

協力ゲームのKernelとReasonable Set

富山大学経済学部 菊田健作 (Kensaku Kikuta)

1. はじめに.

本稿の目的は reasonable set を定義し, さらに prekernel が reasonable set に対する kernel に一致することを示すことである. これを応用して, pre-nucleolus が reasonable set に対する nucleolus に一致することを示すことができる. また, 特性関数の分割可能性を仮定すれば, 上述のことを提携構造を考えに入れた場合に容易に拡張できる.

n -person cooperative game with side payments (以後 game という) とは順序対 (N, v) である. ここに $N = \{1, 2, \dots, n\}$ は set of players, また v は N のべき集合上定義された実数値関数で特性関数という. $v(\emptyset) = 0$ と仮定する (混乱を生じないかぎり game を v で表す). N の部分集合を coalition という. 有限集合 Z に対し, $|Z|$ は Z に属する元の数を表す. coalition S に対し, R^S は $|S|$ -次元数ベクトル空間で, 各座標軸が S の各元に対応しているものとする. vector $x \in R^S$ の第 i 成分を x_i と表す. $S \subset T \subset N$ と $x \in R^T$ に対し, $x|_S$ は x の R^S への射影を表す. vector $x, y \in R^S$ に対し, $x \leq y$ (または, $y \geq x$) は, $x_i \leq y_i$, all $i \in S$ を意味する. vector $x \in R^N$, coalition S に対し, $x(S) = \sum_{i \in S} x_i$ (if $S \neq \emptyset$), $= 0$ (if $S = \emptyset$) とする. game v の pre-imputation とは vector $x \in R^N$ で次をを満たすものをいう.

$$(1) \quad x(N) = v(N).$$

game v の pre-imputation 全体の集合を X と表す. game v の reasonable set を :

$$r = \{x \in X : m \leq x \leq M\},$$

と定義する. ここに

$$M_i = \max \{v(S) - v(S - \{i\}) : i \in S\} \text{ および } m_i = \min \{v(S) - v(S - \{i\}) : i \in S\}.$$

[Gerard-Varet/Zamir 1987] は r のみならず, game の superadditive cover を考えることにより他の reasonable set を提案している. 本報告では r のみを考える.

Proposition 1. (i) $x \in R^N$ とする. $x \geq M$ となるのは次のときそのときに限る:

$$(2) \quad v(S) - v(S-T) \leq x(T), \text{ all } S, T \text{ such that } T \subset S \subset N.$$

(ii) $x \in R^N$ とする. $x \leq m$ となるのは次のときそのときに限る:

$$(3) \quad v(S) - v(S-T) \geq x(T), \text{ all } S, T \text{ such that } T \subset S \subset N.$$

(iii) 次は相互に同値である:

(a) $m \in X$,

(b) $M \in X$, また

(c) $v(S) = I(S)$, all $S \subset N$. ここに, $I \in R^N$ かつ $I_i = v(\{i\})$, all $i \in N$.

(iv) $r \neq \emptyset$.

2. Reasonableness of the prekernel

vector $x \in R^N$ と coalition S に対し, $e(S, x) = v(S) - x(S)$ とおく. $e(S, x)$ を x における S の excess という. $i, j \in N$, $i \neq j$ に対し, i を含み j を含まないような coalition 全体の集合を σ_{ij} と表す. 各 $x \in X$ に対し, i の j に関する maximum surplus を:

$$s_{ij}(x) = \max \{e(S, x) : S \in \sigma_{ij}\}.$$

と定義する. $Y \subset X$, $x \in Y$ とする. $s_{ij}(x) > s_{ji}(x)$ かつ, 十分小さいすべての $\delta > 0$ に対し, $x^{ij}(\delta) \in Y$ であるとき, i outweighs j at x w. r. t. Y という, ここに $x^{ij}(\delta)_h = x_i + \delta$ (if $h = i$), $= x_j - \delta$ (if $h = j$), $= x_h$ (otherwise). $x^{ij}(\delta)$ を δ -transfer という. i, j がともにお互いを outweigh しないとき i と j は in equilibrium at x w. r. t. Y という. 任意の二人の players が in equilibrium at x w. r. t. Y であるような $x \in Y$ の全体を $Y \subset X$ に対する kernel といい, $K(Y)$ と書く. X に対する kernel を特に v の prekernel という. $l, u \in R^N$ に対し,

$$Y(l, u) = \{x \in X : l \leq x \leq u\}$$

とおく. $r = Y(m, M)$ である. $l, u \in R^N$ に対し, $Y = Y(l, u)$ であると仮定する. このとき, $x \in K(Y)$ となるのは次のときかつそのときに限る:

$$(4) \quad s_{ij}(x) > s_{ji}(x) \text{ ならば } x_j = l_j \text{ または } x_i = u_i.$$

$x \in X$ に対し, $\theta(x)$ は 2^n -vector でその成分は $\{e(S, x)\}_{S \subset N}$ が大きさの順に並んでいるものとする. すなわち, $\theta_i(x) \geq \theta_j(x)$ whenever $1 \leq i \leq j \leq 2^n$. $\theta(x)$ が辞書式順序で $\theta(y)$ より小さいとき, $\theta(x) \prec_L \theta(y)$ と書く. つまり, ある k に対して $\theta_i(x) = \theta_i(y)$ for all $i < k$, かつ $\theta_k(x) < \theta_k(y)$. $\theta(y) \prec_L \theta(x)$ でないとき, $\theta(x) \leq_L \theta(y)$ と書く. $Y \subset X$ とする. 辞書式順序で θ を最小にするような Y の vector の集合を Y に対する nucleolus といい, $N(Y)$ と表す. すなわち, $N(Y) = \{x \in Y : \theta(x) \leq_L \theta(y) \text{ for all } y \in Y\}$. X に対する nucleolus を特に game v の pre-nucleolus と呼ぶ. 次の事実 はよく知られている ([Schmeidler 1969] の p.1165 参照).

$$(5) \quad Y \subset R^N \text{ とする. } Y \neq \emptyset \text{ ならば } N(Y) \subset K(Y).$$

ここで $Y \subset X$ に関する二つの条件を考える.

(OPEN) $r \subset Y$ かつ, Y は X における open set,

および

(BOX) ある $l, u \in R^N$ に対し, $Y = Y(l, u)$ しかも $l \leq m$ かつ $M \leq u$.

X および r はそれぞれ条件 (OPEN), (BOX) を満足する. 両方とも $r \subset Y$ を含んでいる. これは次の点で必要である. prekernel が r の extreme point であることがある. この場合, $r \subset Y$ を仮定しないならば, prekernel が $r \cdot Y$ に属することもある. $Y(l, u)$ は R^N における interval と X との共通部分であり, $l = m, u = M$ とおくと r に一致する. $Y(l, u)$ が互いに直交する超平面によって定義されるということは δ -transfer が Y から出ていかないという点で重要であると考え. Y が open set である条件は δ -transfer の定義に関連している.

Theorem 2(i) は, これらの条件の下では δ -transfer を考えに入れる手間を省くことができることを述べている. [Maschler/Peleg/Shapley 1979] の p.314 では関数 v にある条件を課すことにより同様

のことを示している。Theorem 2(iv) は [Schmeidler 1969] の Theorem 1 に関連している。さらに [Maschler 1992] の Theorem 5.2 を参照。ここでは条件 (OPEN) の下で Y の closedness を仮定しない。

Theorem 2. $Y \subset X$ とし、条件 (OPEN) または (BOX) を仮定する。

- (i) $x \in K(Y)$ とする。すると $s_{ij}(x) = s_{ji}(x)$ for all $i, j \in N, i \neq j$.
- (ii) $K(Y) \subset r$.
- (iii) $K(Y) = K(r)$.
- (iv) $N(Y) \neq \emptyset$.
- (v) $N(Y) = N(r)$.

Example 3. $n = 3$ とする. , $v(123) = 5, v(12) = v(13) = v(23) = 3$, and $v(i) = 0$ for $i = 1, 2, 3$. すると $M_i = 3, m_i = 0$ for $i = 1, 2, 3$, また $r = \{(y_1, y_2, y_3) : 0 \leq y_i \leq 3, i = 1, 2, 3, \text{かつ } y(123) = 5\}$. $Y \subset X$ を $Y = \{(y_1, y_2, y_3) : 0 \leq y_1, 3 \geq y_2, y_3 \geq 0, 8y_1 + 5y_2 \geq 10, 4y_1 + y_2 \leq 14, \text{かつ } y(123) = 5\}$. Y は convex かつ compact. $x = (5, -6, 6)$ とおく. $x \in Y \cdot r$ かつ x は Y の extreme point. さらに $s_{21}(x) > s_{12}(x), s_{13}(x) > s_{31}(x)$, かつ $s_{23}(x) > s_{32}(x)$. よって, x から発する 3 本の半直線が x のみを Y と共有することにより, $x \in K(Y)$ であることがわかる。

Theorems 2(iii) と (v) において $Y = X$ とおくと次を得る。

Corollary 4. $K(X) = K(r)$ かつ $N(X) = N(r)$.

game v に対する imputation set を $\underline{X} = \{x \in X : x \geq I\}$ と定義する。 $K(\underline{X})$ を v の kernel という。 v が次を満足するとき zero-monotonic という: $T \subset S \subset N$ であるようなすべての S, T に対して, $v(S) \geq v(T) + I(S \cdot T)$. Corollary 4 と Theorem 2 とから, 次がわかる: もしも v が zero-monotonic であれば, $K(\underline{X}) = K(X)$ ([Maschler et al. 1972] の Theorem 2.7). これは以下のようにしてわかる。まず, v が zero-monotonic であるための必要十分条件は $m = I$ が成り立つことである。次に, $m = I$ であるための必要十分条件は $Y(m, u^*) = X$ が成り立つことである。ここに, $u^* \in R^N$ かつ $u^*_i = v(N) - m(N \cdot \{i\})$, all $i \in N$. ゆえに もし v が zero-monotonic ならば, $K(X) = K(Y(m, u^*))$. さらに $u^* \geq M$ であることは容易にわかる。これより, $Y(m, u^*)$ は (BOX) を満足することがわかる。 ゆえに Theorem 2(iii) と Corollary 4 とから, $K(Y(m, u^*)) = K(r) = K(X)$. 結局

$$K(\underline{X}) = K(X).$$

3. 提携構造を持つ Game.

本節では、これまでの議論を提携構造を持つような game の場合に拡張する。与えられた提携構造に関する特性関数の分割可能性を仮定すれば、第2節の議論を応用できる。

v を game とする。 $B = \{B_1, \dots, B_h\}$ を N の h (≥ 2) 個の空でない部分集合への分割とする。 B を N 上の提携構造という。 $H = \{1, \dots, h\}$ とおく。本節では、 v は B に関して分割可能であると仮定する。 i.e., 各 $S \subset N$ に対し、

$$(6) \quad v(S) = v(S \cap B_1) + \dots + v(S \cap B_h).$$

各 $t \in H$ に対し、 (B_t, v_t) は次のような game を表す： B_t は set of players また v_t は 特性関数ですべての $T \subset B_t$ に対し $v_t(T) = v(T)$ 。この game を簡単に v_t と表す。 $X^t, M^t, m^t, r^t, e^t(\cdot, \cdot), \theta^t(\cdot), K^t(\cdot)$, そして $N^t(\cdot)$ をこの game に即して定義する。また (OPEN) および (BOX) を $(\text{OPEN})^t$ および $(\text{BOX})^t$ と表す。 $x \in R^N$ と $t \in H$ に対し、 $t_x \equiv x|_{B_t}$, $-t_x \equiv x|_{(N-B_t)}$ とおく。 $X(B) \equiv X^1 \times \dots \times X^h$ および $r(B) \equiv \{x \in X(B) : m \leq x \leq M\}$ と定義する。 $t_M = M^t$ かつ $t_m = m^t$ for all $t \in H$ であるから $r(B) = r^1 \times \dots \times r^h$ である。 $i, j \in B_t$, と $x \in X^t$ に対し、 $st_{ij}(x) \equiv \max \{e(S, x) : S \in \sigma_{ij}, S \subset B_t\}$ と定義する。 (6)より、 $x \in X(B)$, $i, j \in B_t$ および $t \in H$ に対し、

$$(7) \quad s_{ij}(x) - s_{ji}(x) = st_{ij}(t_x) - st_{ji}(t_x).$$

$Y \subset X(B)$ に対する kernel を $K(Y, B)$ と表す、 i.e.,

$$K(Y, B) = \{x \in Y : \text{任意の } t \in H, i, j \in B_t \text{ に対し, } s_{ij}(x) > s_{ji}(x) \text{ ならば } x_{ij}(\delta) \notin Y \text{ for all sufficiently small } \delta > 0\}.$$

Proposition 5. $B = \{B_1, \dots, B_h\}$ を N 上の提携構造とする。 (6)を仮定する。 $Y = Y^1 \times \dots \times Y^h$, $Y_t \subset X^t$ for all $t \in H$ と仮定する。 各 $t \in H$ に対し Y_t は $(\text{OPEN})^t$ かまたは $(\text{BOX})^t$ を満足するとする。

(i) $N(Y) \subset K(Y, B)$ かつ $N(Y) \neq \emptyset$,

(ii) $K(Y, B) = K(r(B), B)$, さらに

(iii) $N(Y) = N(r(B))$.

(6) は $K(X(B), B)$ と $K(r(B), B)$ が一致するための必要条件ではない。これは次の例からわかる。 $n = 3$. $v(123) = 5$, $v(13) = v(23) = -3$, $v(12) = 6$, $v(i) = 0$ for $i = 1, 2, 3$ とする。 $B = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$. v は (6) を満足しない。しかし $K(X(B), B) = K(r(B), B) = \{(3, 3, 0)\} \subset r(B)$.
[Gerard-Varet and Zamir 1987] の p.137 では特性関数の優加法性が仮定されている。

諸命題の証明は省略する。参考文献の [Kikuta 1994] を参照されたい。

参考文献.

- Aumann, R.J. and J.H. Dreze: Cooperative Games with Coalition Structures. International Journal of Game Theory, Vol.3 (1974), 217-237.
- Gerard-Varet, L.A. and S. Zamir: Remarks on the Reasonable Set of Outcomes in a General Coalition Function Game. International Journal of Game Theory, Vol.16 (1987), 123-143.
- Kikuta, K.: The Kernel for the Reasonable Set in a Cooperative Game. mimeo. February, 1994.
- Maschler, M.: The Bargaining Set, Kernel, and Nucleolus. Ch.18 of Handbook of Game Theory, Vol.1, Edited by R.J. Aumann and S. Hart. Elsevier Science Publishers 1992.
- Maschler, M., B. Peleg and L.S. Shapley: The Kernel and Bargaining Set for Convex Games. International Journal of Game Theory, Vol.1 (1972), 73-93.
- Maschler, M., B. Peleg and L.S. Shapley: Geometric Properties of the Kernel, Nucleolus and Related Solution Concepts. Mathematics of Operations Research, Vol.4 (1979), 303-338.
- Milnor, J.W.: Reasonable Outcomes for n -Person Games. RM-916, The Rand Corporation, Santa Monica, CA. (1952).
- Schmeidler, D.: The Nucleolus of a Characteristic Function Game. SIAM Journal of Applied Mathematics, Vol.17 (1969), 1163-1170.
- Shapley, L.S.: A Value for n -Person Games. Annals of Mathematics Study, Vol.28, 1953, 307-317.