

回転球殻における熱対流渦柱の形成機構

地球フロンティア研究システム 北内英章 (Hideaki Kitauchi)
文部省核融合科学研究所 木田重雄 (Shigeo Kida)

概要

同一角速度で回転する2つの同心球に挟まれた Boussinesq 流体の熱対流運動によって生成される定常な Taylor-Proudman 渦柱の構造を、球殻の回転が速い場合（自転周期が熱拡散時間よりも十分小さい場合）について、数値解析により調べた。回転軸方向に伸ばされたコラム型のサイクロン渦柱（球殻の回転角速度と同じ方向の渦度成分をもつ渦柱）とアンチサイクロン渦柱が回転軸のまわりに交互に6組生成され、それらは相対的な位置を一定に保ちながら球殻よりも速く回転している。アンチサイクロン渦柱の赤道面上の渦度の大きさの極大値は、サイクロン渦柱のそれよりも大きい、前者の外球近傍の極大値は、後者のそれよりも小さい。サイクロン渦柱とアンチサイクロン渦柱の渦度の大きさの極大値の非対称性は、熱対流渦柱の形成機構で理解できる。

keywords: 回転球殻, Boussinesq 流体, 熱対流運動, Taylor-Proudman 渦柱

1 はじめに

回転する球（殻）内の熱対流運動は、太陽や地球などの自転する球状天体の大気や内部流体の運動、および磁気ダイナモなどに関連して、古くから興味ある問題である。Chandrasekhar [1] は、回転する球の内部に一様な熱源が分布し、球の中心方向に自己重力が作用している場合を詳細に調べた。回転軸に関して対称な攪乱に対する静止熱伝導状態の線形安定性解析より、その臨界値を求めた。Roberts [2] は、この研究を非軸対称攪乱にまで拡張し、軸対称攪乱よりも非軸対称攪乱の方がより不安定であることを示した。更に、球の回転が速い場合の漸近展開解析より、その臨界モードが回転軸を軸とする半径が球半径の約 $\frac{1}{2}$ の円筒面付近に局在することを示した。しかし、非軸対称攪乱は、速度場と温度場が赤道面に関して反対称な場合だけに限られていた。これに対して Busse [3] は、速度場と温度場が赤道面に関して対称な攪乱に対する臨界値を求め、反対称攪乱よりも対称攪乱の方がより不安定であることを示した。そして、その臨界モードが、回転軸のまわりに交互に並ぶ、回転軸方向に伸ば

されたサイクロン渦柱とアンチサイクロン渦柱で表されるということを、初めて模式的に示した。その後も、回転する球（殻）内の熱対流運動の線形安定性解析と漸近展開解析は、異なる境界条件、熱源分布、重力分布および種々のパラメーター（半径比, Prandtl 数, Rayleigh 数, Taylor 数）に対して精力的に行われているが、ここではその詳細は省略する（例えば, Takehiro and Hayashi [4] 参照）。

これまでに我々は、球殻の回転が遅い場合（自転周期と熱拡散時間が同じオーダー）について、Navier-Stokes 方程式の直接数値シミュレーションより、流れ場の 3 次元立体構造を調べた [5],[6]。球殻に沿うように曲げられたバナナ型のサイクロン渦柱とアンチサイクロン渦柱が回転軸のまわりに交互に 5 組形成され、それらは相対位置を一定に保ちながら球殻よりも遅く回転している。アンチサイクロン渦柱の赤道面上の渦度の大きさの極大値は、サイクロン渦柱のそれよりも大きい。この渦度の大きさの相違は、両渦柱内の上下流によってもたらされる渦柱の伸縮で理解できた [7]。更に、我々は、この問題を磁気流体に拡張し、その数値解析より、3 次元磁場構造 [8]、磁場生成メカニズム [9]、および磁場反転 [10],[11] を調べたところ、これらが渦構造と非常に密接な関係にあることがわかった。

そこで、本研究では、地球の外核のように、自転周期が熱拡散時間（外核の場合、約 1 年 [12]）よりも十分小さい場合、すなわち、球殻の回転が速い場合について、渦構造と渦形成メカニズムを調べる。

2 基礎方程式系

同一角速度 Ω で回転する半径 $r_1, r_2 (= r_1 + d)$ の同心球に挟まれた Boussinesq 流体の熱対流運動を考える（図 2）。密度 ρ の流体要素には単位体積あたり $\mathbf{g} = -\rho\gamma\mathbf{r}$ (γ は比例定数) の重力が作用しているとする。ただし $\mathbf{r}$ は球の中心を始点とする位置ベクトルである。内球と外球はそれぞれ一様な一定温度に保たれ、内球の方が外球よりも ΔT だけ高温であるとする。この温度差によって熱対流運動が駆動される。Boussinesq 近似のもとで、球とともに回転する系から見た流体の速度 $\mathbf{u}$ と温度 T の発展方程式は、

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla P + P_r R_a T \mathbf{r} + \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) + P_r T_a^{\frac{1}{2}} \mathbf{u} \times \hat{\mathbf{z}} + P_r \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \cdot (\mathbf{u} T) + \nabla^2 T, \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3)$$

である。ただし、 $P = p/\rho + \frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2 + \frac{1}{2}\gamma|\mathbf{r}|^2 - \frac{1}{2}|\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}|^2$ は修正圧力 (p は真の圧力), $\hat{\mathbf{z}} = \boldsymbol{\Omega}/|\boldsymbol{\Omega}|$ は回転軸方向の単位ベクトルである。すべての変数は、球殻の厚み d と熱拡散時間 d^2/κ (κ は熱伝導率) と両境界の温度差 ΔT で無次元化してある。そのため3つの無次元のパラメータ,

$$P_r = \frac{\nu}{\kappa}, \quad R_a = \frac{\alpha\gamma\Delta T d^4}{\kappa\nu}, \quad T_a = \left(\frac{2|\boldsymbol{\Omega}|d^2}{\nu}\right)^2 \quad (4)$$

現れる。それぞれ Prandtl 数, Rayleigh 数, Taylor 数と呼ぶ。ただし、 ν は動粘性率, α は熱膨張率である。両球面上で速度に粘着条件を課す。したがって、境界条件は、

$$\mathbf{u} = \mathbf{o}, \quad T = 1 \quad \left(r = r_1 \left(\equiv \frac{\eta}{1-\eta} \right) \text{ で} \right), \quad (5)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{o}, \quad T = 0 \quad \left(r = r_2 \left(\equiv \frac{1}{1-\eta} \right) \text{ で} \right) \quad (6)$$

である。ただし $\eta = r_1/r_2$ は半径比である。境界条件 (5) と (6) のもとで、方程式 (1)–(1) を、スペクトル法を用いて数値的に解く ([5] 参照)。初期条件は、静止熱伝導解

$$\mathbf{u} = \mathbf{o}, \quad T = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2} \right) / \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)^{-1} \quad (7)$$

に速度と温度の一樣微小攪乱を加えたものとする。無次元パラメータは、球殻の回転が速い場合、すなわち、自転周期が熱拡散時間よりも十分小さい場合として、

$$P_r = 1.0, \quad R_a = 1.6 \times 10^4, \quad T_a = 1.6 \times 10^6, \quad \eta = 0.5 \quad (8)$$

に設定した。この時、基本場 (7) は、微小攪乱に対して不安定となる。

3 流れ場の構造

3.1 渦構造

図 3.1 は、流れ場が定常状態 (運動エネルギー $\mathcal{E}_K = 293$) に達したときの渦度の大きさの等値面 $|\boldsymbol{\omega}| = 40 (\max_{1.15r_1 \leq r \leq 0.91r_2} |\boldsymbol{\omega}| = 82)$ を、北半球低緯度から眺めた図である。黒色がサイクロン渦柱、灰色がアンチサイクロン渦柱である。球殻の回転軸方向に伸ばされたコラム型の両渦柱が、回転軸のまわりに交互に6組形成され、それらは相対位置を不変に保ちながら角速度 2.16 で球殻よりも速く回転している (球殻の回転角速度は、632)。Taylor-Proudman の定理が、よく成立している様子がわかる。Takehiro and Hayashi [4] は、この球

殻の回転が速い場合の渦柱の球に対する東方移動と、はじめに述べた回転が遅い場合の渦柱の西方移動を、コラム型とバナナ型という渦構造の相違に着目し、渦柱の伸縮で説明している。この図では、内球面近傍 ($r_1 \leq r \leq 1.15r_1$) と外球面近傍 ($0.91r_2 \leq r \leq r_2$) に形成される境界層内の高渦度領域 ($\max_{r_1 \leq r \leq 1.15r_1} |\omega| = 200, \max_{0.91r_2 \leq r \leq r_2} |\omega| = 338$) は、球殻内部にある渦柱がよく見えるように取り除いてある (図 3.1 参照)。次節でわかるように、この高渦度の境界層は、Coriolis 力と粘性力が釣り合う Ekman 境界層である。速度場は、赤道面に関して対称、回転軸に関して 6 回対称である。また、ヘリシティ密度 $|\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega}|$ の大きい領域は、北半球で負、南半球で正である。

渦構造をより詳細に理解するために、北半球の経度が $\frac{2}{3}\pi$ 領域内の渦度の大きさの極大点 (P1~P13) を図 3.1 に、極大値 $|\omega|$, 球座標成分 ($\omega_r, \omega_\theta, \omega_\phi$), および直角座標成分 ($\omega_x, \omega_y, \omega_z$) を表 3.1 に示した。渦度場は、赤道面に関して反対称、回転軸に関して 6 回対称であるので、極大点 P1~P13 に着目すれば十分である。P1 と P2 は、赤道面上にあり、それぞれサイクロン渦柱とアンチサイクロン渦柱の内部にある。渦度成分は、回転軸方向しかもたない。はじめに述べた球殻の回転が遅い場合と同じように、アンチサイクロン渦柱 (P2) の赤道面上の渦度の大きさの極大値 (71.2) は、サイクロン渦柱 (P1) のそれ (61.9) よりも大きい。P3 と P4 は、外球面近傍にあり、それぞれサイクロン渦柱とアンチサイクロン渦柱の内部にある。実際、渦度成分は、回転軸方向に卓越している。アンチサイクロン渦柱 (P4) の外球面近傍の極大値 (79.0) は、サイクロン渦柱 (P3) のそれ (81.9) よりも小さい。この外球面近傍の両渦柱の渦度の大きさの極大点は、回転が遅い場合には見られなかった構造である。しかも、その極大値の大小関係が、赤道面上の極大値とは逆になっている。次節で明らかになるように、これらの渦柱の強さの相違は、渦の伸縮で理解できる。P5 と P6 は、内球面の赤道面上にあり、それぞれサイクロン渦柱とアンチサイクロン渦柱の内側にある。渦度成分は、回転軸方向しかもたない。この極大点付近は、内球面近傍に形成される境界層内の高渦度領域を構成している (極大値参照)。P7 と P8 は、外球面上にあり、それぞれサイクロン渦柱とその西隣のアンチサイクロン渦柱の間、サイクロン渦柱とその東隣のアンチサイクロン渦柱の間にある。この極大点付近は、外球面近傍に形成される境界層内の高渦度領域を構成している (極大値参照)。P9 と P10~P13 は、中緯度付近にあり、それぞれサイクロン渦柱とアンチサイクロン渦柱の内部にある。実際、渦度成分は、回転軸方向に卓越している。これらの極大値は、それらが含まれる渦柱の外球近傍の極大値 (P3 と P4) よりも小さい。そこで、両渦柱の構造を特

微づける渦度の大きさの極大点として, P1,P2,P3,P4 を選び (図 3.1参照), 次節で, 両渦柱の強さの相違の原因とその形成機構を調べる.

点	$ \omega $	ω_r	ω_θ	ω_ϕ	ω_x	ω_y	ω_z
P1	61.9	0.00	-61.9	0.00	0.00	0.00	61.9
P2	71.2	0.00	71.2	0.00	0.00	0.00	-71.2
P3	81.9	73.1	-36.9	-2.67	-24.1	-9.26	77.8
P4	79.0	-57.3	48.9	23.9	-0.83	-24.1	-75.3
P5	200	0.00	200	0.00	0.00	0.00	-200
P6	181	0.00	-181	0.00	0.00	0.00	181
P7	305	0.00	257	-164	-221	112	-178
P8	338	0.00	-289	175	153	-229	196
P9	70.1	59.8	-35.8	7.91	-20.4	-19.9	64.1
P10	67.3	-61.4	25.6	-10.4	29.6	8.08	-59.9
P11	64.3	-53.6	33.5	-11.8	24.7	9.44	-58.6
P12	62.5	-47.6	38.0	-14.0	22.0	11.9	-57.3
P13	61.7	-36.5	46.8	-16.7	14.5	15.0	-58.1

表 1: 渦度の大きさの極大点 P1~P13 における極大値 $|\omega|$, 球座標成分 $(\omega_r, \omega_\theta, \omega_\phi)$, および直角座標成分 $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$.

3.2 渦形成メカニズム

両渦柱の強さの相違の原因とその形成機構を究明するために, サイクロン渦柱の極大点 P1,P3 を通る直線 P1-P3 とアンチサイクロン渦柱の極大点 P2,P4 を通る直線 P2-P4 に沿って (図 3.2参照), 渦度方程式 (運動方程式 (1) の回転)

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = P_r R_a \nabla T \times \mathbf{r} + \underline{s} \cdot \omega - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega + P_r T_a^{\frac{1}{2}} \hat{z} \cdot \nabla \mathbf{u} + P_r \nabla^2 \omega \quad (9)$$

の右辺各項の相対的な大きさを比較する. ただし, $\underline{s}$ は, ひずみ速度テンソル

$$\underline{s} = \{s_{ij}\}, \quad s_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (i, j = x, y, z) \quad (10)$$

である. 渦度方程式 (9) の右辺第 1 項を浮力項 $\mathbf{B}$, 第 2 項を伸張項 $\mathbf{S}$, 第 3 項を移流項 $\mathbf{A}$, 第 4 項を Coriolis 項 $\mathbf{C}$, 第 5 項を粘性項 $\mathbf{V}$ と呼ぶ.

図 3.2 と図 3.2 は, それぞれ直線 P1-P3 と直線 P2-P4 に沿って, 渦度の大きさ, 球座標成分, および直角座標成分をプロットしたグラフである. 各グラフの左端が赤道面, 右端が外球

面である。外球面付近の薄い (Ekman) 境界層を除いて、渦度の回転軸方向の成分 ω_z が、他の成分よりも一様に卓越している。そこで、渦度方程式 (9) の右辺各項の渦柱形成への寄与を評価するためには、それらの回転軸方向成分の相対的な大きさを比較するのが適当である。

直線 P1-P3 と直線 P2-P4 に沿って、渦度と各項の回転軸方向成分を、図 3.2 にプロットした。比較しやすいように、アンチサイクロン渦柱 ($\omega_z < 0$) に沿う物理量には、 -1 をかけてある。赤道面上の極大点では、アンチサイクロン渦柱の方がサイクロン渦柱よりも強いが、外球面近傍の極大点では、逆にサイクロン渦柱の方が強い (図 3.2(a))。これらの極大点で、浮力項、Coriolis 項、および粘性項は、両渦柱で同符号となっている (図 3.2(b),(d))。すなわち、赤道面上の極大点では、浮力項は渦度の増加に、Coriolis 項と粘性項は渦度の減少に寄与している。一方、外球面近傍の極大点では、浮力項と Coriolis 項が渦度の増加に、粘性項が渦度の減少に寄与している。伸張項は、赤道面上 (外球面近傍) では、アンチサイクロン渦柱で渦度の増加 (減少) に、サイクロン渦柱で渦度の減少 (増加) に寄与している。これは、アンチサイクロン渦柱では上昇流のため、赤道面 (外球面) 近傍では渦の伸張 (収縮) が生じ、逆に、サイクロン渦柱では下降流のため、渦の収縮 (伸張) が生じるためである。移流項は、他の 4 つ項と比べて十分小さい。これは、今考えている点が、渦度の極大点であることから明らかである。

サイクロン渦柱とアンチサイクロン渦柱のこれらの極大点における、渦度と渦度方程式各項の値を表 3.2 に示した。伸張項が、赤道面上 (外球面近傍) の極大点で、サイクロン渦柱では負 (正)、アンチサイクロン渦柱では正 (負) となっている。この違いが、赤道面上のアンチサイクロン渦柱の強度をサイクロン渦柱より大きくし、外球面近傍のサイクロン渦柱の強度をアンチサイクロン渦柱より大きくしているのである。

渦柱形成の主要因は、両渦柱で、赤道面付近では浮力項、外球面近傍では Coriolis 項である。前者は、Rayleigh-Bénard 対流で理解できる。すなわち、両渦柱の回転による対流運動は、各渦柱間に高温部と低温部を交互につくる。そのため、サイクロン渦柱とアンチサイクロン渦柱を横切って温度勾配が生じ、いずれも渦柱の回転を助長する方向にトルクを発生するからである。後者は、Ekman バンピングで理解できる。図 3.2(d) より、外球面付近では、Coriolis 項と粘性項がほぼ釣り合っているので、前節で述べたように Ekman 境界層が形成されている。そのため、Ekman バンピングによって、サイクロン渦柱では、柱の外から中心に向かう流れが、アンチサイクロン渦柱では、柱の中心から外に向かう流れが生じている。こ

これらの流れは、Coriolis 力によって、球殻の回転とは反対の方向に曲げられるので、両渦柱の回転を助長する方向にトルクを与えることがわかる。最後に、粘性項は、いずれの極大点でも負である。これは、渦柱の成長を抑えて、定常状態に保つ役割を果たしている。

	ω_z	B_z	S_z	A_z	C_z	V_z
P1	61.9	12.3	-0.31	0.05	-6.39	-5.69
P2	71.2	12.6	0.36	0.02	-6.43	-6.54
P3	77.8	0.51	0.65	-0.03	11.2	-12.2
P4	75.3	0.75	-1.19	0.02	27.7	-27.4

$\times 10^3$

表 2: 渦度の大きさの極大点 P1~P4 における渦度 ω_z と浮力項 B_z , 伸張項 S_z , 移流項 A_z , Coriolis 項 C_z , および粘性項 V_z の値. アンチサイクロン渦柱内部の物理量には, -1 をかけてある.

4 結論

本研究では、回転球殻における熱対流渦柱を運動方程式の直接数値シミュレーションで実現し、その形成機構を渦度方程式各項の相対的な大きさを比較することによって調べた。これは、Kitauchi and Kida [7] で、球殻の回転をより速くした場合に相当している。

回転軸方向に伸ばされたコラム型のサイクロン渦柱とアンチサイクロン渦柱が、回転軸のまわりに交互に 6 組形成された。このような渦柱形成の、赤道面付近での主要因は、回転が遅い場合と同様、浮力によるトルクであることを確認した。一方、回転が遅い場合には弱かった、外球面近傍の渦柱形成の主要因は、Ekman パンピングによって生じる流れ (Ekman らせん) に働く、Coriolis 力によるトルクであることがわかった。この Ekman パンピングによって、サイクロン渦柱では外球面から赤道面に向かう下降流が生じ、アンチサイクロン渦柱では赤道面から外球面に向かう上昇流が生じている。この上下流は渦柱の伸縮を伴い、赤道面付近では、アンチサイクロン渦柱の渦度がサイクロン渦柱より大きくなり、外球面近傍では、サイクロン渦柱の渦度がアンチサイクロン渦柱より大きくなる。

謝辞

使用計算機は、文部省核融合科学研究所理論・シミュレーション研究センターの NEC SX3 である。

参考文献

- [1] S. Chandrasekhar, *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability* (Dover, New York, 1968).
- [2] P. H. Roberts, "On the thermal instability of a rotating-fluid sphere containing heat sources," *Phil. Trans. A* **263**, 93 (1968).
- [3] F. H. Busse, "Thermal instability in rapidly rotating systems," *J. Fluid Mech.* **44**, 441 (1970).
- [4] S. Takehiro and Y. Hayashi, "Mean zonal flows excited by critical thermal convection in rotating spherical shells," *J. Fluid Mech.* (1998).
- [5] H. Kitauchi, K. Araki, and S. Kida, "Flow structure of thermal convection in a rotating spherical shell," *Nonlinearity* **10**, 885 (1997).
- [6] S. Kida and H. Kitauchi, "Thermally driven MHD dynamo in a rotating spherical shell," *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **130**, 121 (1998).
- [7] H. Kitauchi and S. Kida, "回転球環熱対流", 京都大学数理解析研究所講究録 **892**, 263 (1995).
- [8] H. Kitauchi, "Topological structure of magnetic flux lines generated by thermal convection in a rotating spherical shell," *J. Phys. Soc. Jpn.* **67**, 1243 (1998).
- [9] H. Kitauchi and S. Kida, "Intensification of magnetic field by concentrate-and-stretch of magnetic flux lines," *Phys. Fluids* **10**, 457 (1998).
- [10] S. Kida, K. Araki, and H. Kitauchi, "Periodic reversals of magnetic field generated by thermal convection in a rotating spherical shell," *J. Phys. Soc. Jpn.* **66**, 2194 (1997).
- [11] S. Kida and H. Kitauchi, "Chaotic reversals of dipole moment of thermally driven magnetic field in a rotating spherical shell," *J. Phys. Soc. Jpn.* **67**, 2950 (1998).

- [12] R. Jeanloz, “The nature of the Earth’s core,” *Annu. Rev. Earth Planet. Sci.* **18**, 357 (1990).

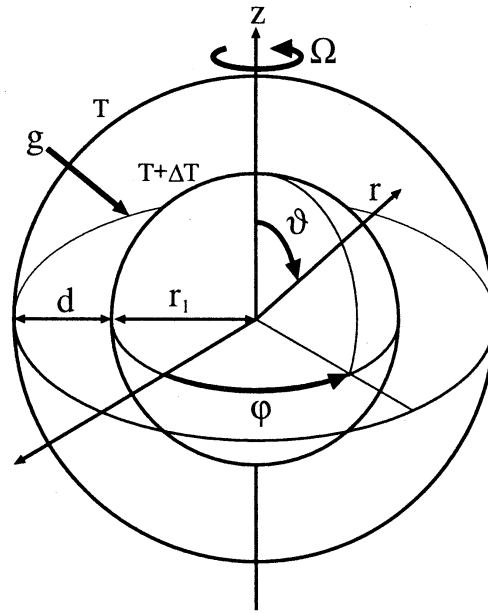


図 1: シミュレーションモデル.

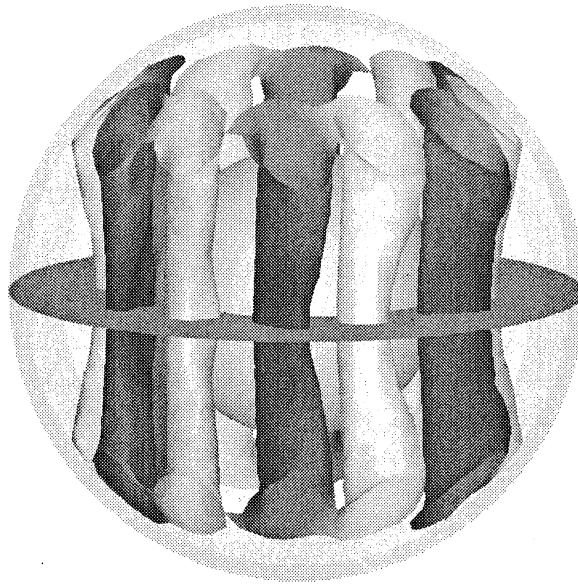


図 2: 渦度の大きさの等値面 $|\omega| = 40$ を北半球低緯度から眺めた図. 黒色が渦度の回転軸方向成分 $\omega_z > 0$, 灰色が $\omega_z < 0$ を表す. この図では, 内球面近傍と外球面近傍に形成される境界層内の高渦度領域は, 取り除いてある ($1.15r_1 \leq r \leq 0.91r_2$).

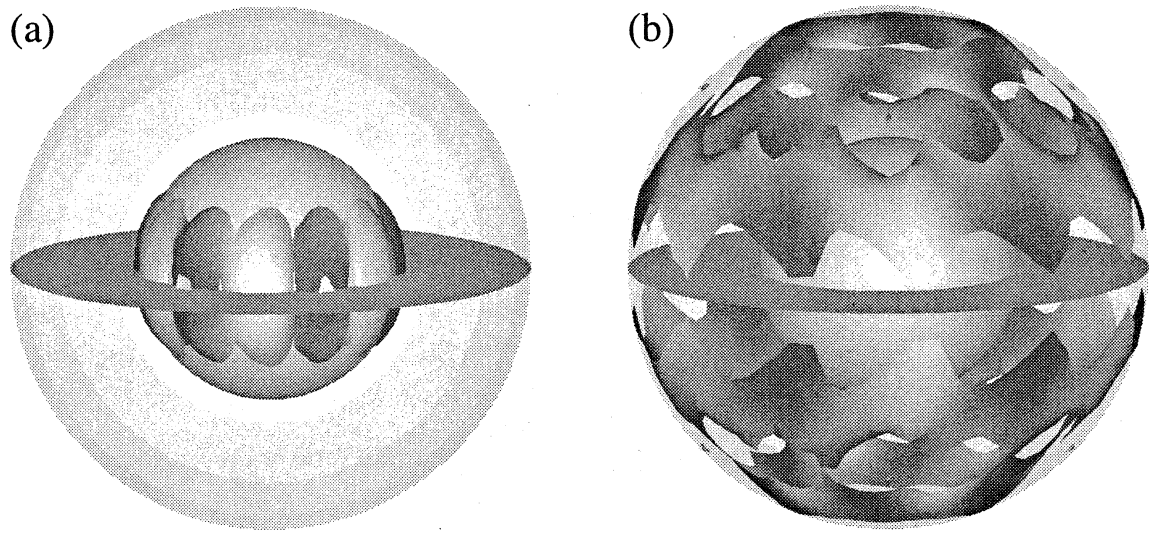


図 3: (a) 内球面近傍 ($r_1 \leq r \leq 1.15r_1$) と (b) 外球面近傍 ($0.91r_2 \leq r \leq r_2$) の渦度の大きさの等値面 $|\omega| = 40$ を北半球低緯度から眺めた図.

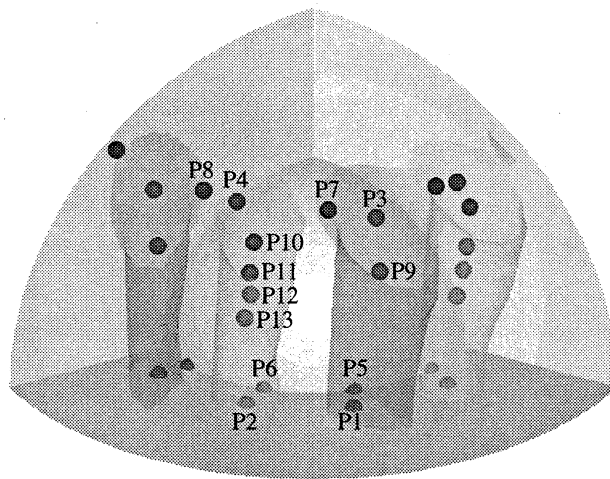


図 4: 北半球の経度が $\frac{2}{3}\pi$ 領域内の渦度の大きさの極大点 (P1~P13) と等値面 $|\omega| = 40$.

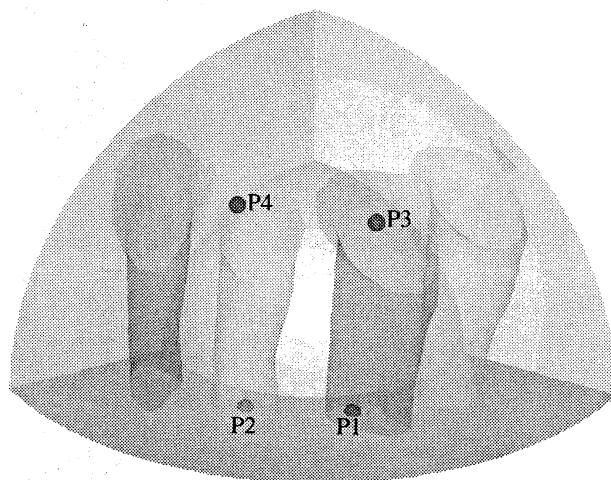


図 5: 渦度の大きさの代表点 $P1, P2, P3, P4$ と等値面 $|\omega| = 40$.

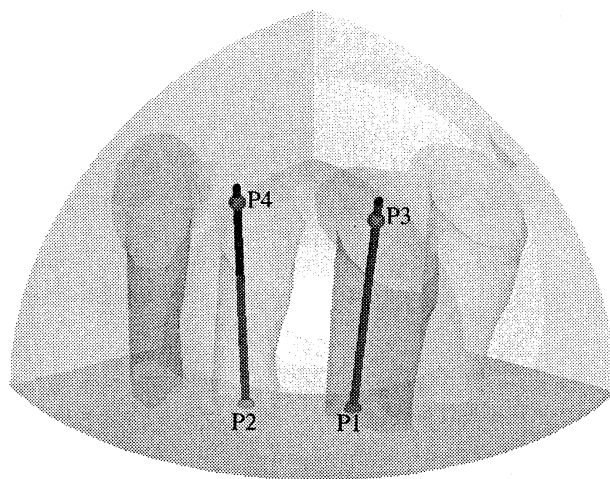


図 6: サイクロン渦柱の極大点 $P1, P3$ を通る直線 $P1-P3$ とアンチサイクロン渦柱の極大点 $P2, P4$ を通る直線 $P2-P4$.

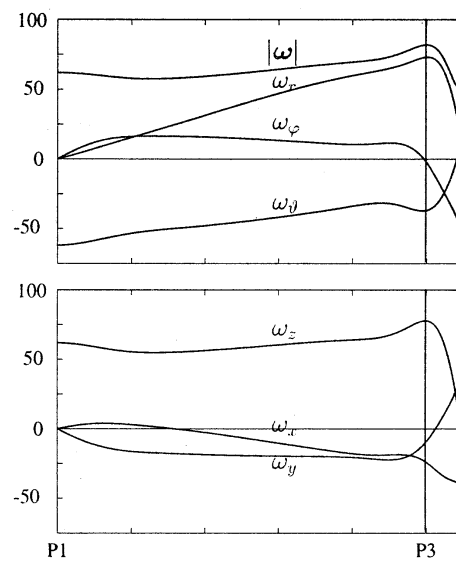


図 7: 直線 P1-P3 に沿った, 渦度の大きさ $|\omega|$, 球座標成分 $(\omega_r, \omega_\theta, \omega_\phi)$, および直角座標成分 $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ の変化. グラフの左端が赤道面, 右端が外球面を表す.

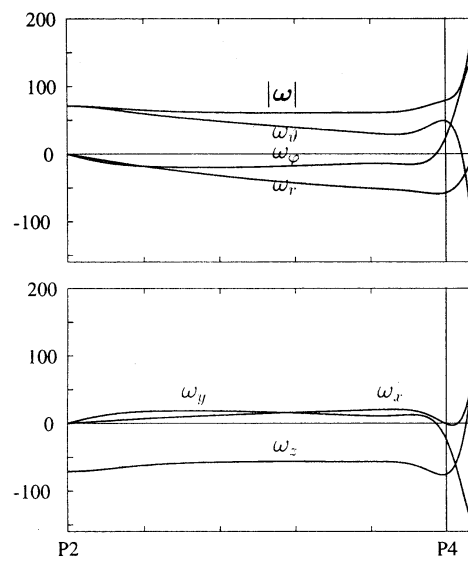


図 8: 直線 P2-P4 に沿った, 渦度の大きさ $|\omega|$, 球座標成分 $(\omega_r, \omega_\theta, \omega_\phi)$, および直角座標成分 $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ の変化. グラフの左端が赤道面, 右端が外球面を表す.

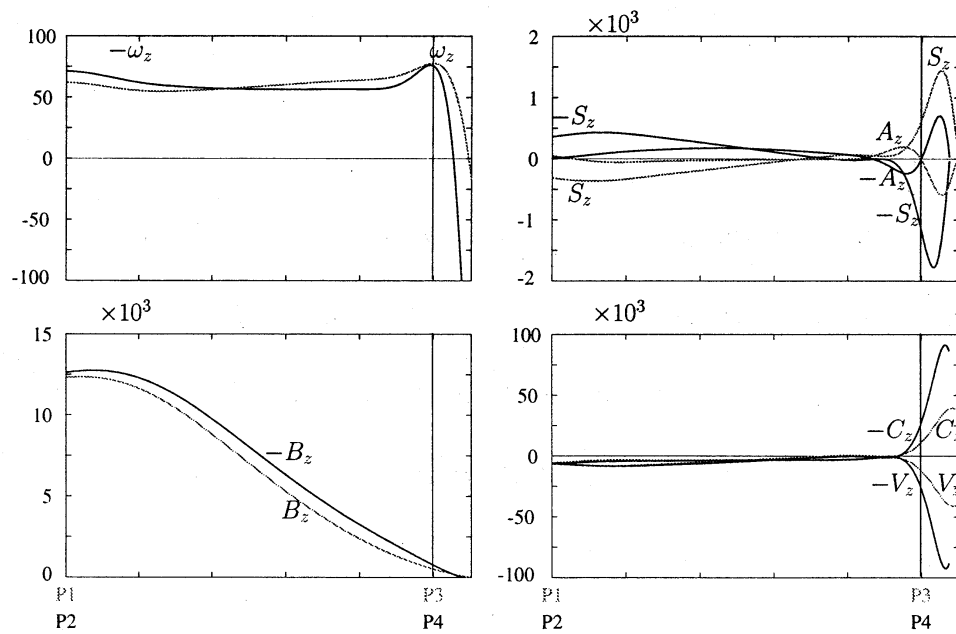


図 9: 直線 P1-P3 と直線 P2-P4 に沿った, (a) 渦度 ω_z と (b) 浮力項 B_z , (c) 伸張項 S_z , 移流項 A_z , (d) Coriolis 項 C_z , および粘性項 V_z の変化. アンチサイクロン渦柱に沿う物理量には, -1 をかけてある.