (11) の D_{η_2} に関する不動点の存在から調べる。実際ここで用意した D を持ちいると

$$F(D) \subset [-0.0000050527, 0.0000051626] \subset D_{\eta_2}$$

が精度保証付き数値計算から確かめられる。よって最終的に安定多様体と不安定多様体の $\text{Fix}(S)$ 上での交わりが検証されたことになり、対称ホモクリニック軌道の存在が証明された。

4 今後の展開

本節で今回提案した数値検証法に対する現時点での今後の課題をまとめておく。

まず始めにリバーシブル系の仮定を外し、一般のヘテロクリニック軌道の存在を分岐現象として取り扱うように拡張することが挙げられる。その為にはこれまでの全ての手順において負の時刻 $\mathbf{R}_- = (-\infty, 0]$ についても同様に議論しなくてはならない。まず手順2では $\mathbf{R}_-$ 上で exponential dichotomy 性を満たす基本行列解を別に構成する。それを用いて原点の不安定多様体を手順3と同様に構成し、安定多様体と不安定多様体の交わりを直

接 $w(0)$ の近傍で調べればよいことになる。本質的に変わる点は手順4であるが、手順3によって安定多様体が $v_{\eta}^{+}(0), \eta \in D^{+}$, 不安定多様体が $v_{\zeta}^{-}(0), \zeta \in D^{-}$ で与えられたとすると、その交わりを調べるには $v_{\eta}^{+}(0) - v_{\zeta}^{-}(0) = 0$ なる (η, ζ) を求めるように問題を変更すればよい。当然この場合は分岐として扱う必要がある為、方程式に付随する分岐パラメーター (μ とする) を含めた形で分岐方程式 $v_{\eta, \mu}^{+}(0) - v_{\zeta, \mu}^{-}(0) = 0$ を導出し、その解を数値検証で確かめていくことになる。

次にエバンス関数への応用について述べる。本手法で取り扱った安定多様体と不安定多様体の交わりを調べる方法は、本質的にはメルニコフ関数 (例えば [2]) を精度保証付きで計算していることと同値である。一方エバンス関数とは反応拡散型偏微分方程式などに現れる進行波解の安定性を調べる数学的手法であり、その零点は進行波解における線形化固有値問題の固有値に重複度まで込めて一致する。このメルニコフ関数とエバンス関数との関係については多くの研究が行われており、現在では統一的な理解が与えられている (例えば [4])。よって本手法をエバンス関数の精度保証付き数値計算へ適用することは可能であると考えられる。進行波解の存在だけでなく同時に安定性も議論できる精度保証付き数値計算法の開発は今後の課題である。

最後に、ホモ／ヘテロクリニック軌道の精度保証付き数値計算に関するその他の先行研究について紹介しておく。大石 [7] はホモクリニック軌道の存在検証を2点境界値問題として定式化する手法を提案している。平衡点近傍で局所安定多様体と局所不安定多様体を通過するという制約を境界条件として課し、元の常微分方程式を境界値問題として扱うのである。最終的に境界値問題に対する精度保証問題に帰着することから、これまでに培われてきた技法が使えるという長所を持つ。また別の方法として、covering relation と呼ばれる位相的な方法 [12] を用いたホモ／ヘテロクリニック軌道に対する精度保証法も研究が行われており、位相的方法である利点を生かして現在様々な問題へ適用されている [9][10]。しかしこれらの方法からは、存在が示されるホモ／ヘテロクリニック軌道に沿った安定多様体や不安定多様体の詳細な情報は手に入らない。一方本手法は exponential dichotomy を扱っているため、ホモ／ヘテロクリニック軌道の存在とともにその軌道に沿った安定多様体と不安定多様体の情報まで手に入り、これらを用いた更なる解析が可能になるという利点を持つ。その一例が上で述べたエバンス関数への応用である。その意味でまずは本手法の長所を生かす方向で今後研究を進めていきたい。

参考文献

- [1] E. A. Coddington and L. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill, New York, 1955.
- [2] J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag, 1983.
- [3] G. Iooss and M. C. Pérouème, Perturbed homoclinic solutions in reversible 1:1 resonance vector fields, *J. Diff. Eq.* **102** (1993), 62-88.
- [4] T. Kapitula, The Evans function and generalized Melnikov integrals. *SIAM J. Math. Anal.* **30** (1999), 273-297.

- [5] H. Kokubu, Homoclinic and heteroclinic bifurcations in vector fields, *Japan J. Appl. Math.* **5** (1988), 455-501.
- [6] N. S. Nedialkov, K. R. Jackson, and G. F. Corliss, Validated solutions of initial value problems for ordinary differential equations, *Appl. Math. and Comp.* **105** (1999), 21-68.
- [7] 大石進一, 連続力学系のコネクティングオービットの精度保証付き数値解析法, 数理解析研究所講究録 928(1995), 14-19.
- [8] A. Vanderbauwhede and B. Fiedler, Homoclinic period blow-up in reversible and conservative systems, *Z. Angew. Math. Phys.* **43** (1992), 292-318.
- [9] D. Wilczak, Symmetric heteroclinic connections in the Michelson system: a computer assisted proof, *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* **4** (2005), 489-514.
- [10] D. Wilczak, P. Zgliczynski, Heteroclinic connections between periodic orbits in planar restricted circular three-body problem—a computer assisted proof. *Comm. Math. Phys.* **234** (2003), 37-75.
- [11] N. Yamamoto, A numerical verification method for solutions of boundary value problems with local uniqueness by Banach's fixed-point theorem, *SIAM J. Numer. Anal.* **35** (1998), 2004-2013.
- [12] P. Zgliczyński, Computer assisted proof of chaos in the Rössler equations and in the Hénon map, *Nonlinearity* **10** (1997), 243-252.