

# 合流型超幾何関数と Wild ramification

寺松 友秀 都立大学 理学部

## 1. 動機

有限体上の多様体上の指標和と、複素数体上の多様体上の有理関数の複素中の積分、すなわち、多様体上の超幾何関数の類似について考える。その一番原始的な類似は下の様な  $\Gamma$ -関数と Gauss 和である。

(1a)  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $\operatorname{Re} \alpha > 0$  に対し

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

(2a)  $\mathbb{F}_q$  を有限体、 $\chi \in \mathbb{F}_q^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$  なる nontrivial な multiplicative character,  $\psi \in \mathbb{F}_q \rightarrow \mathbb{C}^\times$  なる nontrivial な additive character とし  $T \in \mathbb{F}_q$  時、 $g(\chi, \psi)$  は

$$g(\chi, \psi) = \sum_{x \in \mathbb{F}_q} \chi(x) \psi(x)$$

で与えられる。

しかしこの2つは、有限体上の代数多様体上の tame に分岐している sheaf の  $\ell$ -進 cohomology 上の Frobenius の固有値や  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  上の regular-singularity をもつ微分方程式の解の積分として表わし出しているわけではない。有限体上の多様体上の tame に分岐している sheaf の  $\ell$ -進 cohomology の Frobenius の

固有値として、あるものは、regular singularity をもつ微分方程式で、対応を見つければ、むしろ次の Beta 関数と Jacobi 和の類似のものが直接的に、幾何的に対応していると考えた方が自然である。

(1e) (Beta 関数)  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ,  $\operatorname{Re} \alpha, \operatorname{Re} \beta > 0$  として、

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx = \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

(2e) (Jacobi 和).  $\chi_1, \chi_2 \in \mathbb{F}_q^\times$  の multiplicative character  $\mathbb{F}_q^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$  で、 $\chi_1 \neq 1, \chi_2 \neq 1, \chi_1 \chi_2 \neq 1$  とすると、

$$\begin{aligned} J(\chi_1, \chi_2) &= \sum_{x \in \mathbb{F}_q} \chi_1(x) \chi_2(1-x) \\ &= \frac{g(\chi_1, \psi) g(\chi_2, \psi)}{g(\chi_1 \chi_2, \psi)} \end{aligned}$$

後者は、multiplicative 指標に関する有限体上の多様体の指標和、前者は、一般の多様体上の超幾何関数に一般化される。

(1c)  $X \subset \mathbb{C}^n$  の  $n$  次元多様体、 $\alpha_i \in \mathbb{C}$  ( $i=1, \dots, m$ ),  $f_i$  ( $i=1, \dots, m$ )  $\in X$  上の rational function  $X^\circ \ni f_i \in \mathbb{C}^\times$  なる  $X$  の open set として、 $\delta \in \prod f_i^{\alpha_i}$  で定義される twisted cycle,  $\omega \in n$ -form とする。

$$\int_\delta \prod_i f_i^{\alpha_i} \omega$$

を超幾何積分という。これを  $f_i$  の係数を parameter と見た時、これは、parameter に関する確定特異点をもつ微分方程式の解

とたゞ、2 おり。  $\zeta$  の rank は 1。 Twisted homology の次元に等しい。 Twisted cycle  $\delta \in \mathcal{H}^1$  を与えることは  $\mathcal{H}^1$  である。 独立な解を得るが、これは Wronskian  $\mathcal{H}^1$ 。  $\alpha_i$  と  $f_i$  の係数の関数と見ると、

$$\Gamma(\alpha) = (\det(M), C_n(X \bmod (X - X^0)))$$

の  $\mathcal{H}^1$  は  $\mathbb{Q}$  から  $\mathbb{C}$  へ  $\mathbb{C}$  へ。 Anderson, Loeser-Sabbah,

T. Saito - T. により知られている。( 城崎シンポジウムの際は、予想は、たゞ、最近には完全に証明された。 )  $\mathcal{H}^1$  は  $\mathcal{H}^1$ 。

$\Gamma(\alpha)$  は  $\Gamma(u_i)$ ,  $(u_i \in \sum_{i=1}^m \mathbb{Q} \alpha_i)$  の  $\mathcal{H}^1$  の種で、  $\Gamma(u_i)$  の weight は 1,  $(2\pi i)$  の weight は 2 と形式的に見ると、  $\zeta$  の weight は  $b \cdot \dim X$  とたゞ、2 いる。

(2c)  $X$  は有限体上の多様体。  $\chi_1, \dots, \chi_m \in \text{multiplicative character}$ ,  $f_1, \dots, f_m \in X$  は rational function とすると、

$$\text{tr}(\text{Fr}^m | H_c^*(X^0, f_1^* \mathcal{L}_{X_1} \otimes \dots \otimes f_m^* \mathcal{L}_{X_m}))$$

$$= \sum_{x \in X(\mathbb{F}_q^m)} \chi_1(N_m(f_1(x))) \dots \chi_m(N_m(f_m(x)))$$

とたゞ、  $\mathcal{L}_{X_i}$  は  $G_m$  上の  $\chi_i$  に対応する rank 1 の

étale sheaf  $N_m$  は  $\mathbb{F}_q^m$  から  $\mathbb{F}_q$  への Norm.  $\mathcal{H}^1$  は Frobenius の determinant である。

$$\det(-\text{Fr} | H_c^*(X^0, f_1^* \mathcal{L}_{X_1} \otimes \dots \otimes f_m^* \mathcal{L}_{X_m}))$$

$$= G(\chi_1, \dots, \chi_m, X, D) \cdot (\det(f_1^* \mathcal{L}_{X_1} \otimes \dots \otimes f_m^* \mathcal{L}_{X_m}), C_n)$$

という  $\mathcal{H}^1$  は  $\mathbb{Q}$  である。  $G(\chi_1, \dots, \chi_m, X, D)$  は Gauss

和の積で、第二項目は、étale sheaf と Top Chern class を evaluate したものである。(T. Saito)

上の (1c), (2c) は、 $\ell$ -進表現への Frobenius の determinant, あるいは, "log" で定まる  $\ell$ -period の determinant として、解釈でき、ある程度直接的な対応であると思うことができる。しかしこの対応では、初めにあげた  $\Gamma$ -関数と Gauss 和の対応は、説明しきれない。また、 $\Gamma$ -関数あるいはその特殊値と weight 1 の関数 (数),  $(2\pi i)$  と weight 2 の数と思う事が妥当であると思われる。(1c) で出て来る  $\Gamma$ -関数の積は、次の様な制約がある。(単に weight を定義するのみならず、この制約はいろいろな) 可なり、 $\Gamma(u) = \pi \Gamma(u_i) / \prod_j \Gamma(v_j)$  と表わした時、 $\sum_i u_i - \sum_j v_j \in \mathbb{Z}$  となる。この制限にあてはまらない例を得ようとするならば、

(i) 不確定特異点をもつ微分方程式の解の積分

(ii) wild な ramification をもつ  $\ell$ -進 sheaf の cohomology について考えなければならぬ。

ここでは特殊な形ではあるが、 $\mathbb{P}^1$  上で合流型超幾何関数の determinant と、Kloosterman 型の (wild な ramification をもつ)  $\ell$ -進表現の determinant の間に、やはり類似の公式が存在することを見てみよう。これは、同じ geometric origin をもつものから得られるわけではなく、それは irregular singularity

という  $\mathbb{C}$  上には特有の超越的  $\Gamma$  もあるから、他方は、標数  $p$  特有の wild  $\Gamma$  ramification から得られる。

(1d) (合流型超幾何関数)  $f(x) \in \mathbb{C}[x]$  とし、

$$\int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \prod_{k=1}^m (x - \lambda_k)^{\alpha_k - 1} e^{f(x)} dx$$

$\Gamma$  の積分を考へる。被積分関数の  $x = \infty$  の irregularity は、

$$d = \deg f(x),$$

(2d) (Kloosterman sum)  $\chi_1, \dots, \chi_m$  は  $\mathbb{F}_q$  の multiplicative character,  $\phi$  は  $\mathbb{F}_q$  の additive character,  $F(x) \in \mathbb{F}_q[x]$  とし、

$$\sum_{x \in \mathbb{F}_q} \prod_{i=1}^m \chi_i(x - \lambda_i) \phi(F(x)).$$

$\cong \mathbb{Z}$ .  $\prod_{i=1}^m \chi_i(x - \lambda_i) \phi(F(x))$  の定める  $\mathbb{P}^1$  上の étale sheaf は、

$x = \infty$  での Swan conductor =  $\deg(F(x))$  とする。

以上  $F$  の Section  $\mathbb{Z}$ . (1d) 型 - Hodge version. (2d) 型 -  $l$ -adic version を考察する。

## 2. 合流型超幾何級数

$\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  と  $\lambda_1 < \dots < \lambda_n$  を満たす実数とする。  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$  と  $\alpha_i > 0$  とする。今、  $x \in [\lambda_i, \infty)$  の時、  $(x - \lambda_i)^{\alpha_i - 1} \in \mathbb{R}$  となる branch へ、  $x \in (-\infty, \lambda_i]$  の時、  $(x - \lambda_i)^{\alpha_i - 1} \in \mathbb{R} \cdot \exp((\alpha_i - 1)\pi i)$  となる branch とする。  $F(x) \in \mathbb{C}[x]$  は degree  $d$  の多項式とする。上の各 branch を選ぶことは  $\pm 1$  の符号、

$$\int_{\lambda_j}^{\lambda_{j+1}} \prod_{k=1}^n (x - \lambda_k)^{\alpha_k - 1} \exp(F(z)) x^{i-1} dx \quad \text{--- (1)}$$

を define する。被積分の differential form を  $\omega_i$  と置く。

さらに、 $\infty$  へ向かう path を定義し  $T$  といふ。独立に  $d$  個  $(d = \deg F(z))$  あると考へる。つまり、 $\lambda_n < M$  なる  $M$  を fix. して、

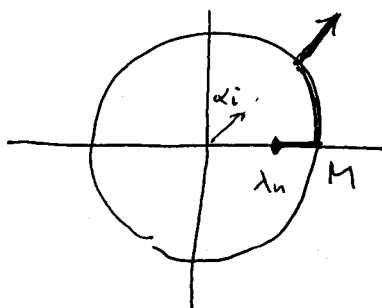
さらに、 $\lim_{x \in \mathbb{R}, x \rightarrow \infty} f(x\alpha_i) \rightarrow -\infty$  なる  $d$  個  $\alpha_i$  ( $\alpha_i \in \mathbb{C}$ ,

$|\alpha_i| = 1$ ) を  $d$  個定めて、 $\log \alpha_i$  を  $0 \leq \text{Im} \log \alpha_i < 2\pi$  とし、

fix する。  $[\lambda_n, M]$  から、 $M e^{i\theta}$  ( $0 \leq \theta \leq \text{Im} \log \alpha_i$ ),

$x\alpha_i$  ( $M \leq x < \infty$ ) へと接続して、 $\infty\alpha_i$  へと致す path を

$\gamma[\lambda_n, \infty\alpha_i]$  と定義する。(下図)



なる path を  $d$  個、 $\gamma$   $\omega_i$  と解析接続して、

$$\int_{\lambda_n}^{\infty\alpha_j} \omega_i = \int_{\lambda_n}^{\infty\alpha_j} \prod_{k=1}^n (x - \lambda_k)^{\alpha_k - 1} \exp(F(z)) x^{i-1} dx \quad \text{--- (2)}$$

と定義する。(1)(2) の  $\pi$  の積分を合流型超幾何関数という。

そこで、 $\int_{\lambda_j}^{\lambda_{j+1}} \omega_i$  ( $j=1, \dots, n-1, i=1, \dots, n+d-1$ ),  $\int_{\lambda_n}^{\infty\alpha_j} \omega_i$

( $j=1, \dots, d, i=1, \dots, n+d-1$ ) なる  $(n+d-1) \times (n+d-1)$  個の合流型超幾何関数が  $\mathbb{C}^n$  上の  $\mathbb{C}^n$ 、 $\mathbb{C}^n$  へ element とする行列の行列式を考へる。

Def (Determinant of confluent hypergeometric functions)

$$D = \det \left( \left( \int_{\lambda_j}^{\lambda_{j+1}} \omega_i \right)_{\substack{i=1, \dots, h+d-1 \\ j=1, \dots, n-1}}, \left( \int_{\lambda_n}^{\infty \alpha_j} \omega_i \right)_{\substack{i=1, \dots, h+d-1 \\ j=1, \dots, d-1}} \right)$$

$\Rightarrow$  a determinant 17次 a 定理 27 与 27 30.

Theorem 1

$$D = (2\pi)^{\frac{d-1}{2}} \Gamma(s_1) \cdots \Gamma(s_n) (da_d)^{-s - \frac{d-1}{2}} (-1)^{ds + \frac{d(d-1)}{4}} \\ \times \prod_{i=1}^n \left( \prod_{j \neq i} (\lambda_i - \lambda_j)^{\alpha_j - 1} \right) \prod_{i < j} (\lambda_j - \lambda_i) \\ \times \prod_{i=1}^n \exp(F(\lambda_i)) \prod_{F(u)=0} \exp(F(u))$$

$$\Rightarrow \Rightarrow 27 \Delta = \Delta_1 + \cdots + \Delta_n$$

$\Rightarrow$  a 公式 27 見 27 也 30 様 17.  $D$  17,  $\Gamma$ -factor,  $\pi$  a 17.  $F(x)$  a 最高次 a 係数 a 17.  $\lambda_i$  a discriminant (= critical value), exponential 型 a critical value, exponential 型 a discriminant a 種 a 形 27 27 17 30.

proof  $\exp(F(x)) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{F(x)}{m}\right)^m$  27 17 27 27.  $\infty \alpha_i \alpha_j$  27 27  $1 + \frac{F(x)}{m} = 0$  a 解 27 27 27 27 27.  $\alpha_1(m), \dots, \alpha_d(m)$  27  $1 + \frac{F(x)}{m} = 0$  a 解 27  $m$  17 27 可 27 代数関数 27 27.  $m \rightarrow +\infty$  a 時,  $\alpha_i(m)/|\alpha_i(m)| \rightarrow \alpha_i$  27 27 27 27 27  $\alpha_i(m)$  a branch 27 27 27.  $\Rightarrow$  可 27 27. 合 27 27 27.

$$\int_{\lambda_n}^{\infty \alpha_j} \omega_i = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\lambda_n}^{\alpha_j(m)} \prod_{k=1}^n (x - \lambda_k)^{\alpha_k - 1} \left(1 + \frac{F(x)}{m}\right)^m x^{i-1} dx$$

となる。この様にして(合流型でない)超幾何関数の determinant の計算に帰着させる。例えばこの方法は、 $\Gamma$ -関数の無限積表示 = Euler の limit formula:  $\Gamma(z) = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^m x^{z-1} (1 - \frac{x}{m})^m dx$   
 $= \lim_{m \rightarrow \infty} m^z \left( z \prod_{k=1}^m (1 + \frac{z}{k}) \right)^{-1}$  と得るのにも用いられる。  
 (この公式は determinant の limit の計算にも用いられる。)

Lemma 今  $\Gamma$  の branch を  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  とし、 $\omega_i = \prod_{k=1}^n (z - \lambda_k)^{\lambda_k - 1} z^{-1} dz$  とする。

$$\det \left( \int_{\lambda_j}^{\lambda_{i+1}} \omega_i \right)_{i,j=1, \dots, n-1} = \frac{\Gamma(\lambda_1) \cdots \Gamma(\lambda_n)}{\Gamma(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)} \prod_{i < j} (\lambda_j - \lambda_i) \\ \times \prod_{i=1}^n \left( \prod_{j \neq i} (\lambda_i - \lambda_j)^{\lambda_j - 1} \right)$$

この定理を、 $\prod_{k=1}^n (x - \lambda_k)^{\lambda_k - 1} \left( 1 + \frac{F(x)}{m} \right)^m = \prod_{k=1}^n (x - \lambda_k)^{\lambda_k - 1} \times \left( \frac{a_d}{m} \right)^m \frac{d}{\prod_{j=1}^d (x - \alpha_j(m))}^m$  に対して適用する。D を計算するには、次の limit を計算すればよい。  $s = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$  とし、

$$\textcircled{1} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(s) \Gamma(m+1)^d}{\Gamma(s + d(m+1))} m^{s + \frac{d-1}{2}} d^{md} = d^{-d-s+\frac{1}{2}} \frac{d-1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \Gamma(s)$$

$$\textcircled{2} \lim_{m \rightarrow \infty} m^{-\frac{d-1}{2}} \prod_{i < j} (\alpha_j(m) - \alpha_i(m)) = d^{\frac{d}{2}} a_d^{-\frac{d-1}{2}} (-1)^{\frac{d(d-1)}{4}}$$

$$\textcircled{3} \lim_{m \rightarrow \infty} m^{-1} \frac{d}{\prod_{j=1}^d (\alpha_j(m) - \lambda_i)} = \frac{(-1)^d}{a_d}$$

$$\textcircled{4} \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \frac{a_d}{m} \frac{d}{\prod_{j=1}^d (\lambda_j - \alpha_i(m))} \right)^m = \exp(F(\lambda_i))$$

$$\textcircled{5} \lim_{m \rightarrow \infty} \left( d^{-d} \left( \frac{a_d}{m} \right)^{d-1} \prod_{i=1}^n \prod_{j \neq i} (\alpha_j(m) - \alpha_i(m)) \right)^m = \prod_{F'(u)=0} \exp(F(u))$$



ここでは、①と⑤を計算してみよう。

①は左辺を、

$$\frac{(m!)^d \left( m^{\frac{s}{d}} m^{\frac{s+1}{d}} \dots m^{\frac{s+d-1}{d}} \right) \cdot d^{md}}{s(s+1) \dots (s+d(m+1)-1)}$$

$$= m^{\frac{s}{d}} \left[ \frac{s}{d} \prod_{k=1}^m \left( 1 + \frac{s}{kd} \right) \right]^{-1} \times m^{\frac{s+1}{d}} \left[ \frac{s+1}{d} \prod_{k=1}^m \left( 1 + \frac{s+1}{kd} \right) \right]^{-1}$$

$$\dots \times m^{\frac{s+d-1}{d}} \left[ \frac{s+d-1}{d} \prod_{k=1}^m \left( 1 + \frac{s+d-1}{kd} \right) \right]^{-1} \times d^{-d}$$

と変形してある。Euler's limit formula を使う、 $\Gamma\left(\frac{s}{d}\right) \dots \Gamma\left(\frac{s+d-1}{d}\right)$  になり、Gauss's 積公式 を使えば得る。

⑤は、 $1 + \frac{F(x)}{m} = \frac{a_d}{m} \prod_{j=1}^d (x - \alpha_j(m))$  の両辺を微分して、 $\alpha_j(m)$  を代入して、 $F'(\alpha_j(m)) = a_d \prod_{i \neq j} (\alpha_j(m) - \alpha_i(m))$  となる。左辺から、ここからは、

$$\left( \frac{a_d}{m} \right)^{d-1} \frac{d}{\prod_{j=1}^d} \frac{F'(\alpha_j(m))}{d a_d} = \left( \frac{a_d}{m} \right)^{d-1} \frac{d}{\prod_{j=1}^d} \prod_{F(u)=0} (\alpha_j(m) - u)$$

$$= \left( \frac{a_d}{m} \right)^{d-1} \prod_{F(u)=0} \frac{m}{a_d} \left( 1 + \frac{F(u)}{m} \right)$$

$$= \prod_{F(u)=0} \left( 1 + \frac{F(u)}{m} \right)$$

で、 $12$  は  $m$  乗して、 $\lim_{m \rightarrow \infty}$  をとると、⑤を得る。

### 3. Wild ramification と $\mathfrak{t}$ の sheaf の cohomology.

この章では、上の confluent hypergeometric function の  $l$ -adic analogy について考察しよう。

$C$  は有限体上の proper smooth な curve,  $C^\circ \in C$  a open set  
 として,  $\mathcal{F} \in \mathcal{O}_C$  上の rank 1 の  $\ell$ -進 étale sheaf とすると,  
 $\mathcal{F}$  の係数と可る Zeta 関数は,

$$Z(C, \mathcal{F}, t) = \prod_{i=0}^{2g} \det(1 - t \text{Fr} \mid H_c^i(C^\circ \otimes \overline{\mathbb{F}}, \mathcal{F}))^{(-1)^{i+1}}$$

で与えられる。この時、 $Z(C, \mathcal{F}, t)$  は、次の様な関数等式を  
 もつこと Tate により示される。

$$Z(C, \mathcal{F}, t) = q^{1-g} t^{(2g-2)} \prod_v E_v(X_v, \omega_v) Z(C, \mathcal{F}^*, q^{-1}t)$$

ここで  $\omega_v$  は global differential form  $\omega$  の  $v$  での germ,  $E_v(X_v, \omega_v)$   
 は、local  $\varepsilon$ -factor と呼ばれるもの、後に定義される。  
 上の公式は、次のように改定される。

$$\det(-\text{Fr} \mid H_c^1(C^\circ \otimes \overline{\mathbb{F}}, \mathcal{F})) = q^{1-g} \prod_v E_v(\mathcal{F}_v, \omega_v)$$

と Frobenius の determinant である。local factor の積は  $\frac{1}{t}$  となることを  
 表わしている。local factor  $E_v(X_v, \omega_v)$  は局所類体論を  
 用いて定義される。  $v \in C$  の点と可る時、  $v$  に対応する  $C$  の関  
 数体の completion を  $K_v$  と可る。  $\mathcal{F}$  は  $C^\circ$  上の étale sheaf である。  
 $K_v$  の abelian Galois 群  $\text{Gal}(K_v^{\text{ab}}/K_v)$  の character を定める  
 こと、これは、局所類体論を通じて、  $K_v^\times$  の character を定める  
 ことに  $\chi_v$  と置く。  $\chi_v$  が不収していることと可ると、  $\chi_v$  の

conductor  $c$  が  $\chi_v(1 + \pi_v^c \mathcal{O}_v) = 1$  となる最小の  $c$  として定  
 義される。  $\omega_v \in K_v$  の differential と可る時、  $\gamma_v = \pi_v^c \frac{\omega_v}{d\pi_v}$   
 により定義可る。 以上、  $\mathbb{F}_q$  の additive character  $\phi: \mathbb{F}_q \rightarrow \mathbb{C}^\times$

を fix する。  $\omega_v \in K_v$  の differential とする。 二つは、  $K_v$  の additive character  $\phi(*, \omega_v)$  を定める:

$$\phi(z, \omega_v) = \phi(\text{Tr}_{K_v/\mathbb{F}_q}(\text{Res}_v(z\omega_v))) \quad (z \in K_v).$$

もっとも上の関数等式が  $\mathbb{C}$  の adèle 上の Fourier 変換, Poisson の和公式から得られたい  $T = z$  に立ちかえり、  $z$  を  $\omega_v$  の local  $\varepsilon$ -factor として、次の様式積分で得られたい  $T = z$  となる。

Prop  $\chi_v$  は ramify する  $K_v^\times$  の character とする。 この時、

$$E_v(\chi_v, \omega_v) = \int_{\chi_v^{-1} O_v^\times} \chi_v^{-1}(z) \phi(z, \omega_v) d\mu(z)$$

で、  $O_v$  の Haar measure  $d\mu$  は  $d\mu(O_v) = 1$  で normalize されているものとする。

Frobenius の Determinant を計算する  $T$  への道具が与えられ、  $T$  の  $\mathbb{Z}$  上の具体的な  $\mathbb{P}^1$  上の sheaf を定義しよう。 欲しい sheaf は、 次の性質をもつものである。

$$t_v(F_v | H_c^1(C \otimes \mathbb{F}_q, \mathbb{Z})) = \sum_{\chi \in \mathbb{F}_q^\times} \prod_{i=1}^n \chi_i(N_v(z - \chi_i)) \phi(\text{Tr}(F_v(z)))$$

ここで、  $\chi_i (i=1, \dots, n)$  は  $\mathbb{F}_q^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$  への non-trivial character,  $\chi_i \in \mathbb{F}_q$ ,  $\phi$  は non-trivial である additive character,  $F_v(z) \in \mathbb{F}_q[z]$  である。 この sheaf  $\mathcal{F}$  は、 adèle の character  $\chi: A_K^\times / K^\times \rightarrow \mathbb{Q}_\ell^\times$  とし、  $\mathbb{Z}$  上の  $\mathbb{P}^1$  の open set 上の étale sheaf とし構成してみよう。

### (A) Adèle の character と 12.

(1) Tame symbol 今,  $\mathbb{P}^1$  の function field  $\mathbb{F}_q(x)$  と 12.

$u \in \mathbb{P}^1 \mapsto \mathbb{A}^1 \subset \mathbb{Z} \quad K_u^\times \longrightarrow \mathbb{Q}_\ell^\times \quad \mathbb{Z} \quad K_u^\times \ni y \mapsto \chi_i((x-x_i, y)_u) \in \mathbb{Q}_\ell^\times$

で定義可。  $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}''$ ,  $(x-x_i, y)_u$  は Tame symbol :

$$(x, y)_u = \prod_{\kappa(u)/\mathbb{F}_q} (-1)^{\text{ord}_u x \text{ord}_u y} \frac{x^{\text{ord}_u y}}{y^{\text{ord}_u x}} \pmod{\pi_u}$$

これは, reciprocity law (5.1)  $K^\times \subset \mathbb{A}^\times$  に対する  $\mathbb{A}^\times$  の character  $\chi_i^*$  を定める。

(2) Artin-Schreier character  $F(x) \in \mathbb{F}_q[x]$  と可。  $\phi_{F,u} :$

$K_u^\times \longrightarrow \mathbb{Q}_\ell^\times \quad \mathbb{Z}, \quad \phi_{F,u}(y) = \phi(\text{Tr}_{\kappa(u)/\mathbb{F}_q}(\text{Res}_u(F(x), \frac{dy}{y})))$

で定義可。これは, residue theorem (5.4),  $\mathbb{Z} \subset K^\times$  に対する  $\mathbb{A}^\times$  の character  $\phi_F$  を定める。

(1)(2) を使,  $\mathbb{Z}, X \subset$

$$\chi = \chi_1^* \cdots \chi_n^* \phi_F$$

で定める。

### (B) étale sheaf と 12

(1)  $\mathbb{P}^1$  上の  $(x-x_i)^{\frac{1}{q-1}}$  で定義される cyclic cover  $f_i :$

$X \longrightarrow \mathbb{P}^1$  を考え,  $((f_i)_* \mathbb{Q}_\ell)(\chi_i)$  で定義される sheaf  $\mathbb{Z}$ .

$\mathcal{F}_i^*$  とかく。

(2)  $A^1$  上の Lang sheaf  $\mathcal{L}\phi$   $\mathbb{Z}$ ,  $(\mathcal{P}^* \mathbb{Q}_\ell)(\phi)$  で定義可。

$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}''$ ,  $\mathcal{P}$  は,  $A^1 \ni x \mapsto \mathcal{P}(x) = x^q - x \in A^1$  で定義される  $\mathbb{F}_q$ -

étale-covering である。今  $F(x) \in \mathbb{F}_q[x]$  は  $A^1 \ni x \mapsto F(x) \in A^1$  なる morphism を定めよう。  $\mathcal{L}_{F, \phi}$  と  $F^* \mathcal{L}_{\phi}$  は  $0$  で  $\mathbb{P}^1$  に延長可能。

(1)(2) のとき、  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1^* \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_n^* \otimes \mathcal{L}_{F, \phi}$  と定める。

上の (A), (B) の構成法から  $\mathcal{F}$  と  $\chi$  は類体論を通じて対応している。

ここで  $\mathcal{F}$  の sheaf であることは character  $\chi$  の local  $\varepsilon$ -factor を計算してみよう。

### local $\varepsilon$ -factor の計算

(1) Tame place ( $v \leftrightarrow x = \lambda_i$ )

$$\begin{aligned} \varepsilon_v(\chi_v, dx) &= \int_{\pi_v^{-1} \mathcal{O}_v^\times} \chi_v(z)^{-1} \phi(z, dx) d\mu(z) \\ &= \int_{\mathcal{O}_v^\times} \chi_v((x - \lambda_i)^{-1} z)^{-1} \phi((x - \lambda_i)^{-1} z, dx) d\mu(z) \\ &= \chi_v(x - \lambda_i) \sum_{z \in \mathbb{F}_q^\times} \chi_v(z)^{-1} \phi(z) \\ &= \chi_i(-1) \prod_{j \neq i} \chi_j(\lambda_i - \lambda_j) \phi(F(\lambda_i)) \sum_{z \in \mathbb{F}_q^\times} \chi_i(z)^{-1} \phi(z) \end{aligned}$$

(2) Wild place ( $v = \infty$ )

上の積分を  $\mathbb{F}_q$  の  $\mathbb{F}_3$  に  $\mathbb{F}_3$  を添えれば、

$$\begin{aligned} \varepsilon_\infty(\chi_\infty, -\frac{dz}{z^2}) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{z = b_0(1 + b_1 \sqrt{3} + \cdots + b_d \sqrt{3}^d)} \prod_{i=1}^n \chi_i(b_0)^{-1} \times \phi(-\text{Res}(z \frac{dz}{z^2})) \\ &\quad \times \phi[\text{Res}(a_d \sqrt{3}^{-d} + \cdots + a_1 \sqrt{3}^{-1} + a_0) \left( (1-d) \frac{dz}{z} + \frac{dz}{z} \right)] \end{aligned}$$

和のうちの第三項目は、 $\phi$  の 17 が  $a_0 \sim a_d, b_0 \sim b_d$  の polynomial になるが、 $\phi$  は  $b_0 \in \text{fix } L$ 、 $b_1 \sim b_d$  に関する  $L$  加  $L$ 、消えるため  $b_0 = da_d$  となる  $L$  加  $L$  となる。和の外に出る結果、上式  $= \prod_{i=1}^n \chi_i(da_d)^{-1} \varepsilon_\infty(\varphi_{F,\infty}, -\frac{dZ}{3^2})$  と等しくなる。 $\varepsilon_\infty(\varphi_{F,\infty}, -\frac{dZ}{3^2})$  については、 $F: A^1 \rightarrow A^1$  についての、 $\mathcal{L}_{F,\phi}$  の higher direct image sheaf  $F_* \mathcal{L}_{F,\phi}$  と projection formula を使った、 $F_* \mathbb{Q}_\ell \otimes \mathcal{L}_\phi$  と書きかえる。rank=1 ではない時も  $\varepsilon$ -factor  $\varepsilon_n(F_* \mathcal{L}_{F,\phi}, dx)$  が定義できるといふが、これに関する性質を使う。  $\text{Gal}(\bar{K}_n/K_n) \rightarrow \text{GL}(d, \mathbb{Q}_\ell)$  に対応する  $\varepsilon$ -factor は、Lamson によって定義できるといふ。今、 $\mathcal{L}_{F,\phi}$  は  $x \in A^1$  については etale となる。

$$\varepsilon_\infty(\mathcal{L}_{F,\phi}, dx) = \prod_{u \in \mathbb{P}^1} \varepsilon_u(\mathcal{L}_{F,\phi}, dx)$$

また、Global として  $\mathbb{P}^1$  上の積公式により、local factor の積は rational differential  $a$  により与えられる。

$$\text{上式} = \prod_{u \in \mathbb{P}^1} \varepsilon_u(\mathcal{L}_{F,\phi}, f^* dx) = q^{d-1} \prod_{F(u)=0} \phi(F(u)) \varepsilon_\infty(\mathcal{L}_{F,\phi}, f^* dx)$$

induction に関する  $\varepsilon$ -factor の公式と、projection formula を使えば、上式の右辺の第三項目は、

$$\begin{aligned} & \varepsilon_\infty(F_* \mathcal{L}_{F,\phi}, dx) \varepsilon_\infty(\mathbb{Q}_\ell, F^* dx) \varepsilon_\infty(F_* \mathbb{Q}_\ell, dx)^{-1} \\ &= \varepsilon_\infty(F_* \mathbb{Q}_\ell \otimes \mathcal{L}_\phi, dx) \varepsilon_\infty(\mathbb{Q}_\ell, F^* dx) \varepsilon_\infty(F_* \mathbb{Q}_\ell, dx)^{-1} \end{aligned}$$

第一項目以外は容易だが、第一項目は、1 次指標の和に分解

