

表面拡散方程式と平均曲率一定曲面

高坂良史¹

(神戸大学大学院海事科学研究科)

1 序章

$\Gamma_t \subset \mathbb{R}^3$ は時刻 t とともに発展する動曲面とし, その動きは

$$V = -\Delta_{\Gamma_t} H \text{ on } \Gamma_t \quad (1)$$

によって支配されているとする. ここで, V は Γ_t の法速度, H は Γ_t の平均曲率, Δ_{Γ_t} は Γ_t 上の Laplace-Beltrami 作用素である. (1) は表面拡散方程式と呼ばれる. 表面拡散方程式 (1) が最初に紹介されたのは Mullins[9] の論文であり, 空間変数が 1 次元の場合の表面拡散方程式が導出されている. また, [9] では空間変数が 1 次元の場合の平均曲率流 $V = H$ も紹介されている. [9] では対称性をもつ粒界溝の挙動の支配法則について考察し, 界面を時間発展する曲線 $\Gamma_t = \{(x, y(x, t)) \mid x > 0, t > 0\}$ と考え, まず粒界溝の挙動が蒸発と凝集による原子の再配置によって起こる場合に, 粒界溝の挙動を記述する運動方程式として

$$y_t = \frac{y_{xx}}{1 + y_x^2}$$

を導出した (ここでは, 簡単のため物理定数は 1 とする). 曲線 Γ_t の法速度 V と曲率 κ がそれぞれ

$$V = \frac{y_t}{\sqrt{1 + y_x^2}}, \quad \kappa = \frac{y_{xx}}{(1 + y_x^2)^{3/2}}$$

と表されることから, この微分方程式は曲率流方程式 $V = \kappa$ (空間変数 1 次元の場合の平均曲率流方程式) を意味する. 一方, 結晶原子が結晶表面を拡散によって移動することで原始の再配置が生じる場合は, 粒界溝の挙動を記述する運動方程式として

$$y_t = -\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\sqrt{1 + y_x^2}} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{y_{xx}}{(1 + y_x^2)^{3/2}} \right\} \right]$$

を導出した (上記と同様に物理定数は 1). 曲線の弧長パラメータに関する微分が

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{\sqrt{1 + y_x^2}} \frac{\partial}{\partial x}$$

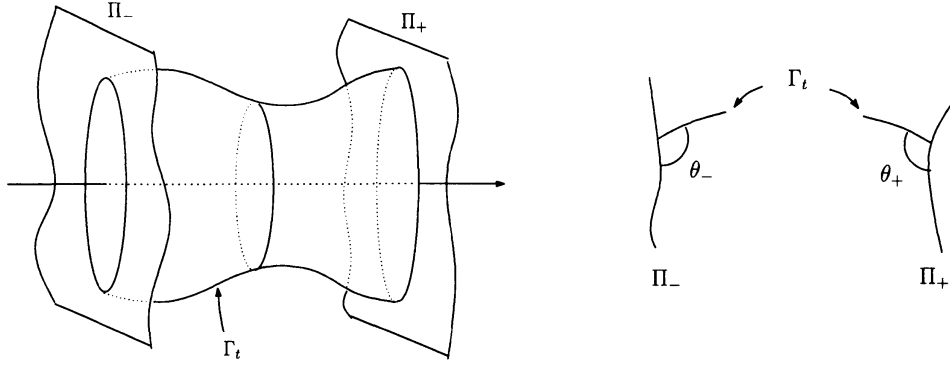
と表せることから, この微分方程式は空間変数 1 次元の場合の表面拡散方程式を意味する. また, 表面拡散方程式 (1) は Cahn, Taylor[11] によって, Γ_t の表面積の H^{-1} 勾配流として得られることが示されている. その概略については, 第 2 章で紹介する. さらに, 反応拡散方程式との関係としては, Cahn, Elliott, Novick-Cohen[2] によって, 易動度が秩序パラメータに依存し, ポテンシャルが対数関数である Cahn-Hilliard 方程式の特異極限として得られることが形式的に示されている.

本稿では, 次の問題を考える. 今, $\phi_{\pm} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ に対して,

$$\Pi_{\pm} = \{(\phi_{\pm}(|\eta|), \eta)^T \mid \eta \in \mathbb{R}^2\}$$

とおく.

¹e-mail: kohsaka@maritime.kobe-u.ac.jp



このとき、動曲面 Γ_t は Π_- と Π_+ の間に存在し、 Γ_t の挙動は以下によって支配されているとする。

$$\begin{cases} V = -\Delta_{\Gamma_t} H & \text{on } \Gamma_t, \\ (N, \nu_{\pm})_{\mathbb{R}^3} = \cos \theta_{\pm} & \text{on } \Gamma_t \cap \Pi_{\pm}, \\ (\nabla_{\Gamma_t} H, \nu_{\pm})_{\mathbb{R}^3} = 0 & \text{on } \Gamma_t \cap \Pi_{\pm}, \\ \Gamma_t|_{t=0} = \Gamma_0. \end{cases} \quad (2)$$

ここで、 N は Γ_t の外向きの単位法線ベクトルであり、 $\nu_{\pm}$ は $\Pi_{\pm}$ の外向きの単位法線ベクトルを表す。このとき、(2) の定常解を Γ_* とすると、 Γ_* の平均曲率 H_* は以下を満たす。

$$\begin{cases} \Delta_{\Gamma_*} H_* = 0 & \text{on } \Gamma_*, \\ (\nabla_{\Gamma_*} H_*, \nu_{\pm})_{\mathbb{R}^3} = 0 & \text{on } \Gamma_* \cap \Pi_{\pm}. \end{cases}$$

したがって、

$$\|\nabla_{\Gamma_*} H_*\|_{L^2(\Gamma_*)}^2 = 0$$

を得るので、(2) の定常解は平均曲率一定曲面となる。本稿では、軸対称な平均曲率一定曲面である Delaunay 曲面を (2) の定常解 Γ_* としてとらえ、 Γ_* からの軸対称な摂動のもとで (2) を考える。その線形化問題に対応する固有値問題を解析することで、(2) の定常解としての Delaunay 曲面の安定性について得られた結果を紹介する。第3章で述べるように Delaunay 曲面は5種類あるが、本稿では円柱とアンデューロイドの場合についてのみ、解析することにする。

2 勾配流

表面拡散方程式の勾配流の構造についてその概略を述べる。今、 Γ は閉曲面とし、 Γ の表面積を $\text{Area}[\Gamma]$ と表すことにする。このとき、 $\text{Area}[\Gamma]$ の第1変分 $\delta \text{Area}[\Gamma]$ は

$$\delta \text{Area}[\Gamma](\phi) = - \int_{\Gamma} H \phi \, dS \quad (\phi \in E)$$

で与えられる。ただし、 E は Hilbert 空間であり、この後に設定する。ここで、 $\delta \text{Area}[\Gamma](\phi)$ は線形汎関数であるから、Riez の表現定理より

$$\delta \text{Area}[\Gamma](\phi) = (\nabla_E \text{Area}[\Gamma], \phi)_E$$

となる $\nabla_E \text{Area}[\Gamma]$ が存在する. 一方, 動曲面 Γ_t の表面積 $\text{Area}[\Gamma_t]$ の t に関する微分を求めると,

$$\frac{d}{dt} \text{Area}[\Gamma_t] = - \int_{\Gamma_t} HV \, dS_t$$

で与えられる. したがって, $\Gamma = \Gamma_t$ とし, $\phi = V (\in E)$ とすると,

$$\frac{d}{dt} \text{Area}[\Gamma_t] = (\nabla_E \text{Area}[\Gamma_t], V)_E$$

を得る. よって, Γ_t の挙動が $V = -\nabla_E \text{Area}[\Gamma_t]$ によって支配されるとき,

$$\frac{d}{dt} \text{Area}[\Gamma_t] = -\|\nabla_E \text{Area}[\Gamma_t]\|_E^2 \leq 0$$

が成り立つ. 方程式 $V = -\nabla_E \text{Area}[\Gamma_t]$ を, $\text{Area}[\Gamma_t]$ の E に関する勾配流方程式という.

• E が $L^2(\Gamma_t)$ の場合

$$(\nabla_E \text{Area}[\Gamma_t], \phi)_E = \int_{\Gamma_t} \nabla_E \text{Area}[\Gamma_t] \phi \, dS_t$$

であるから,

$$\nabla_E \text{Area}[\Gamma_t] = -H.$$

よって, $L^2(\Gamma_t)$ に関する勾配流方程式は, 平均曲率流方程式

$$V = H \text{ on } \Gamma_t$$

となる.

• E が積分平均 0 の $L^2(\Gamma_t)$ 関数全体の場合

$\phi \in E$ に対して,

$$\int_{\Gamma} H \phi \, dS = \int_{\Gamma} (H - H_{av}) \phi \, dS$$

と変形できる. ただし,

$$H_{av} = \frac{1}{\text{Area}[\Gamma]} \int_{\Gamma} H \, dS.$$

よって,

$$\nabla_E \text{Area}[\Gamma_t] = -(H - H_{av})$$

を得るので, この場合の勾配流方程式は, 体積保存型平均曲率流方程式

$$V = H - H_{av} \text{ on } \Gamma_t$$

となる.

(注) この場合, $V \in E$ であるから, V の積分平均は 0 である. Γ_t に囲まれた部分の体積を $\text{Vol}[\Gamma_t]$ と表すことにすると,

$$\frac{d}{dt} \text{Vol}[\Gamma_t] = \int_{\Gamma_t} V \, dS_t$$

となるので, $V \in E$ であるとき, Γ_t の体積は保存される (t に依らず一定である).

• E が積分平均 0 の $(H^1(\Gamma_t))^* (= H^1(\Gamma_t)$ の双対空間) 関数全体の場合
この場合の E の内積は、形式的には次で与えられる。

$$(\phi_1, \phi_2)_E = \int_{\Gamma} \{(-\Delta_{\Gamma})^{-1} \phi_1\} \phi_2 dS.$$

よって,

$$(\nabla_E \text{Area}[\Gamma_t], \phi)_E = \int_{\Gamma_t} \{(-\Delta_{\Gamma})^{-1} \nabla_E \text{Area}[\Gamma_t]\} \phi dS_t$$

となるので,

$$(-\Delta_{\Gamma})^{-1} \nabla_E \text{Area}[\Gamma_t] = -(H - H_{av}).$$

したがって,

$$\nabla_E \text{Area}[\Gamma_t] = \Delta_{\Gamma} H$$

を得るので、この場合の勾配流方程式は、表面拡散方程式

$$V = -\Delta_{\Gamma_t} H \text{ on } \Gamma_t$$

となる。

3 平均曲率一定曲面

Γ_* を (2) に対する軸対称な定常曲面とし,

$$\Gamma_* = \{(x_*(s), y_*(s) \cos \theta, y_*(s) \sin \theta)^T \mid s \in [0, d], \theta \in [0, 2\pi]\}$$

とおく。ただし、 s は生成曲線 $(x_*(s), y_*(s))$ の弧長パラメータである。与えられた平均曲率 H_* をもつ生成曲線 $(x_*(s), y_*(s))$ は以下で表される。

定理 3.1 (剣持の表現公式 [8])

s を弧長パラメータとし、 $H_* = H_*(s)$ は s に関して連続とする。このとき、 H_* を平均曲率にもつ回転面の生成曲線 $(x_*(s), y_*(s))$ は

$$\begin{aligned} x_*(s) &= \int_0^s \frac{F'(\sigma)(G(\sigma) + c_2) - G'(\sigma)(F(\sigma) + c_1)}{\sqrt{(F(\sigma) + c_1)^2 + (G(\sigma) + c_2)^2}} d\sigma + c_3 \\ y_*(s) &= \sqrt{(F(s) + c_1)^2 + (G(s) + c_2)^2} \end{aligned}$$

によって表される。ただし、 c_1, c_2, c_3 は任意定数であり、

$$F(s) = \int_0^s \cos \left(2 \int_0^\sigma H_*(\eta) d\eta \right) d\sigma, \quad G(s) = \int_0^s \sin \left(2 \int_0^\sigma H_*(\eta) d\eta \right) d\sigma. \quad (3)$$

証明 求める回転面のパラメータ表示を

$$\Phi_*(s, \theta) = (x_*(s), y_*(s) \cos \theta, y_*(s) \sin \theta)^T \quad (s \in [0, d], \theta \in [0, 2\pi])$$

とする。ただし、

$$\{x'_*(s)\}^2 + \{y'_*(s)\}^2 = 1. \quad (4)$$

このとき,

$$\begin{aligned}\partial_s \Phi_* &= (x'_*(s), y'_*(s) \cos \theta, y'_*(s) \sin \theta)^T, \\ \partial_\theta \Phi_* &= (0, -y_*(s) \sin \theta, y_*(s) \cos \theta)^T\end{aligned}$$

であるから, この回転面の第1基本計量を g_{ij} ($i, j = 1, 2$) とすると,

$$\begin{aligned}g_{*,11} &= (\partial_s \Phi_*, \partial_s \Phi_*)_{\mathbb{R}^3} = (x'_*)^2 + (y'_*)^2 = 1, \\ g_{*,12} &= g_{*,21} = (\partial_s \Phi_*, \partial_\theta \Phi_*)_{\mathbb{R}^3} = 0, \\ g_{*,22} &= (\partial_\theta \Phi_*, \partial_\theta \Phi_*)_{\mathbb{R}^3} = y_*^2.\end{aligned}$$

また,

$$g_* := \det(g_{*,ij}) = y_*^2$$

であり,

$$g_*^{11} = 1, \quad g_*^{12} = g_*^{21} = 0, \quad g_*^{22} = \frac{1}{y_*^2}.$$

ここで,

$$\begin{aligned}\partial_s^2 \Phi_* &= (x''_*(s), y''_*(s) \cos \theta, y''_*(s) \sin \theta)^T, \\ \partial_\theta \partial_s \Phi_* &= (0, -y'_*(s) \sin \theta, y'_*(s) \cos \theta)^T, \\ \partial_\theta^2 \Phi_* &= (0, -y_*(s) \cos \theta, -y_*(s) \sin \theta)^T\end{aligned}$$

であり, 回転面の外向き単位法線ベクトルを N とすると,

$$N = (-y'_*, x'_* \cos \theta, x'_* \sin \theta)^T.$$

よって, この回転面の第2基本計量を h_{ij} ($i, j = 1, 2$) とすると,

$$\begin{aligned}h_{*,11} &= (\partial_s^2 \Phi_*, N_*)_{\mathbb{R}^3} = -x''_* y'_* + x'_* y''_*, \\ h_{*,12} &= h_{*,21} = (\partial_\theta \partial_s \Phi_*, N_*)_{\mathbb{R}^3} = 0, \\ h_{*,22} &= (\partial_\theta^2 \Phi_*, N_*)_{\mathbb{R}^3} = -x'_* y_*\end{aligned}$$

を得るので,

$$H_* = \frac{1}{2} g_*^{ij} h_{*,ij} = \frac{1}{2} \left(-x''_* y'_* + x'_* y''_* - \frac{x'_*}{y_*} \right).$$

式変形すると,

$$2H_* y_* + x'_* + y_*(x''_* y'_* - x'_* y'') = 0. \quad (5)$$

このとき, x_*, y_* に関する連立方程式 (4), (5) を解く. (4) の両辺を s について微分すると,

$$x'_* x''_* + y'_* y''_* = 0. \quad (6)$$

(5) の両辺に x'_* をかけ, (4), (6) を利用すると,

$$(y'_*)^2 + y_* y''_* = 2H_* x'_* y_* + 1. \quad (7)$$

(5) の両辺に y'_* をかけ, (4), (6) を利用すると,

$$x'_* y'_* + x''_* y_* = -2H_* y_* y'_*. \quad (8)$$

ここで, $z_* = y_*(y'_* + ix'_*)(i = \sqrt{-1})$ とおくと, (7), (8) より,

$$z'_* + 2iH_*z_* = 1.$$

これを解くと, C を任意定数 ($\in \mathbb{C}$) として,

$$\begin{aligned} z_*(s) &= (C + F(s) + iG(s))e^{-2i \int_0^s H_*(\sigma) d\sigma} \\ &= \{F(s) + c_1 + i(G(s) + c_2)\} \\ &\quad \cdot \left\{ \cos \left(2 \int_0^s H_*(\sigma) d\sigma \right) - i \sin \left(2 \int_0^s H_*(\sigma) d\sigma \right) \right\} \\ &\quad (C = c_1 + ic_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}) \\ &= F'(s)(F(s) + c_1) + G'(s)(G(s) + c_2) \\ &\quad + i \{F'(s)(G(s) + c_2) - G'(s)(F(s) + c_1)\} \end{aligned}$$

を得る. ただし, F, G は (3) で与えられる. このとき, $z_* = y_*(y'_* + ix'_*)$ と (4) より, $|z_*|^2 = y_*^2$ であるから, $\{F'(s)\}^2 + \{G'(s)\}^2 = 1$ に注意すれば,

$$\begin{aligned} \{y_*(s)\}^2 &= \{F'(s)(F(s) + c_1) + G'(s)(G(s) + c_2)\}^2 \\ &\quad + \{F'(s)(G(s) + c_2) - G'(s)(F(s) + c_1)\}^2 \\ &= (F(s) + c_1)^2 + (G(s) + c_2)^2. \end{aligned}$$

よって,

$$y_*(s) = \sqrt{(F(s) + c_1)^2 + (G(s) + c_2)^2}.$$

また, $z_* - \bar{z}_* = 2iy_*x'_*$ より $x'_* = \frac{1}{2iy_*}(z_* - \bar{z}_*)$ であるから,

$$x'_*(s) = \frac{1}{y_*} \{F'(s)(G(s) + c_2) - G'(s)(F(s) + c_1)\}.$$

したがって, c_3 を任意定数 ($\in \mathbb{R}$) として,

$$x_*(s) = \int_0^s \frac{F'(\sigma)(G(\sigma) + c_2) - G'(\sigma)(F(\sigma) + c_1)}{\sqrt{(F(\sigma) + c_1)^2 + (G(\sigma) + c_2)^2}} d\sigma + c_3.$$

以上より, 求める結果を得る. ■

定理 3.1 より, 軸対称な平均曲率一定曲面に対して次の表記を得る.

定理 3.2

(i) $H_*(s) \equiv 0$ のとき,

$$x_*(s) = c \log \left(\frac{s + \sqrt{s^2 + c^2}}{c} \right), \quad y_*(s) = \sqrt{s^2 + c^2}.$$

ただし, $c > 0$ は任意定数である.

(ii) $H_*(s) \equiv H_*$ (< 0 , 定数) とき,

$$x_*(s) = \int_0^s \frac{1 - B \sin(2H_*(s-r))}{\sqrt{1 + B^2 - 2B \sin(2H_*(s-r))}} d\sigma,$$

$$y_*(s) = -\frac{1}{2H_*} \sqrt{1 + B^2 - 2B \sin(2H_*(s-r))}.$$

ただし, $B \geq 0$ は任意定数である.

証明 まず (i) を示す. (3) に $H_*(s) \equiv 0$ を代入すると,

$$F(s) = s, \quad G(s) = 0$$

であるから,

$$x_*(s) = \int_0^s \frac{c_2}{\sqrt{(\sigma + c_1)^2 + c_2^2}} d\sigma + c_3, \quad y_*(s) = \sqrt{(s + c_1)^2 + c_2^2}.$$

ここで, $\eta = s + c_1$ とおくと,

$$\begin{aligned} \hat{x}_*(\eta) &= x_*(\eta - c_1) \\ &= \int_0^{\eta - c_1} \frac{c_2}{\sqrt{(\sigma + c_1)^2 + c_2^2}} d\sigma + c_3 \\ &= \int_{c_1}^{\eta} \frac{c_2}{\sqrt{\zeta^2 + c_2^2}} d\zeta + c_3 \\ &= \int_0^{\eta} \frac{c_2}{\sqrt{\zeta^2 + c_2^2}} d\zeta - \int_0^{c_1} \frac{c_2}{\sqrt{\zeta^2 + c_2^2}} d\zeta + c_3 \\ \hat{y}_*(\eta) &= y_*(\eta - c_1) = \sqrt{\eta^2 + c_2^2}. \end{aligned}$$

このとき, x 軸の平行移動により, 一般性を失うことなく

$$-\int_0^{c_1} \frac{c_2}{\sqrt{\zeta^2 + c_2^2}} d\zeta + c_3 = 0$$

としてよい. さらに, η の増加にともない $\hat{x}_*(\eta)$ が増加するように, $c_2 > 0$ としても一般性を失わない. 以上から, あらためてパラメータ表示を $x_*(s), y_*(s)$ と表すことにすれば,

$$x_*(s) = \int_0^s \frac{c}{\sqrt{\sigma^2 + c^2}} d\sigma, \quad y_*(s) = \sqrt{\sigma^2 + c^2} \quad (c > 0).$$

ここで,

$$\int_0^s \frac{c}{\sqrt{\sigma^2 + c^2}} d\sigma = \log \left(\frac{s + \sqrt{s^2 + c^2}}{c} \right)$$

であるから,

$$x_*(s) = c \log \left(\frac{s + \sqrt{s^2 + c^2}}{c} \right), \quad y_*(s) = \sqrt{s^2 + c^2} \quad (c > 0)$$

を得る.

次に (ii) を示す. (3) に $H_*(s) \equiv H_*$ を代入すると,

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^s \cos(2H_*\sigma) d\sigma = \frac{1}{2H_*} \sin(2H_*s), \\ G(s) &= \int_0^s \sin(2H_*\sigma) d\sigma = \frac{1}{2H_*} (-\cos(2H_*s) + 1) \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} & (F(s) + c_1)^2 + (G(s) + c_2)^2 \\ &= \left(\frac{1}{2H_*} \sin(2H_*s) + c_1 \right)^2 + \left(-\frac{1}{2H_*} \cos(2H_*s) + \frac{1}{2H_*} + c_2 \right)^2 \\ &= \frac{1}{4H_*^2} + \frac{c_1}{H_*} \sin(2H_*s) - \frac{\tilde{c}_2}{H_*} \cos(2H_*s) + c_1^2 + \tilde{c}_2^2 \quad \left(\tilde{c}_2 = \frac{1}{2H_*} + c_2 \right) \\ &= \frac{1}{4H_*^2} \{ 1 + 4H_*^2(c_1^2 + \tilde{c}_2^2) + 4H_*(c_1 \sin(2H_*s) - \tilde{c}_2 \cos(2H_*s)) \} \end{aligned}$$

ここで,

$$B = -2H_* \sqrt{c_1^2 + \tilde{c}_2^2} (\geq 0)$$

とおくと,

$$\begin{aligned} & 4H_*(c_1 \sin(2H_*s) - \tilde{c}_2 \cos(2H_*s)) \\ &= -2 \cdot (-2H_* \sqrt{c_1^2 + \tilde{c}_2^2}) \left(\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + \tilde{c}_2^2}} \sin(2H_*s) - \frac{\tilde{c}_2}{\sqrt{c_1^2 + \tilde{c}_2^2}} \cos(2H_*s) \right) \\ &= -2B \sin(2H_*s - \alpha). \end{aligned}$$

ただし, α は $\tan \alpha = \frac{\tilde{c}_2}{c_1}$ を満たす定数である. $\alpha = 2H_*r$ とすれば,

$$4H_*(c_1 \sin(2H_*s) - \tilde{c}_2 \cos(2H_*s)) = -2B \sin(2H_*(s - r)).$$

よって,

$$(F(s) + c_1)^2 + (G(s) + c_2)^2 = \frac{1}{4H_*^2} (1 + B^2 - 2B \sin(2H_*(s - r))).$$

また,

$$\begin{aligned} & F'(s)(G(s) + c_2) - G'(s)(F(s) + c_1) \\ &= \cos(2H_*s) \left(-\frac{1}{2H_*} \cos(2H_*s) + \tilde{c}_2 \right) - \sin(2H_*s) \left(\frac{1}{2H_*} \sin(2H_*s) + c_1 \right) \\ &= -\frac{1}{2H_*} - (c_1 \sin(2H_*s) - \tilde{c}_2 \cos(2H_*s)) \\ &= -\frac{1}{2H_*} \{ 1 + 2H_*(c_1 \sin(2H_*s) - \tilde{c}_2 \cos(2H_*s)) \} \\ &= -\frac{1}{2H_*} (1 - B \sin(2H_*(s - r))). \end{aligned}$$

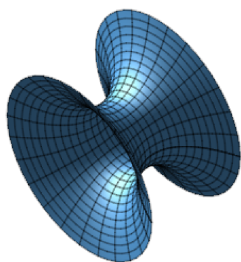
したがって, $\sqrt{\frac{1}{4H_*^2}} = -\frac{1}{2H_*}$ と, 平行移動により一般性を失うことなく $c_3 = 0$ とできることに注意すれば,

$$x_*(s) = \int_0^s \frac{1 - B \sin(2H_*(\sigma - r))}{\sqrt{1 + B^2 - 2B \sin(2H_*(\sigma - r))}} d\sigma,$$

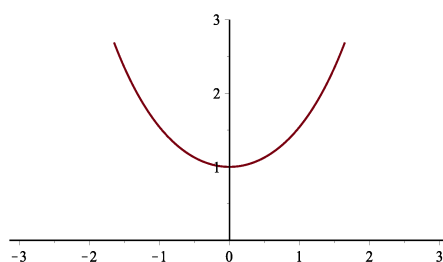
$$y_*(s) = -\frac{1}{2H_*} \sqrt{1 + B^2 - 2B \sin(2H_*(s - r))}$$

を得る. ■

定理 3.2(i) で表される曲面はカテナイドであり, Maple 17 によって図示すると以下のような曲面となる.

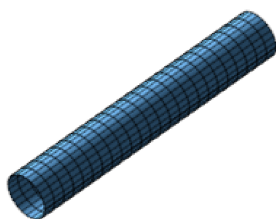


カテナイド

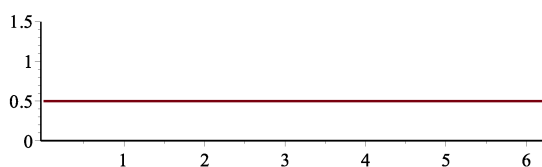


カテナイドの生成曲線

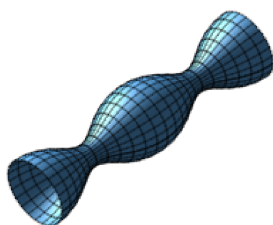
定理 3.2(ii) で表される曲面は, $B = 0$ のとき円柱, $0 < B < 1$ のときアンデュロイド, $B = 1$ のとき球面, $B > 1$ のときノドイドであり, Maple 17 によって図示すると以下のような曲面となる.



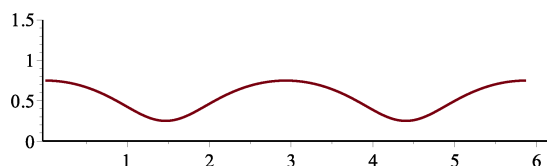
円柱



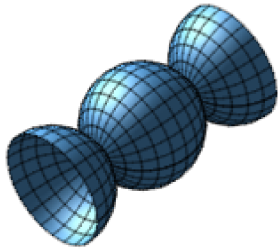
円柱の生成曲線



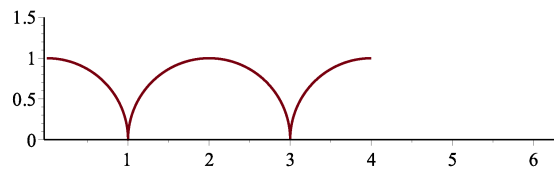
アンデュロイド



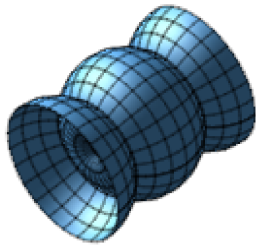
アンデュロイドの生成曲線



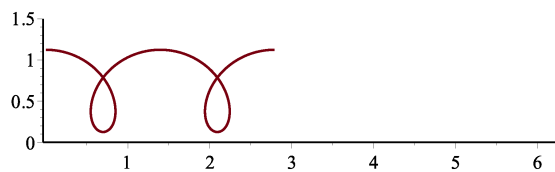
球面



球面の生成曲線



ノドイド



ノドイドの生成曲線

4 軸対称な摂動

定常曲面を

$$\Gamma_* = \{(x_*(s), y_*(s) \cos \theta, y_*(s) \sin \theta)^T \mid 0 \leq s \leq d, \theta \in [0, 2\pi]\},$$

で表し,

$$\Phi_*(s, \theta) = (x_*(s), y_*(s) \cos \theta, y_*(s) \sin \theta)^T$$

とおく. また, 関数 $\phi_{\pm}: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ に対して,

$$\Pi_{\pm} = \{(\phi_{\pm}(|\boldsymbol{\eta}|), \boldsymbol{\eta})^T \mid \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^2\}.$$

さらに,

$$\Omega = \{(x, \boldsymbol{\eta})^T \mid \phi_- (|\boldsymbol{\eta}|) \leq x \leq \phi_+ (|\boldsymbol{\eta}|), \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^2\}$$

とする. $\partial\Omega = \Pi_-$ または Π_+ である. ここで,

$$\gamma_-(w) = \min\{s \mid \Phi_*(s, \theta) + wN_*(s, \theta) \in \Omega\},$$

$$\gamma_+(w) = \max\{s \mid \Phi_*(s, \theta) + wN_*(s, \theta) \in \Omega\}$$

とし,

$$\gamma(s, w) = \gamma_-(w) + \frac{s}{d} \{\gamma_+(w) - \gamma_-(w)\}$$

とする. このとき, $\gamma_-(0) = 0$, $\gamma_+(0) = d$, $\gamma(s, 0) = s$, $\gamma(0, w) = \gamma_-(w)$, $\gamma(d, w) = \gamma_+(w)$ である.

$$\Psi(s, \theta, w) = \Phi_*(\gamma(s, w), \theta) + wN_*(\gamma(s, w), \theta)$$

とし、関数 $v : [0, d] \rightarrow [-\varepsilon, \varepsilon]$ に対して

$$\Phi(s, \theta) = \Psi(s, \theta, v(s))$$

とおく。 Γ_* の摂動となる曲面 Γ を

$$\Gamma = \{\Phi(s, \theta) \mid s \in [0, d], \theta \in [0, 2\pi]\}.$$

によって定義すると、

$$\partial_s \Phi = (\gamma_s + \gamma_w v') \partial_\gamma \Phi_* + v' N_* + v(\gamma_s + \gamma_w v') \partial_\gamma N_*, \quad \partial_\theta \Phi = \partial_\theta \Phi_* + v \partial_\theta N_*$$

を得る。

$$\begin{aligned} \Phi_*(\gamma, \theta) &= (x_*(\gamma), y_*(\gamma) \cos \theta, y_*(\gamma) \sin \theta)^T, \\ N_*(\gamma, \theta) &= (-y'_*(\gamma), x'_*(\gamma) \cos \theta, x'_*(\gamma) \sin \theta)^T \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \partial_\gamma \Phi_* &= (x'_*, y'_* \cos \theta, y'_* \sin \theta)^T, \quad \partial_\theta \Phi_* = (0, -y_* \sin \theta, y_* \cos \theta)^T, \\ \partial_\gamma N_* &= (-y''_*, x''_* \cos \theta, x''_* \sin \theta)^T, \quad \partial_\theta N_* = (0, -x'_* \sin \theta, x'_* \cos \theta)^T. \end{aligned}$$

この結果、

$$\begin{aligned} \partial_s \Phi &= (P_1(v, v'), P_2(v, v') \cos \theta, P_2(v, v') \sin \theta)^T, \\ \partial_\theta \Phi &= (0, -P_3(v) \sin \theta, P_3(v) \cos \theta)^T \end{aligned}$$

となる。ただし、

$$\begin{aligned} P_1(v, v') &= (\gamma_s + \gamma_w v')(x'_* - y''_* v) - y'_* v', \\ P_2(v, v') &= (\gamma_s + \gamma_w v')(y'_* + x''_* v) + x'_* v', \\ P_3(v) &= y_* + x'_* v. \end{aligned}$$

このとき、

$$\begin{aligned} (\partial_s \Phi, \partial_s \Phi)_{\mathbb{R}^3} &= \{P_1(v, v')\}^2 + \{P_2(v, v')\}^2, \\ (\partial_s \Phi, \partial_\theta \Phi)_{\mathbb{R}^3} &= 0, \quad (\partial_\theta \Phi, \partial_\theta \Phi)_{\mathbb{R}^3} = \{P_3(v)\}^2 \end{aligned}$$

であるから、 Γ の第 1 基本計量は

$$g_{11} = \{P_1(v, v')\}^2 + \{P_2(v, v')\}^2, \quad g_{12} = g_{21} = 0, \quad g_{22} = \{P_3(v)\}^2$$

で表される。さらに、

$$g = \det(g_{ij}) = \{P_3(v)\}^2 [\{P_1(v, v')\}^2 + \{P_2(v, v')\}^2]$$

であり、

$$g^{11} = \frac{1}{\{P_1(v, v')\}^2 + \{P_2(v, v')\}^2}, \quad g^{12} = g^{21} = 0, \quad g^{22} = \frac{1}{\{P_3(v)\}^2}.$$

次に, Γ の第 2 基本計量を求める.

$$\begin{aligned}\partial_s^2 \Phi &= (Q_1(v, v', v''), Q_2(v, v', v'') \cos \theta, Q_2(v, v', v'') \sin \theta)^T, \\ \partial_\theta \partial_s \Phi &= (0, -P_2(v, v') \sin \theta, P_2(v, v') \cos \theta)^T, \\ \partial_\theta^2 \Phi &= (0, -P_3(v) \cos \theta, -P_3(v) \sin \theta)^T.\end{aligned}$$

ただし,

$$\begin{aligned}Q_1(v, v', v'') &= \partial_s P_1(v, v') \\ &= \{\gamma_{ss} + 2\gamma_{sw}v' + \gamma_{ww}(v')^2 + \gamma_w v''\}(x'_* - y''_* v) + (\gamma_s + \gamma_w v')^2(x''_* - y_*^{(3)}v) \\ &\quad - 2(\gamma_s + \gamma_w v')y''_* v' - y'_* v'' \\ &= (2\gamma_{sw}v' + \gamma_{ww}(v')^2 + \gamma_w v'')(x'_* - y''_* v) + (\gamma_s + \gamma_w v')^2(x''_* - y_*^{(3)}v) \\ &\quad - 2(\gamma_s + \gamma_w v')y''_* v' - y'_* v'', \\ Q_2(v, v', v'') &= \partial_s P_2(v, v') \\ &= \{\gamma_{ss} + 2\gamma_{sw}v' + \gamma_{ww}(v')^2 + \gamma_w v''\}(y'_* + x''_* v) + (\gamma_s + \gamma_w v')^2(y''_* + x_*^{(3)}v) \\ &\quad + 2(\gamma_s + \gamma_w v')x''_* v' + x'_* v'' \\ &= (2\gamma_{sw}v' + \gamma_{ww}(v')^2 + \gamma_w v'')(y'_* + x''_* v) + (\gamma_s + \gamma_w v')^2(y''_* + x_*^{(3)}v) \\ &\quad + 2(\gamma_s + \gamma_w v')x''_* v' + x'_* v''.\end{aligned}$$

ここで,

$$N = -\frac{\partial_s \Phi \times \partial_\theta \Phi}{|\partial_s \Phi \times \partial_\theta \Phi|} = \frac{(-P_2(v, v'), P_1(v, v') \cos \theta, P_1(v, v') \sin \theta)^T}{[\{P_1(v, v')\}^2 + \{P_2(v, v')\}^2]^{1/2}}.$$

よって, 第 2 基本計量は

$$\begin{aligned}h_{11} &= (\partial_s^2 \Phi, N)_{\mathbb{R}^3} = \frac{-P_2(v, v')Q_1(v, v', v'') + P_1(v, v')Q_2(v, v', v'')}{[\{P_1(v, v')\}^2 + \{P_2(v, v')\}^2]^{1/2}}, \\ h_{12} &= h_{21} = (\partial_\theta \partial_s \Phi, N)_{\mathbb{R}^3} = 0, \\ h_{22} &= (\partial_\theta^2 \Phi, N)_{\mathbb{R}^3} = -\frac{P_1(v, v')P_3(v)}{[\{P_1(v, v')\}^2 + \{P_2(v, v')\}^2]^{1/2}}.\end{aligned}$$

したがって, Γ の平均曲率 H は以下で表される.

$$\begin{aligned}H &= \frac{1}{2}g^{ij}h_{ij} = \frac{1}{2}(g^{11}h_{11} + g^{22}h_{22}) \\ &= \frac{-P_2(v, v')Q_1(v, v', v'') + P_1(v, v')Q_2(v, v', v'')}{2[\{P_1(v, v')\}^2 + \{P_2(v, v')\}^2]^{3/2}} \\ &\quad - \frac{P_1(v, v')}{2P_3(v)[\{P_1(v, v')\}^2 + \{P_2(v, v')\}^2]^{1/2}}\end{aligned}$$

ここで, Γ 上の Laplace-Beltrami 作用素は

$$\begin{aligned}\Delta_{\Gamma} f &= \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i (\sqrt{g} g^{ij} \partial_j f) \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_s (\sqrt{g} g^{11} \partial_s f) + \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_{\theta} (\sqrt{g} g^{22} \partial_{\theta} f) \\ &= \frac{1}{P_3(v) [\{P_1(v, v')\}^2 + \{P_2(v, v')\}^2]^{1/2}} \partial_s \left(\frac{P_3(v)}{[\{P_1(v, v')\}^2 + \{P_2(v, v')\}^2]^{1/2}} \partial_s f \right) \\ &\quad + \frac{1}{P_3(v) [\{P_1(v, v')\}^2 + \{P_2(v, v')\}^2]^{1/2}} \partial_{\theta} \left(\frac{[\{P_1(v, v')\}^2 + \{P_2(v, v')\}^2]^{1/2}}{P_3(v)} \partial_{\theta} f \right)\end{aligned}$$

と表される.

$$J(v, v') := [\{P_1(v, v')\}^2 + \{P_2(v, v')\}^2]^{1/2}$$

とおき, $H = H(v, v', v'')$ が θ に依らないことに注意すると,

$$\Delta_{\Gamma} H(v, v', v'') = \frac{1}{P_3(v) J(v, v')} \partial_s \left\{ \frac{P_3(v)}{J(v, v')} \partial_s H(v, v', v'') \right\}.$$

次に法速度を導く.

$$v : [0, d] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, t) \mapsto v(x, t),$$

に対して, $\Phi(s, \theta, t) = \Psi(s, \theta, v(s, t))$ とおく. このとき,

$$\partial_t \Phi = \{\gamma_w (\partial_{\gamma} \Phi_* + \partial_{\gamma} N_*) + N_*\} v_t = v_t (F_1(v), F_2(v) \cos \theta, F_2(v) \sin \theta)^T$$

を得る. ただし,

$$F_1(v) = (x'_* - y''_*) \gamma_w - y'_*, \quad F_2(v) = (y'_* + x''_*) \gamma_w + x'_*.$$

よって,

$$V = (\partial_t \Phi, N)_{\mathbb{R}^3} = \frac{-F_1(v) P_2(v, v') + F_2(v) P_1(v, v')}{[\{P_1(v, v')\}^2 + \{P_2(v, v')\}^2]^{1/2}} v_t.$$

v に対する境界条件を求める. 境界条件は

$$\begin{cases} (N, \nu_{\pm})_{\mathbb{R}^3} = \cos \theta_{\pm} & \text{on } \Gamma \cap \Pi_{\pm}, \\ (\nabla_{\Gamma} H, \nu_{\pm})_{\mathbb{R}^3} = 0 & \text{on } \Gamma \cap \Pi_{\pm} \end{cases}$$

である. 関数 $\phi_{\pm} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ に対して, $\Pi_{\pm}$ は

$$\Pi_{\pm} = \{(\phi_{\pm}(|\boldsymbol{\eta}|), \boldsymbol{\eta})^T \mid \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^2\}$$

と表されるので, $\Pi_{\pm}$ に対する外向き単位法ベクトル $\nu_{\pm}$ は

$$\nu_{\pm} = \mp \frac{(-1, \dot{\phi}_{\pm}(|\boldsymbol{\eta}|) \boldsymbol{\xi})^T}{\{1 + (\dot{\phi}_{\pm}(|\boldsymbol{\eta}|))^2\}^{1/2}} \quad (\boldsymbol{\xi} = \frac{\boldsymbol{\eta}}{|\boldsymbol{\eta}|} \in S^1)$$

によって与えられる.

$$N = \frac{(-P_2(v, v'), P_1(v, v') \cos \theta, P_1(v, v') \sin \theta)^T}{[\{P_1(v, v')\}^2 + \{P_2(v, v')\}^2]^{1/2}}$$

であり, $s = 0, d$ では

$$(\phi_{\pm}(|\boldsymbol{\eta}|), \boldsymbol{\eta})^T = (x_{\star} - y'_{\star}v, P_3(v) \cos \theta, P_3(v) \sin \theta)^T$$

が成り立つので, $\boldsymbol{\eta} = (P_3(v) \cos \theta, P_3(v) \sin \theta)^T$ であることに注意すれば, 角度に関する境界条件は

$$\begin{aligned} & \mp \{P_2(v, v') + \dot{\phi}_{\pm}(P_3(v))P_1(v, v')\} \\ &= \{1 + (\dot{\phi}_{\pm}(P_3(v)))^2\}^{1/2} [\{P_1(v, v')\}^2 + \{P_2(v, v')\}^2]^{1/2} \cos \theta_{\pm} \quad \text{at } s = 0, d. \end{aligned} \quad (9)$$

また, $\nabla_{\Gamma} f = g^{ij} \partial_i f \partial_j \Phi$ であり, $H = H(v, v', v'')$ は θ に依らないことに注意すれば,

$$\nabla_{\Gamma} H(v, v', v'') = \frac{\partial_s H(v, v', v'')}{\{P_1(v, v')\}^2 + \{P_2(v, v')\}^2} (P_1(v, v'), P_2(v, v') \cos \theta, P_2(v, v') \sin \theta)^T.$$

したがって, 境界条件 $(\nabla_{\Gamma_t} H, \nu_{\pm})_{\mathbb{R}^3} = 0$ は

$$\mp \{-P_1(v, v') + P_2(v, v') \dot{\phi}_{\pm}(P_3(v))\} \partial_s H(v, v', v'') = 0 \quad \text{at } s = 0, d.$$

$s = 0, d$ で $-P_1(v, v') + P_2(v, v') \dot{\phi}_{\pm}(P_3(v)) = 0$ と仮定すると, $\dot{\phi}_{\pm}(P_3(v)) = P_1(v, v')/P_2(v, v')$ となり, これを (9) に代入すると,

$$\mp \frac{|P_2(v, v')|}{P_2(v, v')} = \cos \theta_{\pm}.$$

$0 < \theta_{\pm} < \pi$ より, 矛盾. よって, $s = 0, d$ で $-P_1(v, v') + P_2(v, v') \dot{\phi}_{\pm}(P_3(v)) \neq 0$ であるから,

$$\partial_s H(v, v', v'') = 0 \quad \text{at } s = 0, d$$

を得る.

5 線形化

方程式および境界条件の線形化を行う. $\gamma_s|_{\varepsilon=0} = 1$ に注意すると, $\tilde{P}_1(v) := P_1(v, v')$, $\tilde{P}_2(v) := P_2(v, v')$ に対して,

$$\tilde{P}_1(\varepsilon v)|_{\varepsilon=0} = x'_{\star}, \quad \tilde{P}_2(\varepsilon v)|_{\varepsilon=0} = y'_{\star}, \quad P_3(\varepsilon v)|_{\varepsilon=0} = y_{\star}$$

である. さらに,

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\varepsilon} \tilde{P}_1(\varepsilon v) \right|_{\varepsilon=0} &= (\gamma_{sw}|_{\varepsilon=0} v + \gamma_w|_{\varepsilon=0} v') x'_{\star} + \gamma_s|_{\varepsilon=0} (x''_{\star} \gamma_w|_{\varepsilon=0} - y''_{\star}) v - y'_{\star} v' \\ &= (x'_{\star} \gamma_w|_{\varepsilon=0} - y'_{\star}) v' + (x'_{\star} \gamma_{sw}|_{\varepsilon=0} + x''_{\star} \gamma_w|_{\varepsilon=0} - y''_{\star}) v, \\ \left. \frac{d}{d\varepsilon} \tilde{P}_2(\varepsilon v) \right|_{\varepsilon=0} &= (\gamma_{sw}|_{\varepsilon=0} v + \gamma_w|_{\varepsilon=0} v') y'_{\star} + \gamma_s|_{\varepsilon=0} (y''_{\star} \gamma_w|_{\varepsilon=0} + x''_{\star}) v + x'_{\star} v' \\ &= (y'_{\star} \gamma_w|_{\varepsilon=0} + x'_{\star}) v' + (y'_{\star} \gamma_{sw}|_{\varepsilon=0} + y''_{\star} \gamma_w|_{\varepsilon=0} + x''_{\star}) v, \\ \left. \frac{d}{d\varepsilon} P_3(\varepsilon v) \right|_{\varepsilon=0} &= (y'_{\star} \gamma_w|_{\varepsilon=0} + x'_{\star}) v. \end{aligned}$$

また, $\tilde{Q}_1(v) := Q_1(v, v', v'')$, $\tilde{Q}_2(v) := Q_2(v, v', v'')$ に対して,

$$\tilde{Q}_1(\varepsilon v)|_{\varepsilon=0} = x''_*, \quad \tilde{Q}_2(\varepsilon v)|_{\varepsilon=0} = y''_*$$

であり,

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\varepsilon} \tilde{Q}_1(\varepsilon v) \right|_{\varepsilon=0} &= (2\gamma_{sw}|_{\varepsilon=0} v' + \gamma_w|_{\varepsilon=0} v'') x'_* + 2\gamma_s|_{\varepsilon=0} (\gamma_{sw}|_{\varepsilon=0} v + \gamma_w|_{\varepsilon=0} v') x''_* \\ &\quad + (\gamma_s|_{\varepsilon=0})^2 (x_*^{(3)} \gamma_w|_{\varepsilon=0} v - y_*^{(3)} v) - 2\gamma_s|_{\varepsilon=0} y''_* v' - y''_* v'' \\ &= (x'_* \gamma_w|_{\varepsilon=0} - y'_*) v'' + 2(x'_* \gamma_{sw}|_{\varepsilon=0} + x''_* \gamma_w|_{\varepsilon=0} - y''_*) v' \\ &\quad + (2x''_* \gamma_{sw}|_{\varepsilon=0} + x_*^{(3)} \gamma_w|_{\varepsilon=0} - y_*^{(3)}) v, \\ \left. \frac{d}{d\varepsilon} \tilde{Q}_2(\varepsilon v) \right|_{\varepsilon=0} &= (2\gamma_{sw}|_{\varepsilon=0} v' + \gamma_w|_{\varepsilon=0} v'') y'_* + 2\gamma_s|_{\varepsilon=0} (\gamma_{sw}|_{\varepsilon=0} v + \gamma_w|_{\varepsilon=0} v') y''_* \\ &\quad + (\gamma_s|_{\varepsilon=0})^2 (y_*^{(3)} \gamma_w|_{\varepsilon=0} v + x_*^{(3)} v) + 2\gamma_s|_{\varepsilon=0} x''_* v' + x''_* v'' \\ &= (y'_* \gamma_w|_{\varepsilon=0} + x'_*) v'' + 2(y'_* \gamma_{sw}|_{\varepsilon=0} + y''_* \gamma_w|_{\varepsilon=0} + x''_*) v' \\ &\quad + (2y''_* \gamma_{sw}|_{\varepsilon=0} + y_*^{(3)} \gamma_w|_{\varepsilon=0} + x_*^{(3)}) v. \end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned} &\left. \frac{d}{d\varepsilon} \{ -\tilde{P}_2(\varepsilon v) \tilde{Q}_1(\varepsilon v) + \tilde{P}_1(\varepsilon v) \tilde{Q}_2(\varepsilon v) \} \right|_{\varepsilon=0} \\ &= - \left\{ \left. \frac{d}{d\varepsilon} \tilde{P}_2(\varepsilon v) \right|_{\varepsilon=0} x''_* + y'_* \left. \frac{d}{d\varepsilon} \tilde{Q}_1(\varepsilon v) \right|_{\varepsilon=0} \right\} + \left. \frac{d}{d\varepsilon} \tilde{P}_1(\varepsilon v) \right|_{\varepsilon=0} y''_* + x'_* \left. \frac{d}{d\varepsilon} \tilde{Q}_2(\varepsilon v) \right|_{\varepsilon=0} \\ &= - \{ x''_* (y'_* \gamma_w|_{\varepsilon=0} + x'_*) v' + x''_* (y'_* \gamma_{sw}|_{\varepsilon=0} + y''_* \gamma_w|_{\varepsilon=0} + x''_*) v \\ &\quad + y'_* (x'_* \gamma_w|_{\varepsilon=0} - y'_*) v'' + 2y'_* (x'_* \gamma_{sw}|_{\varepsilon=0} + x''_* \gamma_w|_{\varepsilon=0} - y''_*) v' \\ &\quad + y'_* (2x''_* \gamma_{sw}|_{\varepsilon=0} + x_*^{(3)} \gamma_w|_{\varepsilon=0} - y_*^{(3)}) v \} \\ &\quad + y''_* (x'_* \gamma_w|_{\varepsilon=0} - y'_*) v' + y''_* (x'_* \gamma_{sw}|_{\varepsilon=0} + x''_* \gamma_w|_{\varepsilon=0} - y''_*) v \\ &\quad + x'_* (y'_* \gamma_w|_{\varepsilon=0} + x'_*) v'' + 2x'_* (y'_* \gamma_{sw}|_{\varepsilon=0} + y''_* \gamma_w|_{\varepsilon=0} + x''_*) v' \\ &\quad + x'_* (2y''_* \gamma_{sw}|_{\varepsilon=0} + y_*^{(3)} \gamma_w|_{\varepsilon=0} + x_*^{(3)}) v \\ &= -x''_* y'_* \gamma_w|_{\varepsilon=0} v' - x''_* (y'_* \gamma_{sw}|_{\varepsilon=0} + x''_*) v + (y'_*)^2 v'' - 2x''_* y'_* \gamma_w|_{\varepsilon=0} v' \\ &\quad - y'_* (2x''_* \gamma_{sw}|_{\varepsilon=0} + x_*^{(3)} \gamma_w|_{\varepsilon=0} - y_*^{(3)}) v \\ &\quad + x'_* y''_* \gamma_w|_{\varepsilon=0} v' + y''_* (x'_* \gamma_{sw}|_{\varepsilon=0} - y''_*) v + (x'_*)^2 v'' + 2x'_* y''_* \gamma_w|_{\varepsilon=0} v' \\ &\quad + x'_* (2y''_* \gamma_{sw}|_{\varepsilon=0} + y_*^{(3)} \gamma_w|_{\varepsilon=0} + x_*^{(3)}) v \\ &= v'' + 3(-x''_* y'_* + x'_* y''_*) \gamma_w|_{\varepsilon=0} v' \\ &\quad + [3(-x''_* y'_* + x'_* y''_*) \gamma_{sw}|_{\varepsilon=0} + (-x_*^{(3)} y'_* + x'_* y_*^{(3)}) \gamma_w|_{\varepsilon=0} - 2\{(x''_*)^2 + (y''_*)^2\}] v, \\ &\left. \frac{d}{d\varepsilon} [\{\tilde{P}_1(\varepsilon v)\}^2 + \{\tilde{P}_2(\varepsilon v)\}^2]^{-3/2} \right|_{\varepsilon=0} \\ &= -3\{(x'_*)^2 + (y'_*)^2\}^{-5/2} \left\{ x'_* \left. \frac{d}{d\varepsilon} \tilde{P}_1(\varepsilon v) \right|_{\varepsilon=0} + y'_* \left. \frac{d}{d\varepsilon} \tilde{P}_2(\varepsilon v) \right|_{\varepsilon=0} \right\} \\ &= -3\{ x'_* (x'_* \gamma_w|_{\varepsilon=0} - y'_*) v' + x'_* (x'_* \gamma_{sw}|_{\varepsilon=0} + x''_* \gamma_w|_{\varepsilon=0} - y''_*) v \\ &\quad + y'_* (y'_* \gamma_w|_{\varepsilon=0} + x'_*) v' + y'_* (y'_* \gamma_{sw}|_{\varepsilon=0} + y''_* \gamma_w|_{\varepsilon=0} + x''_*) v \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -3[\gamma_w|_{\varepsilon=0} v' + \{\gamma_{sw}|_{\varepsilon=0} - (-x''_* y'_* + x'_* y''_*)\}v], \\
&\frac{d}{d\varepsilon} \left(\frac{\tilde{P}_1(\varepsilon v)}{P_3(\varepsilon v)} \right) \Big|_{\varepsilon=0} \\
&= \frac{\frac{d}{d\varepsilon} \tilde{P}_1(\varepsilon v) \Big|_{\varepsilon=0} y_* - x'_* \frac{d}{d\varepsilon} P_3(\varepsilon v) \Big|_{\varepsilon=0}}{y_*^2} \\
&= \frac{1}{y_*} \{ (x'_* \gamma_w|_{\varepsilon=0} - y'_*)v' + (x'_* \gamma_{sw}|_{\varepsilon=0} + x''_* \gamma_w|_{\varepsilon=0} - y''_*)v \} - \frac{x'_*}{y_*^2} (y'_* \gamma_w|_{\varepsilon=0} + x'_*)v, \\
&\frac{d}{d\varepsilon} [\{\tilde{P}_1(\varepsilon v)\}^2 + \{\tilde{P}_2(\varepsilon v)\}^2]^{-1/2} \Big|_{\varepsilon=0} \\
&= -[\gamma_w|_{\varepsilon=0} v' + \{\gamma_{sw}|_{\varepsilon=0} - (-x''_* y'_* + x'_* y''_*)\}v]
\end{aligned}$$

以上から, $\hat{H}(v) := H(v, v', v'')$ に対して,

$$\begin{aligned}
&2 \frac{d}{d\varepsilon} \hat{H}(\varepsilon v) \Big|_{\varepsilon=0} \\
&= v'' + 3(-x''_* y'_* + x'_* y''_*) \gamma_w|_{\varepsilon=0} v' \\
&\quad + [3(-x''_* y'_* + x'_* y''_*) \gamma_{sw}|_{\varepsilon=0} + (-x_*^{(3)} y'_* + x'_* y_*^{(3)}) \gamma_w|_{\varepsilon=0} - 2\{(x'')^2 + (y'')^2\}] v \\
&\quad - 3(-x''_* y'_* + x'_* y''_*) [\gamma_w|_{\varepsilon=0} v' + \{\gamma_{sw}|_{\varepsilon=0} - (-x''_* y'_* + x'_* y''_*)\}v] \\
&\quad - \left[\frac{1}{y_*} \{ (x'_* \gamma_w|_{\varepsilon=0} - y'_*)v' + (x'_* \gamma_{sw}|_{\varepsilon=0} + x''_* \gamma_w|_{\varepsilon=0} - y''_*)v \} - \frac{x'_*}{y_*^2} (y'_* \gamma_w|_{\varepsilon=0} + x'_*)v \right] \\
&\quad + \frac{x'_*}{y_*} [\gamma_w|_{\varepsilon=0} v' + \{\gamma_{sw}|_{\varepsilon=0} - (-x''_* y'_* + x'_* y''_*)\}v] \\
&= v'' + \frac{y'_*}{y_*} v' \\
&\quad + \left[3(-x''_* y'_* + x'_* y''_*)^2 - 2\{(x'')^2 + (y'')^2\} + \frac{y''_*}{y_*} + \frac{(x'_*)^2}{y_*^2} - \frac{x'_*}{y_*} (-x''_* y'_* + x'_* y''_*) \right] v \\
&\quad + \left(-x_*^{(3)} y'_* + x'_* y_*^{(3)} - \frac{x''_* y_* - x'_* y'_*}{y_*^2} \right) \gamma_w|_{\varepsilon=0} v.
\end{aligned}$$

ここで, $x'_* x''_* + y'_* y''_* = 0$ に注意すれば,

$$\begin{aligned}
(-x''_* y'_* + x'_* y''_*)^2 &= (x'')^2 (y'_*)^2 - 2x'_* y'_* x''_* y''_* + (y'')^2 (y'_*)^2 \\
&= (x'')^2 + (y'')^2 - \{(x'_*)^2 (x'')^2 + 2x'_* y'_* x''_* y''_* + (y'_*)^2 (y'')^2\} \\
&= (x'')^2 + (y'')^2 - (x'_* x''_* + y'_* y''_*)^2 \\
&= (x'')^2 + (y'')^2
\end{aligned}$$

であり, さらに

$$\frac{y''_*}{y_*} - \frac{x'_*}{y_*} (-x''_* y'_* + x'_* y''_*) = \frac{(y'_*)^2 y''_*}{y_*} + \frac{x'_* y'_* x''_*}{y_*} = \frac{y'_*}{y_*} (x'_* x''_* + y'_* y''_*) = 0.$$

また, 定数 H_* に対して

$$-x''_* y'_* + x'_* y''_* - \frac{x'_*}{y_*} = 2H_*$$

の両辺を s に関して微分すれば,

$$-x_*^{(3)}y'_* + x'_*y_*^{(3)} - \frac{x''_*y'_* - x'_*y''_*}{y_*^2} = 0.$$

したがって,

$$2 \frac{d}{d\varepsilon} \hat{H}(\varepsilon v) \Big|_{\varepsilon=0} = \frac{1}{y_*} (y_* v')' + \left\{ (-x''_*y'_* + x'_*y''_*)^2 + \left(\frac{x'_*}{y_*} \right)^2 \right\} v$$

を得る. ここで,

$$\tilde{\Delta}(v) = \frac{1}{P_3(v)J(v, v')} \left[\partial_s \left\{ \frac{P_3(v)}{J(v, v')} \partial_s \right\} + \partial_\theta \left\{ \frac{J(v, v')}{P_3(v)} \partial_\theta \right\} \right]$$

に対して,

$$\Delta_{\Gamma_*} = \tilde{\Delta}(\varepsilon v)|_{\varepsilon=0} = \frac{1}{y_*} \left\{ \partial_s (y_* \partial_s) + \frac{1}{y_*} \partial_\theta^2 \right\}$$

であり, さらに, 第2基本計量 $A_* = (h_{*,ij})$ に対して,

$$|A_*|^2 = g_*^{ij} g_*^{kl} h_{*,ik} h_{*,jl} = (-x''_*y'_* + x'_*y''_*)^2 + \left(\frac{x'_*}{y_*} \right)^2$$

であるから, v が θ に依らないことに注意すれば,

$$2 \frac{d}{d\varepsilon} \hat{H}(\varepsilon v) \Big|_{\varepsilon=0} = \Delta_{\Gamma_*} v + |A_*|^2 v.$$

この結果,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} \tilde{\Delta}(\varepsilon v) \hat{H}(\varepsilon v) \Big|_{\varepsilon=0} &= \frac{d}{d\varepsilon} \tilde{\Delta}(\varepsilon v) \Big|_{\varepsilon=0} H_* + \Delta_{\Gamma_*} \frac{d}{d\varepsilon} \hat{H}(\varepsilon v) \Big|_{\varepsilon=0} \\ &= \frac{1}{2} \Delta_{\Gamma_*} (\Delta_{\Gamma_*} v + |A_*|^2 v) \end{aligned}$$

を得る. 次に, 法速度 V の線形化は,

$$\tilde{V}(v) = \frac{-F_1(v)P_2(v, v') + F_2(v)P_1(v, v')}{[\{P_1(v, v')\}^2 + \{P_2(v, v')\}^2]^{1/2}} v_t.$$

に対して,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} \tilde{V}(\varepsilon v) \Big|_{\varepsilon=0} &= \frac{-F_1(v)P_2(v, v') + F_2(v)P_1(v, v')}{[\{P_1(v, v')\}^2 + \{P_2(v, v')\}^2]^{1/2}} \Big|_{\varepsilon=0} v_t \\ &= [-\{(x'_* - y''_*)\gamma_w|_{\varepsilon=0} - y'_*\}y'_* + \{(y'_* + x''_*)\gamma_w|_{\varepsilon=0} + x'_*\}x'_*] v_t \\ &= v_t \end{aligned}$$

以上から, 方程式 $\tilde{V}(v) = -\tilde{\Delta}(v)\hat{H}(v)$ の線形化方程式は

$$v_t = -\frac{1}{2} \Delta_{\Gamma_*} (\Delta_{\Gamma_*} v + |A_*|^2 v)$$

となる.

次に境界条件の1つである角度条件の線形化を行う.

$$\mp\{\tilde{P}_2(v) + \dot{\phi}_\pm(P_3(v))\tilde{P}_1(v)\} = \{1 + (\dot{\phi}_\pm(P_3(v)))^2\}^{1/2}\tilde{J}(v)\cos\theta_\pm.$$

このとき, 左辺の線形化は

$$\begin{aligned} & \left. \frac{d}{d\varepsilon}(\text{L. H. S}) \right|_{\varepsilon=0} \\ &= \mp \left\{ \left. \frac{d}{d\varepsilon}\tilde{P}_2(\varepsilon v) \right|_{\varepsilon=0} + \ddot{\phi}_\pm(P_3(\varepsilon v))|_{\varepsilon=0} \left. \frac{d}{d\varepsilon}P_3(\varepsilon v) \right|_{\varepsilon=0} \left. \tilde{P}_1(\varepsilon v) \right|_{\varepsilon=0} \right. \\ & \quad \left. + \dot{\phi}_\pm(P_3(\varepsilon v))|_{\varepsilon=0} \left. \frac{d}{d\varepsilon}\tilde{P}_1(\varepsilon v) \right|_{\varepsilon=0} \right\} \\ &= \mp \left[(y'_*\gamma_w|_{\varepsilon=0} + x'_*)v' + (y'_*\gamma_{sw}|_{\varepsilon=0} + y''_*\gamma_w|_{\varepsilon=0} + x''_*)v \right. \\ & \quad + \ddot{\phi}_\pm(y_*)x'_*(y'_*\gamma_w|_{\varepsilon=0} + x'_*)v \\ & \quad \left. + \dot{\phi}_\pm(y_*)\{(x'_*\gamma_w|_{\varepsilon=0} - y'_*)v' + (x'_*\gamma_{sw}|_{\varepsilon=0} + x''_*\gamma_w|_{\varepsilon=0} - y''_*)v\} \right] \\ &= \mp \left[\{y'_*\gamma_w|_{\varepsilon=0} + x'_* + \dot{\phi}_\pm(y_*)(x'_*\gamma_w|_{\varepsilon=0} - y'_*)\}v' \right. \\ & \quad + \{y'_*\gamma_{sw}|_{\varepsilon=0} + y''_*\gamma_w|_{\varepsilon=0} + x''_* + \ddot{\phi}_\pm(y_*)x'_*(y'_*\gamma_w|_{\varepsilon=0} + x'_*) \\ & \quad \left. + \dot{\phi}_\pm(y_*)(x'_*\gamma_{sw}|_{\varepsilon=0} + x''_*\gamma_w|_{\varepsilon=0} - y''_*)\}v \right] \\ &= \mp \left[\{x'_* - \dot{\phi}_\pm(y_*)y'_* + (y'_* + \dot{\phi}_\pm(y_*)x'_*)\gamma_w|_{\varepsilon=0}\}v' \right. \\ & \quad + \{x''_* + \ddot{\phi}_\pm(y_*)(x'_*)^2 - \dot{\phi}_\pm(y_*)y''_* + (y'_* + \dot{\phi}_\pm(y_*)x'_*)\gamma_{sw}|_{\varepsilon=0} \\ & \quad \left. + (y''_* + \ddot{\phi}_\pm(y_*)x'_*y'_* + \dot{\phi}_\pm(y_*)x''_*)\gamma_w|_{\varepsilon=0}\}v \right]. \end{aligned}$$

また, 右辺の線形化は

$$\begin{aligned} & \left. \frac{d}{d\varepsilon}(\text{R. H. S}) \right|_{\varepsilon=0} \\ &= \left\{ \left[\{1 + (\dot{\phi}_\pm(P_3(\varepsilon v)))^2\}^{-1/2}\dot{\phi}_\pm(P_3(\varepsilon v))\ddot{\phi}_\pm(P_3(\varepsilon v))\right]|_{\varepsilon=0} \left. \frac{d}{d\varepsilon}P_3(\varepsilon v) \right|_{\varepsilon=0} \tilde{J}(v)|_{\varepsilon=0} \right. \\ & \quad \left. + \{1 + (\dot{\phi}_\pm(P_3(\varepsilon v)))^2\}^{1/2}\right|_{\varepsilon=0} \left. \frac{d}{d\varepsilon}\tilde{J}(\varepsilon v) \right|_{\varepsilon=0} \right\} \cos\theta_\pm \\ &= \left[\frac{\dot{\phi}_\pm(y_*)\ddot{\phi}_\pm(y_*)}{\{1 + (\dot{\phi}_\pm(y_*))^2\}^{1/2}}(y'_*\gamma_w|_{\varepsilon=0} + x'_*)v \right. \\ & \quad \left. + \{1 + (\dot{\phi}_\pm(y_*))^2\}^{1/2}[\gamma_w|_{\varepsilon=0}v' + \{\gamma_{sw}|_{\varepsilon=0} - (-x''_*y'_* + x'_*y''_*)\}v] \right] \cos\theta_\pm \\ &= \left[\{1 + (\dot{\phi}_\pm(y_*))^2\}^{1/2}\gamma_w|_{\varepsilon=0}v' + \frac{\dot{\phi}_\pm(y_*)\ddot{\phi}_\pm(y_*)}{\{1 + (\dot{\phi}_\pm(y_*))^2\}^{1/2}}(y'_*\gamma_w|_{\varepsilon=0} + x'_*)v \right. \\ & \quad \left. + \{1 + (\dot{\phi}_\pm(y_*))^2\}^{1/2}\{\gamma_{sw}|_{\varepsilon=0} - (-x''_*y'_* + x'_*y''_*)\}v \right] \cos\theta_\pm \\ &= \left[\{1 + (\dot{\phi}_\pm(y_*))^2\}^{1/2}\gamma_w|_{\varepsilon=0}v' \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ \frac{\dot{\phi}_{\pm}(y_*)\ddot{\phi}_{\pm}(y_*)}{\{1 + (\dot{\phi}_{\pm}(y_*)^2)^{1/2}\}} x'_* - \{1 + (\dot{\phi}_{\pm}(y_*)^2)^{1/2}\}(-x''_*y'_* + x'_*y''_*) \right\} v \\
& + \frac{\dot{\phi}_{\pm}(y_*)\ddot{\phi}_{\pm}(y_*)}{\{1 + (\dot{\phi}_{\pm}(y_*)^2)^{1/2}\}} y'_* \gamma_w|_{\varepsilon=0} v + \{1 + (\dot{\phi}_{\pm}(y_*)^2)^{1/2}\} \gamma_{sw}|_{\varepsilon=0} v \Big] \cos \theta_{\pm}.
\end{aligned}$$

Γ_* は角度条件を満たすので,

$$\mp \{y'_* + \dot{\phi}_{\pm}(y_*)x'_*\} = \{1 + (\dot{\phi}_{\pm}(y_*)^2)^{1/2}\} \cos \theta_{\pm}$$

が成り立つ. よって,

$$\begin{aligned}
& \mp \left[\{x'_* - \dot{\phi}_{\pm}(y_*)y'_*\}v' + \{x''_* + \ddot{\phi}_{\pm}(y_*)(x'_*)^2 - \dot{\phi}_{\pm}(y_*)y''_*\}v \right. \\
& \quad \left. + \{y''_* + \ddot{\phi}_{\pm}(y_*)x'_*y'_* + \dot{\phi}_{\pm}(y_*)x''_*\}\gamma_w|_{\varepsilon=0} v \right] \\
& = \left[\left\{ \frac{\dot{\phi}_{\pm}(y_*)\ddot{\phi}_{\pm}(y_*)}{\{1 + (\dot{\phi}_{\pm}(y_*)^2)^{1/2}\}} x'_* - \{1 + (\dot{\phi}_{\pm}(y_*)^2)^{1/2}\}(-x''_*y'_* + x'_*y''_*) \right\} v \right. \\
& \quad \left. + \frac{\dot{\phi}_{\pm}(y_*)\ddot{\phi}_{\pm}(y_*)}{\{1 + (\dot{\phi}_{\pm}(y_*)^2)^{1/2}\}} y'_* \gamma_w|_{\varepsilon=0} v \right] \cos \theta_{\pm}.
\end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned}
& \mp \ddot{\phi}_{\pm}(y_*)(x'_*)^2 - \frac{\dot{\phi}_{\pm}(y_*)\ddot{\phi}_{\pm}(y_*)}{\{1 + (\dot{\phi}_{\pm}(y_*)^2)^{1/2}\}} x'_* \cos \theta_{\pm} \\
& = \mp \left[\ddot{\phi}_{\pm}(y_*)(x'_*)^2 - \frac{\dot{\phi}_{\pm}(y_*)\ddot{\phi}_{\pm}(y_*)x'_*\{y'_* + \dot{\phi}_{\pm}(y_*)x'_*\}}{1 + (\dot{\phi}_{\pm}(y_*)^2)} \right] \\
& = \mp \frac{\ddot{\phi}_{\pm}(y_*)x'_*\{x'_* - \dot{\phi}_{\pm}(y_*)y'_*\}}{1 + (\dot{\phi}_{\pm}(y_*)^2)}
\end{aligned}$$

であり, さらに,

$$\begin{aligned}
& \mp \{x''_* - \dot{\phi}_{\pm}(y_*)y''_*\} + \{1 + (\dot{\phi}_{\pm}(y_*)^2)^{1/2}\}(-x''_*y'_* + x'_*y''_*) \cos \theta_{\pm} \\
& = \mp [x''_* - \dot{\phi}_{\pm}(y_*)y''_* + (-x''_*y'_* + x'_*y''_*)\{y'_* + \dot{\phi}_{\pm}(y_*)x'_*\}] \\
& = \mp [x''_*\{1 - (y'_*)^2\} + x'_*y'_*y''_* - \dot{\phi}_{\pm}(y_*)y''_*\{1 - (x'_*)^2\} - \dot{\phi}_{\pm}(y_*)x'_*x''_*y'_*] \\
& = \mp [x'_*(x'_*x''_* + y'_*y''_*) - \dot{\phi}_{\pm}(y_*)y'_*(x'_*x''_* + y'_*y''_*)] \\
& = 0.
\end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned}
& \mp \{y''_* + \ddot{\phi}_{\pm}(y_*)x'_*y'_* + \dot{\phi}_{\pm}(y_*)x''_*\} - \frac{\dot{\phi}_{\pm}(y_*)\ddot{\phi}_{\pm}(y_*)}{\{1 + (\dot{\phi}_{\pm}(y_*)^2)^{1/2}\}} y'_* \cos \theta_{\pm} \\
& = \mp \left[y''_* + \ddot{\phi}_{\pm}(y_*)x'_*y'_* + \dot{\phi}_{\pm}(y_*)x''_* - \frac{\dot{\phi}_{\pm}(y_*)\ddot{\phi}_{\pm}(y_*)y'_*\{y'_* + \dot{\phi}_{\pm}(y_*)x'_*\}}{1 + (\dot{\phi}_{\pm}(y_*)^2)} \right] \\
& = \mp \left[y''_* + \dot{\phi}_{\pm}(y_*)x''_* + \frac{\{x'_* - \dot{\phi}_{\pm}(y_*)y'_*\}\ddot{\phi}_{\pm}(y_*)y'_*}{1 + (\dot{\phi}_{\pm}(y_*)^2)} \right]
\end{aligned}$$

であり, $x'_*x''_* + y'_*y''_* = 0$ を利用すれば,

$$\begin{aligned}
y''_* + \dot{\phi}_\pm(y_*)x''_* &= \{y''_* + \dot{\phi}_\pm(y_*)x''_*\} \{(x'_*)^2 + (y'_*)^2\} \\
&= (x'_*)^2 y''_* + (y'_*)^2 y''_* + \dot{\phi}_\pm(y_*) \{(x'_*)^2 x''_* + (y'_*)^2 x''_*\} \\
&= (x'_*)^2 y''_* - x'_* y'_* x''_* + x'_* y'_* x''_* + (y'_*)^2 y''_* \\
&\quad + \dot{\phi}_\pm(y_*) \{(x'_*)^2 x''_* + x'_* y'_* y''_* - x'_* y'_* y''_* + (y'_*)^2 x''_*\} \\
&= x'_* (-x''_* y'_* + x'_* y''_*) + y'_* (x'_* x''_* + y'_* y''_*) \\
&\quad + \dot{\phi}_\pm(y_*) \{x'_* (x'_* x''_* + y'_* y''_*) - y'_* (-x''_* y'_* + x'_* y''_*)\} \\
&= \{x'_* - \dot{\phi}_\pm(y_*) y'_*\} (-x''_* y'_* + x'_* y''_*).
\end{aligned}$$

以上から

$$\begin{aligned}
\mp \{x'_* - \dot{\phi}_\pm(y_*) y'_*\} &\left[v' + \frac{\ddot{\phi}_\pm(y_*) x'_*}{1 + (\dot{\phi}_\pm(y_*))^2} v \right. \\
&\quad \left. + \left\{ \frac{\ddot{\phi}_\pm(y_*) y'_*}{\{1 + (\dot{\phi}_\pm(y_*))^2\}} - x''_* y'_* + x'_* y''_* \right\} \gamma_w|_{\varepsilon=0} v \right] = 0.
\end{aligned}$$

$x'_* - \dot{\phi}_\pm(y_*) y'_* \neq 0$ であるから,

$$v' + \frac{\ddot{\phi}_\pm(y_*) x'_*}{1 + (\dot{\phi}_\pm(y_*))^2} v + \left\{ \frac{\ddot{\phi}_\pm(y_*) y'_*}{1 + (\dot{\phi}_\pm(y_*))^2} - x''_* y'_* + x'_* y''_* \right\} \gamma_w|_{\varepsilon=0} v = 0.$$

ここで,

$$\begin{aligned}
\Phi(s, \theta) &= \Phi_*(\gamma(s, w), \theta) + w N_*(\gamma(x, w), \theta) \\
&= (x_*(\gamma(s, w)) - w y'_*(\gamma(s, w)), P_3(w) \cos \theta, P_3(w) \sin \theta)^T
\end{aligned}$$

であり, $s = 0, d$ のとき,

$$x_*(\gamma(s, w)) - w y'_*(\gamma(s, w)) = \phi_\pm(P_3(w)).$$

また, $s = 0, d$ に対して

$$\left. \frac{d}{dw} P_3(w) \right|_{w=0} = y'_* \left. \frac{d}{dw} \gamma_\pm \right|_{w=0} + x'_*$$

であるから,

$$x'_* \left. \frac{d}{dw} \gamma_\pm \right|_{w=0} - y'_* = \dot{\phi}_\pm(y_*) \left\{ y'_* \left. \frac{d}{dw} \gamma_\pm \right|_{w=0} + x'_* \right\}.$$

$x'_* - \dot{\phi}_\pm(y_*) y'_* \neq 0$ に注意すれば, $s = 0, d$ に対して

$$\left. \frac{d}{dw} \gamma_\pm \right|_{w=0} = \frac{y'_* + \dot{\phi}_\pm(y_*) x'_*}{x'_* - \dot{\phi}_\pm(y_*) y'_*}.$$

$s = 0, d$ では $\gamma_w|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{dw}\gamma_{\pm}\Big|_{w=0}$ であるから,

$$\begin{aligned} & \frac{\ddot{\phi}_{\pm}(y_*)x'_*}{1 + (\dot{\phi}_{\pm}(y_*))^2} + \frac{\ddot{\phi}_{\pm}(y_*)y'_*}{1 + (\dot{\phi}_{\pm}(y_*))^2} \gamma_w|_{\varepsilon=0} \\ &= \frac{\ddot{\phi}_{\pm}(y_*)x'_*}{1 + (\dot{\phi}_{\pm}(y_*))^2} + \frac{\ddot{\phi}_{\pm}(y_*)y'_*}{1 + (\dot{\phi}_{\pm}(y_*))^2} \cdot \frac{y'_* + \dot{\phi}_{\pm}(y_*)x'_*}{x'_* - \dot{\phi}_{\pm}(y_*)y'_*} \\ &= \frac{\ddot{\phi}_{\pm}(y_*)}{\{1 + (\dot{\phi}_{\pm}(y_*))^2\} \{x'_* - \dot{\phi}_{\pm}(y_*)y'_*\}} \\ &= \frac{\ddot{\phi}_{\pm}(y_*)}{\{1 + (\dot{\phi}_{\pm}(y_*))^2\}^{3/2}} \cdot \frac{\{1 + (\dot{\phi}_{\pm}(y_*))^2\}^{1/2}}{x'_* - \dot{\phi}_{\pm}(y_*)y'_*}. \end{aligned}$$

このとき,

$$\frac{\partial_s \Phi_*}{|\partial_s \Phi_*|} = (x'_*, y'_* \cos \theta, y'_* \sin \theta), \quad \nu_{\pm} = \mp \frac{(-1, \dot{\phi}(y_*) \cos \theta, \dot{\phi}(y_*) \sin \theta)^T}{\{1 + (\dot{\phi}(\rho_*))^2\}^{1/2}}$$

であるから,

$$\pm \frac{x'_* - \dot{\phi}_{\pm}(y_*)y'_*}{\{1 + (\dot{\phi}_{\pm}(y_*))^2\}^{1/2}} = \left(\frac{\partial_s \Phi_*}{|\partial_s \Phi_*|}, \nu_{\pm} \right)_{\mathbb{R}^3} = \cos\left(\theta_{\pm} \mp \frac{\pi}{2}\right) = \pm \sin \theta_{\pm}.$$

したがって,

$$\frac{\ddot{\phi}_{\pm}(y_*)x'_*}{1 + (\dot{\phi}_{\pm}(y_*))^2} + \frac{\ddot{\phi}_{\pm}(y_*)y'_*}{1 + (\dot{\phi}_{\pm}(y_*))^2} \gamma_w|_{\varepsilon=0} = \frac{\ddot{\phi}_{\pm}(y_*)}{\{1 + (\dot{\phi}_{\pm}(y_*))^2\}^{3/2}} \csc \theta_{\pm}.$$

また,

$$\gamma_w|_{\varepsilon=0} = \frac{y'_* + \dot{\phi}_{\pm}(y_*)x'_*}{x'_* - \dot{\phi}_{\pm}(y_*)y'_*} = \frac{\{1 + (\dot{\phi}_{\pm}(y_*))^2\}^{1/2}}{x'_* - \dot{\phi}_{\pm}(y_*)y'_*} \cdot \frac{y'_* + \dot{\phi}_{\pm}(y_*)x'_*}{\{1 + (\dot{\phi}_{\pm}(\rho_*))^2\}^{1/2}}$$

であり,

$$\frac{x'_* - \dot{\phi}_{\pm}(y_*)y'_*}{\{1 + (\dot{\phi}_{\pm}(y_*))^2\}^{1/2}} = \sin \theta_{\pm}, \quad \frac{y'_* + \dot{\phi}_{\pm}(y_*)x'_*}{\{1 + (\dot{\phi}_{\pm}(\rho_*))^2\}^{1/2}} = \mp \cos \theta_{\pm},$$

であるから,

$$\gamma_w|_{\varepsilon=0} = \mp \cot \theta_{\pm}.$$

以上から,

$$\kappa_{\Pi_{\pm}} = \pm \frac{\ddot{\phi}_{\pm}(y_*)}{\{1 + (\dot{\phi}_{\pm}(y_*))^2\}^{3/2}}, \quad \kappa_{\Gamma_*} = -x''_* y'_* + x'_* y''_*$$

とおけば, 角度条件の線形化は,

$$v' \pm (\kappa_{\Pi_{\pm}} \csc \theta_{\pm} - \kappa_{\Gamma_*} \cot \theta_{\pm}) v = 0 \quad \text{at } s = 0, d$$

となる.

この結果, 定常曲面の Γ_* のまわりでの線形化問題として次を得る.

$$\begin{cases} v_t = -\frac{1}{2} \Delta_{\Gamma_*} L[v], \\ v' \pm (\kappa_{\Pi_{\pm}} \csc \theta_{\pm} - \kappa_{\Gamma_*} \cot \theta_{\pm}) v = 0, \\ \partial_s L[v] = 0. \end{cases} \quad (10)$$

ただし, $L[v] = \Delta_{\Gamma_*} v + |A_*|^2 v$ である.

6 線形化問題に対する勾配流の構造

線形化問題に対する勾配流の構造を考える。ここで、

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \left\{ v \in H^1(\Gamma_*) \mid \int_0^d v y_* ds = 0 \right\}, \\ \mathcal{X} &= \left\{ v \in (H^1(\Gamma_*))^* \mid \langle v, 1 \rangle = 0 \right\}.\end{aligned}$$

とおく。ただし、 $(H^1(\Gamma_*))^*$ は $H^1(\Gamma_*)$ の双対空間であり、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $(H^1(\Gamma_*))^*$ と $H^1(\Gamma_*)$ の元の対を表す。

定義 6.1 $w \in \mathcal{X}$ に対して、 $u_w \in \mathcal{E}$ が

$$\begin{cases} -\Delta_{\Gamma_*} u_w = w & \text{for } \sigma \in (0, d), \\ \partial_s u_w = 0 & \text{at } \sigma = 0, d \end{cases} \quad (11)$$

の弱解であるとは、 u_w が

$$\langle w, \phi \rangle = \int_0^d \partial_s u_w \partial_s \phi y_* ds \quad (\phi \in \mathcal{E}) \quad (12)$$

を満たすことをいう。

定義 6.2 $w \in \mathcal{X}$ に対して、

$$\int_0^d v y_* ds = 0$$

を満たす $v \in H^3(\Gamma_*)$ が

$$\begin{cases} w = -\Delta_{\Gamma_*} L[v], \\ \partial_s v \pm (\kappa_{\Pi_\pm} \csc \theta_\pm - \kappa_{\Gamma_*} \cot \theta_\pm) v = 0, \\ \partial_s L[v] = 0 \end{cases} \quad (13)$$

の弱解であるとは、 v が

$$\langle w, \phi \rangle = \int_0^d \partial_s L[v] \partial_s \phi y_* ds \quad (\phi \in \mathcal{E}) \quad (14)$$

と境界条件

$$\partial_s v \pm (\kappa_{\Pi_\pm} \csc \theta_\pm - \kappa_{\Gamma_*} \cot \theta_\pm) v = 0 \quad \text{at } s = 0, d \quad (15)$$

を満たすことをいう。

対称な双線形形式を以下で定義する。

$$\begin{aligned}I[v_1, v_2] &= \int_0^d \left\{ \partial_s v_1 \partial_s v_2 - |A_*|^2 v_1 v_2 \right\} y_* ds \\ &\quad + y_* (\kappa_{\Pi_+} \csc \theta_+ - \kappa_{\Gamma_*} \cot \theta_+) v_1 v_2 \Big|_{s=d} \\ &\quad + y_* (\kappa_{\Pi_-} \csc \theta_- - \kappa_{\Gamma_*} \cot \theta_-) v_1 v_2 \Big|_{s=0}.\end{aligned}$$

また、 H^{-1} 内積を以下で定義する。

$$(v_1, v_2)_{-1} = \int_0^d \partial_s u_{v_1} \partial_s u_{v_2} y_* ds.$$

ただし、 u_{v_i} は $v_i \in \mathcal{X}$ に対する (11) の弱解である。このとき、次の定理を得る。

定理 6.1 $w \in \mathcal{X}$, $v \in \mathcal{E}$ とする. このとき, 次の (i), (ii) は同値である.

(i) $v \in H^3(\Gamma_*)$ であり, v は (13) の弱解である.

(ii) v は

$$(w, \phi)_{-1} = -I[v, \phi] \quad (\phi \in \mathcal{E}) \quad (16)$$

を満たす.

証明 まず, (i) が成り立つと仮定する. このとき, $v \in H^3(\Gamma_*)$ は線形化問題 (13) の弱解である. H^{-1} 内積の定義, および定義 6.1, 定義 6.2 より, $\phi \in \mathcal{E}$ に対して,

$$(w, \phi)_{-1} = \int_0^d \partial_s u_w \partial_s u_\phi y_* ds = \langle w, u_\phi \rangle = \int_0^d \partial_s L[v] \partial_s u_\phi y_* ds.$$

ここで,

$$\gamma = \frac{\int_0^d L[v] y_* ds}{\int_0^d y_* ds}$$

とおくと, $L[v] - \gamma \in \mathcal{E}$ であり, $u_\phi \in \mathcal{E}$ が (11) の弱解であることから,

$$\int_0^d \partial_s L[v] \partial_s u_\phi y_* ds = \int_0^d \partial_s (L[v] - \gamma) \partial_s u_\phi y_* ds = \int_0^d (L[v] - \gamma) \phi y_* ds.$$

$\phi \in \mathcal{E}$ であるから,

$$\int_0^d (L[v] - \gamma) \phi y_* ds = \int_0^d L[v] \phi y_* ds.$$

したがって,

$$\begin{aligned} (w, \phi)_{-1} &= \int_0^d (\Delta_{\Gamma_*} v + |A_*|^2 v) \phi y_* ds \\ &= \int_0^d \frac{1}{y_*} \partial_s (y_* \partial_s v) \phi y_* ds + \int_0^d |A_*|^2 v \phi y_* ds \\ &= [y_* (\partial_s v) \phi]_{s=0}^{s=d} - \int_0^d \partial_s v \partial_s \phi y_* ds + \int_0^d |A_*|^2 v \phi y_* ds \\ &= -I[v, \phi]. \end{aligned}$$

よって, (i) ならば (ii) が成り立つ.

次に, (ii) が成り立つと仮定する. このとき, $v \in \mathcal{E}$ は (16) を満たす. ここで, 各 $\phi \in \mathcal{E}$ に対して

$$\begin{cases} -\Delta_{\Gamma_*} \psi = \phi & \text{for } s \in (0, d), \\ \partial_s \psi = 0 & \text{at } s = 0, d \end{cases}$$

を満たす $\psi \in \mathcal{E}$ が一意に存在し, さらに $\phi \in H^1(\Gamma_*)$ より $\psi \in H^3(\Gamma_*)$ であるから, この ψ から ϕ への写像を

$$-\Delta_N : \mathcal{E} \cap H^3(\Gamma_*) \ni \psi \rightarrow \phi \in \mathcal{E}$$

とすると, $-\Delta_N$ は全単射である. よって, 逆写像

$$(-\Delta_N)^{-1} : \mathcal{E} \ni \phi \rightarrow \psi \in \mathcal{E} \cap H^3(\Gamma_*)$$

も得ることができる. 今, 任意の $\psi \in \mathcal{E} \cap H^3(\Gamma_*)$ に対して, $\phi = \Delta_N \psi$ とする. この ϕ に対して $\langle w, \psi \rangle = (w, \phi)_{-1}$ が成り立つことに注意すると, $(w, \phi)_{-1} = -I[v, \phi]$ より

$$\begin{aligned} \langle w, \psi \rangle &= \int_0^d \left\{ \partial_s v \partial_s \left(\frac{1}{y_*} \partial_s (y_* \partial_s \psi) \right) - |A_*|^2 v \left(\frac{1}{y_*} \partial_s (y_* \partial_s \psi) \right) \right\} y_* ds \\ &\quad + y_* (\kappa_{\Pi_+} \csc \theta_+ - \kappa_{\Gamma_*} \cot \theta_+) v \left(\frac{1}{y_*} \partial_s (y_* \partial_s \psi) \right) \Big|_{s=d} \\ &\quad + y_* (\kappa_{\Pi_-} \csc \theta_- - \kappa_{\Gamma_*} \cot \theta_-) v \left(\frac{1}{y_*} \partial_s (y_* \partial_s \psi) \right) \Big|_{s=0}. \end{aligned}$$

$w \in (H^1(\Gamma_*))^*$ より, $v \in H^3(\Gamma_*)$. このとき, 部分積分を行うことにより,

$$\begin{aligned} \langle w, \psi \rangle &= \left[\partial_s v \left(\frac{1}{y_*} \partial_s (y_* \partial_s \psi) \right) y_* \right]_{s=0}^{s=d} - \int_0^d \partial_s (y_* \partial_s v) \left(\frac{1}{y_*} \partial_s (y_* \partial_s \psi) \right) ds \\ &\quad - \left\{ [|A_*|^2 v (y_* \partial_s \psi)]_{s=0}^{s=d} - \int_0^d \partial_s (|A_*|^2 v) (y_* \partial_s \psi) ds \right\} \\ &\quad + y_* (\kappa_{\Pi_+} \csc \theta_+ - \kappa_{\Gamma_*} \cot \theta_+) v \left(\frac{1}{y_*} \partial_s (y_* \partial_s \psi) \right) \Big|_{s=d} \\ &\quad + y_* (\kappa_{\Pi_-} \csc \theta_- - \kappa_{\Gamma_*} \cot \theta_-) v \left(\frac{1}{y_*} \partial_s (y_* \partial_s \psi) \right) \Big|_{s=0} \\ &= - \left\{ \left[\frac{1}{y_*} \partial_s (y_* \partial_s v) (y_* \partial_s \psi) \right]_{s=0}^{s=d} - \int_0^d \partial_s (\Delta_{\Gamma_*} v) \partial_s \psi y_* ds \right\} \\ &\quad + \int_0^d \partial_s (|A_*|^2 v) \partial_s \psi y_* ds \\ &\quad + y_* \{ \partial_s v + (\kappa_{\Pi_+} \csc \theta_+ - \kappa_{\Gamma_*} \cot \theta_+) v \} \left(\frac{1}{y_*} \partial_s (y_* \partial_s \psi) \right) \Big|_{s=d} \\ &\quad - y_* \{ \partial_s v - (\kappa_{\Pi_-} \csc \theta_- - \kappa_{\Gamma_*} \cot \theta_-) v \} \left(\frac{1}{y_*} \partial_s (y_* \partial_s \psi) \right) \Big|_{s=0} \\ &= \int_0^d \partial_s L[v] \partial_s \psi y_* ds \\ &\quad + y_* \{ \partial_s v + (\kappa_{\Pi_+} \csc \theta_+ - \kappa_{\Gamma_*} \cot \theta_+) v \} \left(\frac{1}{y_*} \partial_s (y_* \partial_s \psi) \right) \Big|_{s=d} \\ &\quad - y_* \{ \partial_s v - (\kappa_{\Pi_-} \csc \theta_- - \kappa_{\Gamma_*} \cot \theta_-) v \} \left(\frac{1}{y_*} \partial_s (y_* \partial_s \psi) \right) \Big|_{s=0}. \quad (17) \end{aligned}$$

ここで, $C_0^\infty([0, d])$ が $\mathcal{E} \cap H^3(\Gamma_*)$ で稠密であるから, ψ の近似列 $\{\psi_n\} \subset C_0^\infty([0, d])$ をとると,

$$\langle w, \psi_n \rangle = \int_0^d \partial_s L[v] \partial_s \psi_n y_* ds.$$

$n \rightarrow \infty$ とすれば, $v \in H^3(\Gamma_*)$ が

$$\langle w, \psi \rangle = \int_0^d \partial_s L[v] \partial_s \psi y_* ds$$

を満たすことを得る。このとき,

$$\begin{aligned} & y_* \left\{ \partial_s v + (\kappa_{\Pi_+} \csc \theta_+ - \kappa_{\Gamma_*} \cot \theta_+) v \right\} \left(\frac{1}{y_*} \partial_s (y_* \partial_s \psi) \right) \Big|_{s=d} \\ & - y_* \left\{ \partial_s v - (\kappa_{\Pi_-} \csc \theta_- - \kappa_{\Gamma_*} \cot \theta_-) v \right\} \left(\frac{1}{y_*} \partial_s (y_* \partial_s \psi) \right) \Big|_{s=0} = 0. \end{aligned}$$

ここで, $\left(\frac{1}{y_*} \partial_s (y_* \partial_s \psi) \right) \Big|_{s=d} \neq 0$ かつ $\left(\frac{1}{y_*} \partial_s (y_* \partial_s \psi) \right) \Big|_{s=0} = 0$ となる ψ をとれば, $s = d$ において

$$\partial_s v + (\kappa_{\Pi_+} \csc \theta_+ - \kappa_{\Gamma_*} \cot \theta_+) v = 0$$

が成り立ち, さらに, $\left(\frac{1}{y_*} \partial_s (y_* \partial_s \psi) \right) \Big|_{s=0} \neq 0$ となる ψ をとれば, $s = 0$ において

$$\partial_s v - (\kappa_{\Pi_-} \csc \theta_- - \kappa_{\Gamma_*} \cot \theta_-) v = 0$$

が成り立つ。以上より, 求める結果を得る。 ■

7 固有値問題

線形化問題 (10) に対応する固有値問題

$$\begin{cases} -\Delta_{\Gamma_*} L[v] = \lambda v & \text{for } s \in (0, d), \\ \partial_s v \pm (\kappa_{\Pi_{\pm}} \csc \theta_{\pm} - \kappa_{\Gamma_*} \cot \theta_{\pm}) v = 0 & \text{at } s = 0, d, \\ \partial_s L[v] = 0 & \text{at } s = 0, d \end{cases} \quad (18)$$

を考える。ここで,

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \left\{ v \in H^3(\Gamma_*) \mid v \text{ は (15) と } \int_0^d v y_* ds = 0 \text{ を満たす} \right\}$$

とし, 線形作用素 $\mathcal{A}: \mathcal{D}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{X}$ を $v \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ と $\phi \in \mathcal{E}$ に対して

$$\langle \mathcal{A}v, \phi \rangle = \int_0^d \partial_s L[v] \partial_s \phi y_* ds$$

によって定義する。このとき, $\mathcal{A}$ の定義と定理 6.1 より,

$$(\mathcal{A}v, \phi)_{-1} = -I[v, \phi] \quad (\phi \in \mathcal{E})$$

を得る。作用素 $\mathcal{A}$ について, 次が成り立つ。

補題 7.1 作用素 $\mathcal{A}$ は内積 $(\cdot, \cdot)_{-1}$ に関して対称である。

証明 $v_1, v_2 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ であれば, $v_1, v_2 \in \mathcal{E}$ であるから,

$$(\mathcal{A}v_1, v_2)_{-1} = -I[v_1, v_2] = -I[v_2, v_1] = (\mathcal{A}v_2, v_1)_{-1} = (v_1, \mathcal{A}v_2)_{-1}.$$

よって, $\mathcal{A}$ は対称である。 ■

ここで, ノルムに関して次の表記を用いる。

$$\|v\|_{-1} := \{(v, v)_{-1}\}^{1/2}$$

補題 7.2 任意の $\varepsilon > 0$ に対して,

$$v(0)^2 \leq \varepsilon \|\partial_s v\|_{L^2(\Gamma_*)}^2 + C_\varepsilon \|v\|_{-1}^2 \quad (v \in \mathcal{E})$$

となる定数 $C_\varepsilon > 0$ が存在する. また, $v(d)^2$ に関しても, 同様の不等式が成り立つ.

証明 背理法による. 今, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$v_n(0)^2 > \varepsilon_n \|\partial_s v_n\|_{L^2(\Gamma_*)}^2 + n \|v_n\|_{-1}^2$$

となる $\varepsilon_n > 0$ と $v_n \in \mathcal{E}$ が存在すると仮定する. ここで, 一般性を失うことなく $v_n(0)^2 = 1$ としてよい. このとき,

$$\|v_n\|_{-1}^2 < \frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

であり,

$$\|\partial_s v_n\|_{L^2(\Gamma_*)}^2 < \frac{1}{\varepsilon_n}.$$

$v_n \in \mathcal{E}$ より $\int_0^d v_n y_* ds = 0$ であるから Poicaré 不等式が成り立ち, v_n は $H^1(\Gamma_*)$ 上で一様有界である. このとき,

$$v_n \rightarrow 0 \quad \text{weakly in } H^1(\Gamma_*).$$

$H^1(\Gamma_*) \hookrightarrow C(\Gamma_*)$ はコンパクトであるから,

$$v_n(0) \rightarrow 0.$$

これは, $v_n(0)^2 = 1$ に矛盾する. したがって, 求める結果を得る. ■

補題 7.3 $v \in \mathcal{E}$ に対して,

$$\|v\|_{H^1(\Gamma_*)}^2 \leq c_1 \|v\|_{-1}^2 + c_2 I[v, v]$$

となる正定数 c_1, c_2 が存在する.

証明 $H^1(\Gamma_*) \hookrightarrow L^2(\Gamma_*)$ はコンパクトであるから, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\|v\|_{L^2(\Gamma_*)}^2 \leq \varepsilon \|\partial_s v\|_{L^2(\Gamma_*)}^2 + \hat{C}_\varepsilon \|v\|_{-1}^2.$$

となる $\hat{C}_\varepsilon > 0$ が存在する. これは補題 7.2 と同様にして示される. このとき,

$$\begin{aligned} I[v, v] &= \int_0^d \{ |\partial_s v|^2 - |A_*|^2 v^2 \} y_* ds \\ &\quad + y_*(\kappa_{\Pi_+} \csc \theta_+ - \kappa_{\Gamma_*} \cot \theta_+) v^2 \Big|_{s=d} \\ &\quad + y_*(\kappa_{\Pi_-} \csc \theta_- - \kappa_{\Gamma_*} \cot \theta_-) v^2 \Big|_{s=0} \\ &\geq \int_0^d |\partial_s v|^2 y_* ds - \left(\max_{s \in [0, d]} |A_*|^2 \right) \int_0^d v^2 y_* ds \\ &\quad - y_*(|\kappa_{\Pi_+} \csc \theta_+| + |\kappa_{\Gamma_*} \cot \theta_+|) v^2 \Big|_{s=d} \\ &\quad - y_*(|\kappa_{\Pi_-} \csc \theta_-| + |\kappa_{\Gamma_*} \cot \theta_-|) v^2 \Big|_{s=0} \\ &\geq (1 - \gamma \varepsilon) \|\partial_s v\|_{L^2(\Gamma_*)}^2 - C_\varepsilon \|v\|_{-1}^2. \end{aligned}$$

ここで, γ, C_ε は正定数であり, γ は ε に依らない. ε を $1 - \gamma \varepsilon > 0$ となるようにとり, $v \in \mathcal{E}$ より Poicaré 不等式が成り立つことに注意すれば, 求める結果を得る. ■

系 7.1 $\mathcal{A}$ の最大固有値は上界 c_1/c_2 をもつ.

証明 λ を $\mathcal{A}$ の固有値とすると,

$$\lambda(v, v)_{-1} = -I[v, v]$$

となる $v \neq 0$ が存在する. 今, $\lambda > c_1/c_2$ と仮定する. このとき,

$$0 = \lambda(v, v)_{-1} + I[v, v] > \frac{c_1}{c_2}(v, v)_{-1} + I[v, v] \geq \frac{1}{c_2}\|v\|_{H^1(\Gamma_*)}^2.$$

これは, $v \neq 0$ に矛盾. したがって, $\lambda \leq c_1/c_2$. ■

これらの補題から, 次の定理を得る.

定理 7.1 作用素 $\mathcal{A}$ は $(\cdot, \cdot)_{-1}$ に関して自己共役である.

証明 作用素 $\mathcal{B}: \mathcal{D}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{X}$ を $\mathcal{B} := \omega Id - \mathcal{A}$ によって定める. ただし, Id は恒等作用素, $\omega \in \mathbb{R}$ は定数である. このとき, $\mathcal{A}$ が対称作用素であるから, $\mathcal{B}$ も対称作用素である. ここで, $\mathcal{R}(\mathcal{B})$ を作用素 $\mathcal{B}$ の値域とし, 適当な $\omega \in \mathbb{R}$ について $\mathcal{R}(\mathcal{B}) = \mathcal{X}$ を示す. (この結果, $\mathcal{B}$ は自己共役となる. 例えば [7, 第 10 章] を参照.) つまり, 各 $f \in \mathcal{X}$ に対して,

$$\omega v - \mathcal{A}v = f$$

を満たす $v \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ が存在することを示す. これは, $\phi \in \mathcal{E}$ に対して,

$$-\int_0^d \partial_s L[v] \partial_s \phi y_* ds + \omega \int_0^d v \phi y_* ds = \langle f, \phi \rangle \quad (19)$$

を満たす $v \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ の存在を示すことを意味する. ここで, $v_1, v_2 \in \mathcal{E}$ に対して,

$$I_\omega[v_1, v_2] := I[v_1, v_2] + \omega(v_1, v_2)_{-1}$$

とおく. このとき, 定理 6.1 と同様に考えることにより, (19) を満たす $v \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ の存在を示すことは

$$I_\omega[v, \phi] = (f, \phi)_{-1} \quad (\phi \in \mathcal{E}) \quad (20)$$

を満たす $v \in \mathcal{E}$ の存在を示すことと同値である. さらに, H^{-1} 内積の定義から, (11) の弱解 u_f, u_ϕ に対して

$$(f, \phi)_{-1} = (\partial_s u_f, \partial_s u_\phi)_{L^2(\Gamma_*)}$$

であり, $\phi \in \mathcal{E}$ より $u_\phi \in H^3(\Gamma_*)$ を得るので,

$$(\partial_s u_f, \partial_s u_\phi)_{L^2(\Gamma_*)} = (u_f, \phi)_{L^2(\Gamma_*)}.$$

したがって,

$$I_\omega[v, \phi] = (u_f, \phi)_{L^2(\Gamma_*)} \quad (\phi \in \mathcal{E}) \quad (21)$$

を満たす $v \in \mathcal{E}$ の存在を示せばよい. まず, I_ω は対称である. また, $v_1, v_2 \in \mathcal{E}$ に対して,

$$I_\omega[v_1, v_2] \leq C\|v_1\|_{H^1(\Gamma_*)}\|v_2\|_{H^1(\Gamma_*)} + \omega\|v_1\|_{-1}\|v_2\|_{-1} \leq \tilde{C}\|v_1\|_{H^1(\Gamma_*)}\|v_2\|_{H^1(\Gamma_*)}.$$

さらに補題 7.3 より, ω を $\omega \geq c_1/c_2$ を満たすようにとると, $v \in \mathcal{E}$ に対して

$$I_\omega[v, v] > I[v, v] + \frac{c_1}{c_2} \|v\|_{-1}^2 = \frac{1}{c_2} (c_2 I[v, v] + c_1 \|v\|_{-1}^2) \geq \frac{1}{c_2} \|v\|_{H^1(\Gamma_*)}^2.$$

よって, Lax-Milgram の定理より, (21) を満たす $v \in \mathcal{E}$ が存在する. つまり, (20) を満たす $v \in \mathcal{E}$ が存在する. したがって, 各 $f \in \mathcal{E}$ に対して, $\mathcal{B}v = f$ となる $v \in \mathcal{D}(\mathcal{B}) (= \mathcal{D}(\mathcal{A}))$ が存在するので, $\mathcal{R}(\mathcal{B}) = \mathcal{X}$ を得る. よって, $\mathcal{B}$ は自己共役であり, この結果, $\mathcal{A}$ は自己共役である. ■

補題 7.4 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \cdots$ を $\mathcal{A}$ の固有値とする. このとき, 次を得る.

(i) $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ に対して,

$$\lambda_1 = - \inf_{v \in \mathcal{E} \setminus \{0\}} \frac{I[v, v]}{(v, v)_{-1}}, \quad \lambda_n = - \sup_{\mathcal{W} \in \Sigma_{n-1}} \inf_{v \in \mathcal{W}^\perp \setminus \{0\}} \frac{I[v, v]}{(v, v)_{-1}}.$$

ここで, Σ_n は $\mathcal{E}$ の n 次元の部分空間の族であり, $\mathcal{W}^\perp$ は $\mathcal{W}$ の H^{-1} 内積に関する直交補空間である.

(ii) 固有値は $\kappa_{\Pi_\pm} \csc \theta_\pm$, $\kappa_{\Gamma_\rho} \cot \theta_\pm$, d に連続的に依存する. また, $\kappa_{\Pi_\pm} \csc \theta_\pm$ に関して単調減少である.

証明 この証明は省略するが, 定理 6.1 を利用し, [3, Chapter VI] を参考にして同様の議論を行えば, 求める結果を得る. ■

8 安定性の解析

$\mathcal{A}$ のすべての固有値が負である (つまり, 最大固有値 λ_1 が負である) とき, 定常曲面 Γ_* は線形安定であるという. 安定性の解析を行うために, まず次の重み付き Wirtinger 不等式を紹介する.

補題 8.1 (重み付き Wirtinger 不等式 [5]) $N \geq 1$, $T > 0$ とする. また, $\rho : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ は $1 \leq \rho(t) \leq L$ を満たす可測関数とする. このとき, $u \in W_0^{1,2}(0, T; \mathbb{R}^N)$ に対して,

$$\int_0^T |u(t)|^2 \rho(t) dt \leq C_b \int_0^T |u'(t)|^2 \rho(t) dt \quad (22)$$

が成り立つ. ただし,

$$C_b = \left(\frac{T}{4 \arctan \frac{1}{\sqrt{L}}} \right)^2$$

である.

ここで,

$$M := \max_{s \in [0, d]} |A_*|, \quad \Lambda_\pm := \kappa_{\Pi_\pm} \csc \theta_\pm - \kappa_{\Gamma_*} \cot \theta_\pm$$

とおく. また, $\alpha_* = \min_{s \in [0, d]} y_*(s) (> 0)$ とし,

$$\beta_* = \frac{1}{\alpha_*} \max_{s \in [0, d]} y_*(s), \quad C_{b,*} := \left(\frac{\pi}{4 \arctan \frac{1}{\sqrt{\beta_*}}} \right)^2$$

とする.

補題 8.2 $Md < \frac{\pi}{\sqrt{C_{b,*} + \varepsilon}} (\varepsilon > 0)$ とする. このとき, $\Lambda_-, \Lambda_+ > m$ であれば

$$I[v, v] > 0 \quad (v \in \mathcal{E} \setminus \{0\})$$

となる $m > 0$ が存在する.

証明 I の定義から,

$$\begin{aligned} I[v, v] &= \int_0^d \{ |\partial_s v|^2 - |A_*|^2 v^2 \} y_* ds + y_* \Lambda_+ v^2|_{s=d} + y_* \Lambda_- v^2|_{s=0} \\ &\geq \int_0^d |\partial_s v|^2 y_* ds - M^2 \int_0^d v^2 y_* ds + y_* \Lambda_+ v^2|_{s=d} + y_* \Lambda_- v^2|_{s=0}. \end{aligned}$$

ここで,

$$I_M[v, v] := \int_0^d |\partial_s v|^2 y_* ds - M^2 \int_0^d v^2 y_* ds + y_* \Lambda_+ v^2|_{s=d} + y_* \Lambda_- v^2|_{s=0}$$

とおき, $\Lambda_-, \Lambda_+ > m$ であれば $I_M[v, v] > 0 (v \in \mathcal{E} \setminus \{0\})$ となる $m > 0$ が存在することを示す.

$$\tilde{v}(\sigma) = v\left(\frac{d}{\pi}\sigma\right), \quad \tilde{y}_*(\sigma) = \frac{y_*\left(\frac{d}{\pi}\sigma\right)}{\alpha_*}$$

とおくと, $Md < \frac{\pi}{\sqrt{C_{b,*} + \varepsilon}}$ に注意すれば,

$$\begin{aligned} I_M[v, v] &= \frac{\pi \alpha_*}{d} \left\{ \int_0^\pi |\partial_\sigma \tilde{v}|^2 \tilde{y}_* d\sigma - \left(\frac{Md}{\pi}\right)^2 \int_0^\pi \tilde{v}^2 \tilde{y}_* d\sigma + \frac{d}{\pi} (\tilde{y}_* \Lambda_+ \tilde{v}^2|_{\sigma=\pi} + \tilde{y}_* \Lambda_- \tilde{v}^2|_{\sigma=0}) \right\} \\ &\geq \frac{\pi \alpha_*}{d} \left\{ \int_0^\pi |\partial_\sigma \tilde{v}|^2 \tilde{y}_* d\sigma - \frac{1}{C_{b,*} + \varepsilon} \int_0^\pi \tilde{v}^2 \tilde{y}_* d\sigma + \frac{d}{\pi} (\tilde{y}_* \Lambda_+ \tilde{v}^2|_{\sigma=\pi} + \tilde{y}_* \Lambda_- \tilde{v}^2|_{\sigma=0}) \right\} \end{aligned}$$

したがって, $\tilde{v} \in \tilde{\mathcal{E}} \setminus \{0\}$ に対して,

$$\|\partial_\sigma \tilde{v}\|_{L^2(0, \pi)}^2 - \frac{1}{C_{b,*} + \varepsilon} \|\tilde{v}\|_{L^2(0, \pi)}^2 + \tilde{m} (\tilde{y}_* \tilde{v}^2|_{\sigma=\pi} + \tilde{y}_* \tilde{v}^2|_{\sigma=0}) > 0$$

となる $\tilde{m} > 0$ が存在することを示せばよい.

背理法による．今，上記を満たす $\tilde{m} > 0$ は存在しないと仮定すると，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$\|\partial_\sigma \tilde{v}_n\|_{L^2(0,\pi;\tilde{y}_*)}^2 - \frac{1}{C_{b,*}} \|\tilde{v}_n\|_{L^2(0,\pi;\tilde{y}_*)}^2 + n(\tilde{y}_* \tilde{v}_n^2|_{\sigma=\pi} + \tilde{y}_* \tilde{v}_n^2|_{\sigma=0}) \leq 0$$

となる $\tilde{v}_n \in \tilde{\mathcal{E}} \setminus \{0\}$ が存在する．ここで，一般性を失うことなく $\|\tilde{v}_n\|_{L^2} = 1$ としてよい．このとき，

$$\|\partial_\sigma \tilde{v}_n\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{C_{b,*} + \varepsilon}$$

であるから，ある部分列 $\{\tilde{v}_{n_k}\} \subset \{\tilde{v}_n\}$ が存在して

$$\begin{aligned} \partial_\sigma \tilde{v}_{n_k} &\rightarrow \partial_\sigma \tilde{v} \text{ weakly in } L^2(0,\pi;\tilde{y}_*), \\ \tilde{v}_{n_k} &\rightarrow \tilde{v} \text{ strongly in } L^2(0,\pi;\tilde{y}_*), \\ \tilde{v}_{n_k} &\rightarrow \tilde{v} \text{ strongly in } C([0,\pi]). \end{aligned}$$

よって， L^2 -ノルムの弱収束に関する下半連続性から，

$$\|\partial_\sigma \tilde{v}\|_{L^2(0,\pi;\tilde{y}_*)}^2 \leq \frac{1}{C_{b,*} + \varepsilon} \|\tilde{v}\|_{L^2(0,\pi;\tilde{y}_*)}^2.$$

一方，

$$\tilde{y}_* \tilde{v}_n^2|_{\sigma=\pi} + \tilde{y}_* \tilde{v}_n^2|_{\sigma=0} \leq \frac{1}{n(C_{b,*} + \varepsilon)}$$

であるから， $\tilde{y}_* > 0$ に注意すれば，

$$\tilde{v}^2|_{\sigma=\pi} = \tilde{v}^2|_{\sigma=0} = 0.$$

したがって，区間 $[0,\pi]$ で重み付き Wirtinger 不等式が適用できるので，

$$\|\tilde{v}\|_{L^2(0,\pi;\tilde{y}_*)}^2 \leq C_{b,*} \|\partial_\sigma \tilde{v}\|_{L^2(0,\pi;\tilde{y}_*)}^2$$

となり，矛盾が生じる．以上から，求める結果を得る． ■

$K_\pm := \kappa_{\Pi_\pm} \csc \theta_\pm$ とする．補題 8.2 より， $K_-, K_+ > m$ であれば，最大固有値 λ_1 が 0 以下であることがわかる．つまり，すべての固有値が 0 以下である．固有値はパラメータに関して連続であるから，次に固有値が 0 となるパラメータの条件を求める．そのためには，

$$\Delta_{\Gamma_*} L[v] = 0, \tag{23}$$

$$\partial_s v \pm (K_\pm - \kappa_{\Gamma_*} \cot \theta_\pm) v = 0, \tag{24}$$

$$\partial_s L[v] = 0 \tag{25}$$

を解けばよい．まず (23) と (25) より，

$$\|\partial_s L[v]\|_{L^2(\Gamma_*)}^2 = 0.$$

この結果，

$$L[v] = (\text{定数})$$

であることがわかる。つまり,

$$L[v] = 0, \quad L[v] = \beta (\neq 0) \quad (26)$$

を解けば, 境界値問題 (23), (25) の基本解となる。したがって, $L[v] = 0$ の解を ϕ_1, ϕ_2 , $L[v] = \beta$ の解を ϕ_3 とすれば, 境界値問題 (23), (25) の解は

$$v(s) = c_1 \phi_1(s) + c_2 \phi_2(s) + c_3 \phi_3(s)$$

と表される。この v が (24) と $\int_0^d v y_* ds = 0$ のもとで自明解とならないパラメータの条件を求めれば, それが固有値が 0 となるパラメータの条件である。つまり, 0 が固有値問題 (18) の固有値であるための必要十分条件は, $\Lambda_{\pm} = K_{\pm} - \kappa_{\Gamma_{\pm}} \cot \theta_{\pm}$ に対して,

$$\begin{vmatrix} \phi'_1(0) - \Lambda_- \phi_1(0) & \phi'_2(0) - \Lambda_- \phi_2(0) & \phi'_3(0) - \Lambda_- \phi_3(0) \\ \phi'_1(d) + \Lambda_+ \phi_1(d) & \phi'_2(d) + \Lambda_+ \phi_2(d) & \phi'_3(d) + \Lambda_+ \phi_3(d) \\ \int_0^d \phi_1 y_* ds & \int_0^d \phi_2 y_* ds & \int_0^d \phi_3 y_* ds \end{vmatrix} = 0 \quad (27)$$

が成り立つことである。ここで,

$$\phi(s) = (\phi_1(s), \phi_2(s), \phi_3(s))^T, \quad \mathbf{F}(d) = \left(\int_0^d \phi_1 y_* ds, \int_0^d \phi_2 y_* ds, \int_0^d \phi_3 y_* ds \right)^T$$

とおくと, (27) は次と同値である。

$$\begin{aligned} & -(\phi(0) \times \phi(d), \mathbf{F}(d))_{\mathbb{R}^3} \Lambda_- \Lambda_+ - (\phi(0) \times \phi'(d), \mathbf{F}(d))_{\mathbb{R}^3} \Lambda_- \\ & + (\phi'(0) \times \phi(d), \mathbf{F}(d))_{\mathbb{R}^3} \Lambda_+ + (\phi'(0) \times \phi'(d), \mathbf{F}(d))_{\mathbb{R}^3} = 0. \end{aligned}$$

さらに, この式を $K_{\pm}$ に関して整理すると,

$$A^{\phi} K_- K_+ + B_-^{\phi} K_- + B_+^{\phi} K_+ + C^{\phi} = 0. \quad (28)$$

ただし,

$$\begin{aligned} A^{\phi} &= -(\phi(0) \times \phi(d), \mathbf{F}(d))_{\mathbb{R}^3}, \\ B_-^{\phi} &= -(\phi(0) \times \phi'(d), \mathbf{F}(d))_{\mathbb{R}^3} + (\phi(0) \times \phi(d), \mathbf{F}(d))_{\mathbb{R}^3} \kappa_*(d) \cot \theta_+, \\ B_+^{\phi} &= (\phi'(0) \times \phi(d), \mathbf{F}(d))_{\mathbb{R}^3} + (\phi(0) \times \phi(d), \mathbf{F}(d))_{\mathbb{R}^3} \kappa_*(0) \cot \theta_-, \\ C^{\phi} &= (\phi'(0) \times \phi'(d), \mathbf{F}(d))_{\mathbb{R}^3} - (\phi(0) \times \phi(d), \mathbf{F}(d))_{\mathbb{R}^3} \kappa_*(d) \kappa_*(0) \cot \theta_+ \cot \theta_-. \end{aligned}$$

関係式 (28) は以下の 3 つの場合に変形できる。

(a) $A^{\phi} \neq 0$ かつ $B_-^{\phi} B_+^{\phi} - A^{\phi} C^{\phi} \neq 0$ の場合

$$(28) \Leftrightarrow K_+ = -\frac{B_-^{\phi}}{A^{\phi}} + \frac{\frac{B_-^{\phi} B_+^{\phi} - A^{\phi} C^{\phi}}{(A^{\phi})^2}}{K_- - \left(-\frac{B_+^{\phi}}{A^{\phi}} \right)}. \quad (29)$$

(b) $A^\phi \neq 0$ かつ $B_-^\phi B_+^\phi - A^\phi C^\phi = 0$ の場合

$$(28) \Leftrightarrow \left\{ K_- - \left(-\frac{B_+^\phi}{A^\phi} \right) \right\} \left\{ K_+ - \left(-\frac{B_-^\phi}{A^\phi} \right) \right\} = 0. \quad (30)$$

(c) $A^\phi = 0$ の場合

$$(28) \Leftrightarrow B_-^\phi K_- + B_+^\phi K_+ + C^\phi = 0. \quad (31)$$

上記の (29), (30), (31) への変形を含めた条件 (28) の詳細は Γ_* の形状に依るので, 以下, Γ_* の形状によって場合分けして考える.

8.1 円柱の場合

$\Gamma_* = \{(x_*(s), y_*(s) \cos \theta, y_*(s) \sin \theta)^T \mid s \in [0, d], \theta \in [0, 2\pi]\}$ が平均曲率 $H_* (< 0)$ の円柱であるとき,

$$x_*(s) = s, \quad y_*(s) = -\frac{1}{2H_*} (= : c > 0)$$

と表される. 円柱の場合は

$$L[v] = \partial_s^2 v + \frac{1}{c^2} v$$

であり, 境界条件 (24) は

$$\partial_s v \pm K_\pm v = 0 \quad \text{at } s = 0, d. \quad (32)$$

$L[v] = 0$ および $L[v] = \frac{1}{c^2}$ ((26) において β を $\frac{1}{c^2}$ とした) は 2 階の定数係数線形微分方程式であるので, これらを解くと

$$\phi_1(s) = \cos\left(\frac{s}{c}\right), \quad \phi_2(s) = \sin\left(\frac{s}{c}\right), \quad \phi_3(s) = 1. \quad (33)$$

したがって, 円柱の場合は次を得る.

補題 8.3 固有値問題 (18) が 0 を固有値としてもつための必要十分条件は,

$$A^c(c, d)K_+K_- + B^c(c, d)(K_+ + K_-) + C^c(c, d) = 0. \quad (34)$$

ただし,

$$\begin{aligned} A^c(c, d) &= 2 - 2 \cos\left(\frac{d}{c}\right) - \frac{d}{c} \sin\left(\frac{d}{c}\right), \\ B^c(c, d) &= \frac{1}{c} \left\{ \sin\left(\frac{d}{c}\right) - \frac{d}{c} \cos\left(\frac{d}{c}\right) \right\}, \\ C^c(c, d) &= \frac{d}{c^3} \sin\left(\frac{d}{c}\right). \end{aligned}$$

また, 0 固有値の多重度は 1 である.

証明 (33) より,

$$\begin{aligned}\phi(0) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \phi(d) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{d}{c}\right) \\ \sin\left(\frac{d}{c}\right) \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} c \sin\left(\frac{d}{c}\right) \\ -c \left\{ \cos\left(\frac{d}{c}\right) - 1 \right\} \\ d \end{pmatrix}, \\ \phi'(0) &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{c} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \phi'(d) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{c} \sin\left(\frac{d}{c}\right) \\ \frac{1}{c} \cos\left(\frac{d}{c}\right) \\ 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

$\kappa_{\Gamma_*} \equiv 0$ に注意して, これらを (28) に代入すると,

$$\begin{aligned}A^\phi &= c \left\{ 2 - 2 \cos\left(\frac{d}{c}\right) \right\} - d \sin\left(\frac{d}{c}\right), \\ B_-^\phi &= \sin\left(\frac{d}{c}\right) - \frac{d}{c} \cos\left(\frac{d}{c}\right), \quad B_+^\phi = \sin\left(\frac{d}{c}\right) - \frac{d}{c} \cos\left(\frac{d}{c}\right), \\ C^\phi &= \frac{d}{c^2} \sin\left(\frac{d}{c}\right).\end{aligned}$$

右辺が 0 なので, 両辺を $c > 0$ で割れば, 求める結果を得る.

また, 0 固有値の多重度に関しては, 各パラメータが (34) を満たすときは, (27) で用いた行列の階数が 2 となることが Maple 17 を利用して得られるので, 固有値の多重度は 1 であることがわかる. ■

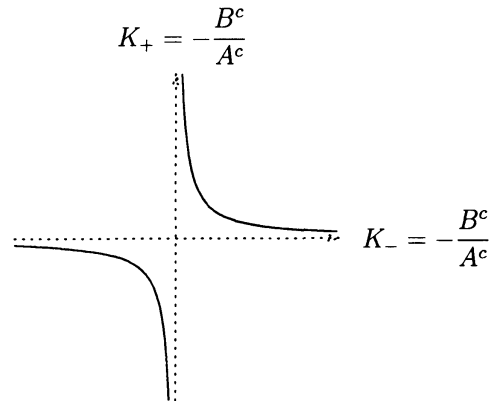
Γ_* が円柱の場合は, $B_-^\phi = B_+^\phi$ であることに注意する. このとき, $A^c(c, d) \neq 0$ に対して,

$$\{B^c(c, d)\}^2 - A^c(c, d)C^c(c, d) = \frac{1}{c^2} \left\{ \frac{d}{c} - \sin\left(\frac{d}{c}\right) \right\}^2 \geq 0$$

であり, さらに $\frac{d}{c} > 0$ に対して

$$\{B^c(c, d)\}^2 - A^c(c, d)C^c(c, d) > 0$$

であるから, (34) は (29) の形に変形できる. ここで, 円柱の場合は任意の $(c, d) (c > 0, d > 0)$ に対して (30) の状況は現れないことに注意する. $\{B^c(c, d)\}^2 - A^c(c, d)C^c(c, d) > 0$ より (29) は下図のタイプの双曲線を (K_-, K_+) 座標平面上に描く.



さらに、各 $c > 0$ に対して、

$$\frac{\partial}{\partial d} \left(-\frac{B^c(c, d)}{A^c(c, d)} \right) = \frac{1}{c^2 \{A^c(c, d)\}^2} \left\{ \frac{d}{c} - \sin \left(\frac{d}{c} \right) \right\}^2 > 0 \quad (d > 0)$$

を得るので、双曲線は d の増加にともない、 (K_-, K_+) 座標平面上を右斜め上方向に移動する。

次に、(30) への変形を考えるため、 $A^c(c, d) = 0$ となる d を各 $c > 0$ に対して求める。

$$\begin{aligned} (\partial_d A^c(c, d)) &= \frac{\partial}{\partial d} A^c(c, d) = \frac{1}{c} \left\{ \sin \left(\frac{d}{c} \right) - \frac{d}{c} \cos \left(\frac{d}{c} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{c} \left\{ \tan \left(\frac{d}{c} \right) - \frac{d}{c} \right\} \cos \left(\frac{d}{c} \right) \end{aligned}$$

であるから、 $\tan \left(\frac{d}{c} \right) = \frac{d}{c}$ となる $d \in \left(m\pi c, \left(m\pi + \frac{\pi}{2} \right) c \right) (m \in \mathbb{N})$ に対して、 $\partial_d A^c(c, d) = 0$ となる。そこで、その d の値を $q_m \in \left(m\pi c, \left(m\pi + \frac{\pi}{2} \right) c \right) (m \in \mathbb{N})$ とおくと、 $\partial_d A^c(c, d)$ の符号は $q_{2k-1} (k \in \mathbb{N})$ の前後で正から負に変わり、 $q_{2k} (k \in \mathbb{N})$ の前後で負から正に変わる。さらに、

$$A^c(c, (2k-1)\pi c) = 4 > 0, \quad A^c(c, 2k\pi c) = 0 \quad (k \in \mathbb{N})$$

であるから、

$$A^c(c, q_{2k-1}) > 0, \quad A^c(c, q_{2k}) < 0 \quad (k \in \mathbb{N}).$$

よって、各 $c > 0$ に対して、 $A^c(c, d)$ の増減表は以下のような。

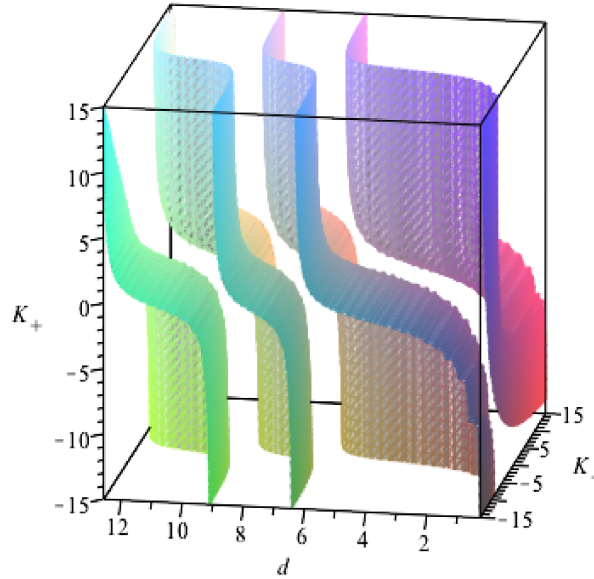
d	0	...	q_1	...	q_2	...	q_3	...	q_4	...	
$\partial_d A^c(c, d)$		+	0	-	0	+	0	-	0	+	
$A^c(c, d)$	0	↗	⊕	↘	⊖	↗	⊕	↘	⊖	↗	
		...	q_{2k-1}	...	q_{2k}	...					
		+	0	-	0	+					
		↗	⊕	↘	⊖	↗					

したがって、各 $c > 0$ に対して $p_m \in (q_m, q_{m+1}) (m \in \mathbb{N})$ が存在し、 $A(c, p_m) = 0$ となる。特に、 $p_{2k-1} = 2k\pi c (k \in \mathbb{N})$ である。

以上から, $m \in \mathbb{N}$ に対して,

$$(34) \Leftrightarrow \begin{cases} K_+ = -\frac{B^c(c, d)}{A^c(c, d)} + \frac{\{B^c(c, d)\}^2 - A^c(c, d)C^c(c, d)}{\{A^c(c, d)\}^2}, & d \neq p_m, \\ B^c(c, d)(K_- + K_+) + C^c(c, d) = 0, & d = p_m. \end{cases}$$

(K_-, d, K_+) 座標空間上に図示すると次のようになる.



$$A^c K_- K_+ + B^c(K_- + K_+) + C^c = 0$$

このとき, 次の定理を得る.

定理 8.1 c, d, K_-, K_+ が

$$A^c(c, d)K_-K_+ + B^c(c, d)(K_- + K_+) + C^c(c, d) > 0 \quad \text{かつ} \quad d < p_1 = 2\pi c$$

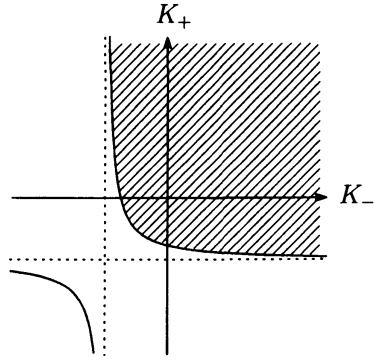
を満たすならば, 円柱が軸対称な摂動に関して線形安定となる (K_-, K_+) の組が存在する. また, $d \geq 2\pi c$ ならば, 円柱が安定となるような (K_-, K_+) の組は存在しない.

証明. 補題 8.2 より, $K_-, K_+ > m$ であるとき, $\lambda_1 \leq 0$ である. 一方, 補題 8.3 より, 0 が固有値となるのは c, d, K_-, K_+ が (34) を満たすときであるから, 固有値のパラメータ c, d, K_-, K_+ に対する連続性と K_-, K_+ に対する単調性から,

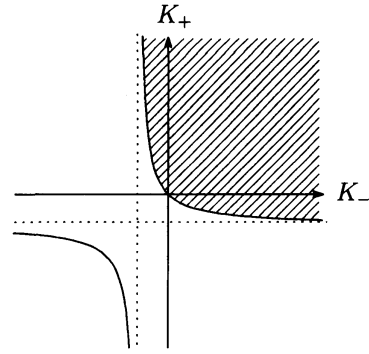
$$A^c(c, d)K_-K_+ + B^c(c, d)(K_- + K_+) + C^c(c, d) > 0 \quad \text{かつ} \quad d < p_1 = 2\pi c$$

であるとき, $\lambda_1 < 0$. つまり, このとき円柱 Γ_* は安定である. 一方, $d \geq 2\pi c$ であるときは, いかなる (K_-, K_+) をとっても, 円柱 Γ_* は安定になり得ない. ■

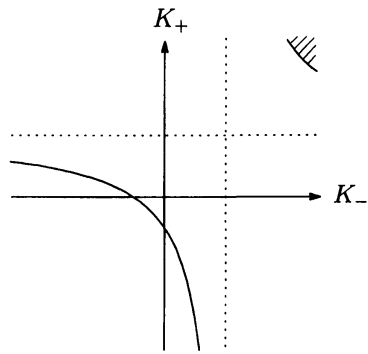
以下の図において, 斜線部分が円柱が安定となる (K_-, K_+) の領域である.



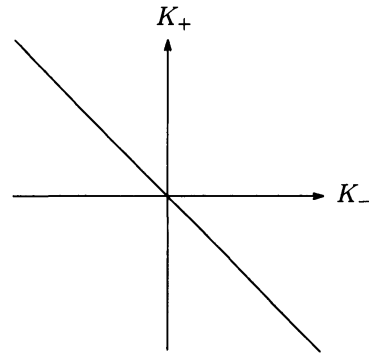
$$0 < \frac{d}{c} < \pi$$



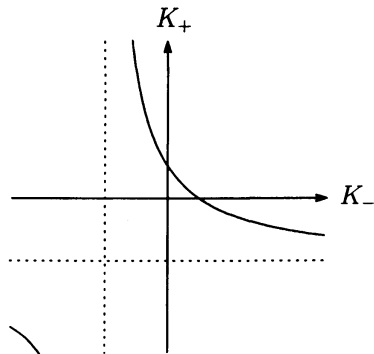
$$\frac{d}{c} = \pi$$



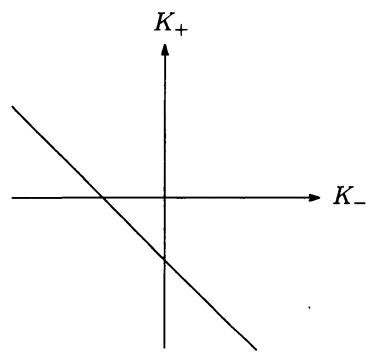
$$\pi < \frac{d}{c} < 2\pi (= \frac{p_1}{c})$$



$$\frac{d}{c} = 2\pi$$



$$2\pi < \frac{d}{c} < \frac{p_2}{c}$$



$$\frac{d}{c} = \frac{p_2}{c}$$

Athanassenas[1] と Vogel[12] の結果と比較する. [1, 12] によれば, $\Pi_{\pm}$ が平行な平面で $\theta_{\pm} = \frac{\pi}{2}$ のときは,

$0 < \frac{d}{c} < \pi$ であれば円柱は安定であり, $\frac{d}{c} > \pi$ であれば円柱は不安定である

ことが得られている。 $\Pi_{\pm}$ が平行な平面であることは $(K_-, K_+) = (0, 0)$ に相当するので、 $(K_-, K_+) = (0, 0)$ に着目し上記の図を参照すると、 [1, 12] の結果と整合していることがわかる。

8.2 アンデュロイドの場合

$\Gamma_* = \{(x_*(s), y_*(s) \cos \theta, y_*(s) \sin \theta)^T \mid s \in [0, d], \theta \in [0, 2\pi]\}$ が平均曲率 H_* (< 0) のアンデュロイドであるとき、

$$\begin{aligned} x_*(s) &= \int_0^s \frac{1 - B \sin(2H_*(s-r))}{\sqrt{1 + B^2 - 2B \sin(2H_*(s-r))}} d\sigma, \\ y_*(s) &= -\frac{1}{2H_*} \sqrt{1 + B^2 - 2B \sin(2H_*(s-r))} \end{aligned}$$

と表される。ただし、 $0 < B < 1$ である。 アンデュロイドの場合は

$$|A_*|^2 = \frac{4H_*^2 \{B^2(B - \sin(2H_*(s-r)))^2 + (1 - B \sin(2H_*(s-r)))^2\}}{(1 + B^2 - 2B \sin(2H_*(s-r)))^2}$$

に対して

$$L[v] = \partial_s^2 v + |A_*|^2 v$$

であり、境界条件 (24) は

$$\kappa_* = \frac{2BH_*(B - \sin(2H_*(s-r)))}{1 + B^2 - 2B \sin(2H_*(s-r))}$$

に対して

$$\partial_s v \pm (K_{\pm} + \kappa_{\Gamma_*})v = 0 \quad \text{at } s = 0, d. \quad (35)$$

$L[v] = 0$ および $L[v] = 1$ ((26)において β を 1 とした) は 2 階の変数係数線形微分方程式であるので、これらを解くと

$$\begin{aligned} \phi_1(s) &= \frac{\cos(2H_*(s-r))}{\sqrt{1 + B^2 - 2B \sin(2H_*(s-r))}}, \\ \phi_2(s) &= \sin(2H_*(s-r)) + 2H_* \int_0^s \frac{B \sin(2H_*(\sigma-r))}{\sqrt{1 + B^2 - 2B \sin(2H_*(\sigma-r))}} d\sigma, \\ \phi_3(s) &= \frac{1}{4H_*^2} + \frac{B}{2H_*} \int_0^s \frac{1}{\sqrt{1 + B^2 - 2B \sin(2H_*(\sigma-r))}} d\sigma \phi_1(s). \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned} &\int_0^s \frac{B \sin(2H_*(\sigma-r))}{\sqrt{1 + B^2 - 2B \sin(2H_*(\sigma-r))}} d\sigma \\ &= -\frac{1}{2} \left\{ \int_0^s \sqrt{1 + B^2 - 2B \sin(2H_*(\sigma-r))} d\sigma \right. \\ &\quad \left. - (1 + B^2) \int_0^s \frac{1}{\sqrt{1 + B^2 - 2B \sin(2H_*(\sigma-r))}} d\sigma \right\} \end{aligned}$$

であるから,

$$I_1(s; B) = \int_0^s \frac{1}{\sqrt{1 + B^2 - 2B \sin(2H_*(\sigma - r))}} d\sigma,$$

$$I_2(s; B) = \int_0^s \sqrt{1 + B^2 - 2B \sin(2H_*(\sigma - r))} d\sigma$$

とおくと,

$$\int_0^s \frac{B \sin(2H_*(\sigma - r))}{\sqrt{1 + B^2 - 2B \sin(2H_*(\sigma - r))}} d\sigma = \frac{1 + B^2}{2} I_1(s; B) - \frac{1}{2} I_2(s; B).$$

したがって,

$$\begin{aligned} \phi_1(s) &= \frac{\cos(2H_*(s - r))}{\sqrt{1 + B^2 - 2B \sin(2H_*(s - r))}}, \\ \phi_2(s) &= \sin(2H_*(s - r)) + 2H_* \left\{ \frac{1 + B^2}{2} I_1(s; B) - \frac{1}{2} I_2(s; B) \right\} \\ \phi_3(s) &= \frac{1}{4H_*^2} + \frac{B}{2H_*} I_1(s; B) \phi_1(s). \end{aligned}$$

ここで,

$$\hat{H}_* = -H_* (> 0), \quad \alpha = \hat{H}_* r + \frac{\pi}{4}$$

とし, $-\frac{\pi}{4} \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ とする. このとき, $-\frac{\pi}{2} + m\pi < \hat{H}_* s - \alpha < -\frac{\pi}{2} + (m+1)\pi$ ($m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) に対して, $I_1(s; B)$, $I_2(s; B)$ は以下のように表される.

$$\begin{aligned} I_1(s; B) &= \frac{1}{\hat{H}_*(1+B)} \{2mK(k) + (-1)^m F(\sin(\hat{H}_* s - \alpha); k) - F(\sin(-\alpha); k)\}, \\ I_2(s; B) &= \frac{1+B}{\hat{H}_*} \{2mE(k) + (-1)^m E(\sin(\hat{H}_* s - \alpha); k) - E(\sin(-\alpha); k)\}. \end{aligned}$$

ただし, $k = \frac{2\sqrt{B}}{1+B}$ であり, $K(k)$, $E(k)$ は第1種, 第2種完全楕円積分, $F(s; k)$, $E(s; k)$ は第1種, 第2種不完全楕円積分である. この表記の導出法は付録Aで示す. このとき, アンデュロイドの場合は次を得る.

補題 8.4 固有値問題 (18) が 0 を固有値としてもつための必要十分条件は,

$$\begin{aligned} &A^u(H_*, B, d, r)K_- K_+ + B_-^u(H_*, B, d, r, \theta_+)K_- + B_+^u(H_*, B, d, r, \theta_-)K_+ \\ &+ C^u(H_*, B, d, r, \theta_+ \theta_-) = 0. \end{aligned} \tag{36}$$

$A^u(H_*, B, d, r)$, $B_-^u(H_*, B, d, r, \theta_+)$, $B_+^u(H_*, B, d, r, \theta_-)$, $C^u(H_*, B, d, r, \theta_+\theta_-)$ の導出は Maple 17 による. $B_\pm^u$, C^u の表示式は項が多く繁雑であるため, ここでは A^u の表示式のみ示す.

$$\begin{aligned}
& A^u(H_*, B, d, r) \\
&= \frac{1}{8H_*^3 PQ} \left\{ H_*^2(1-B^2)^2 I_1^2 \cos(2H_*r) \cos(2H_*(d-r)) \right. \\
&\quad + 3H_*^2 I_2^2 \cos(2H_*r) \cos(2H_*(d-r)) - 4H_*^2(1+B^2) I_1 I_2 \cos(2H_*r) \cos(2H_*(d-r)) \\
&\quad + 2H_*(1+B^2) I_1 (P \sin(2H_*r) \cos(2H_*(d-r)) + Q \cos(2H_*r) \sin(2H_*(d-r))) \\
&\quad + 4H_* B I_1 (P \cos(2H_*(d-r)) - Q \cos(2H_*r)) \\
&\quad - 4H_* I_2 (P \sin(2H_*r) \cos(2H_*(d-r)) + Q \cos(2H_*r) \sin(2H_*(d-r))) \\
&\quad \left. + 2PQ(1 + \sin(2Hr) \sin(2H_*(d-r))) - (P^2 + Q^2) \cos(2H_*r) \cos(2H_*(d-r)) \right\}.
\end{aligned}$$

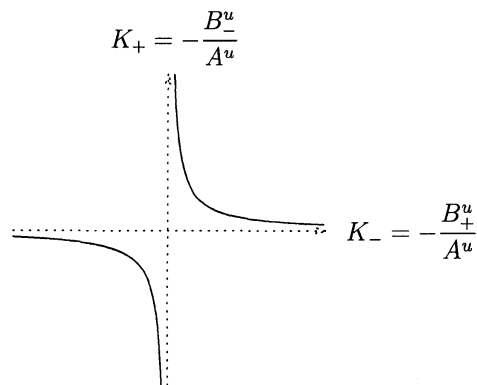
ただし,

$$P = \sqrt{1 + B^2 + 2B \sin(2H_*r)}, \quad Q = \sqrt{1 + B^2 - 2B \sin(2H_*(d-r))}.$$

このとき, $A^u(H_*, B, d, r) \neq 0$ に対して,

$$\begin{aligned}
& B_-^u(H_*, B, d, r, \theta_+) B_+^u(H_*, B, d, r, \theta_-) - A^u(H_*, B, d, r) C^u(H_*, B, d, r, \theta_+\theta_-) \\
&= \frac{1}{16H_*^4 PQ} \left[H_* \left\{ (1+B^2)(1 + \sin(2H_*r) \sin(2H_*(d-r))) - (P^2 + Q^2) \right\} I_1 \right. \\
&\quad + H_* (3 - \sin(2H_*(d-r)) \sin(2H_*r)) I_2 \\
&\quad \left. - P \cos(2H_*r) \sin(2H_*(d-r)) - Q \sin(2H_*r) \cos(2H_*(d-r)) \right]^2 \geq 0
\end{aligned}$$

であることを Maple 17 を用いて得ることができる. よって, $B_-^u B_+^u - A^u C^u$ の零点以外で (36) は (29) の形に変形でき, (29) は下図のタイプの双曲線を (K_-, K_+) 座標平面上に描く.



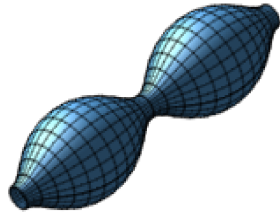
ここまで各パラメータについて満たす範囲以外は特に定めず議論してきたが, 残念ながら現段階で一般的にできるのはここまでである. ここからは, 適宜パラメータを定めながら安定性の解析を行っていく. そこで,

$$H_* = -1, \quad B = 0.6, \quad \theta_\pm = \frac{\pi}{2}$$

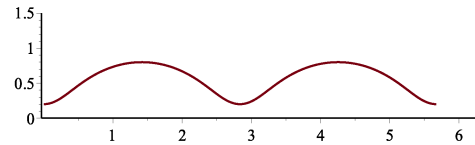
とする。次の2つの場合について考える。

$$(a) \ r = \frac{\pi}{4} \text{ の場合} \quad (b) \ r = -\frac{\pi}{4} \text{ の場合}$$

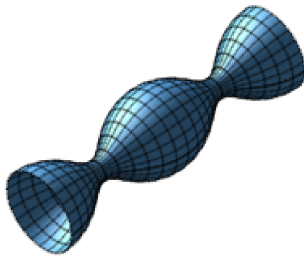
生成曲線の弧長パラメータの範囲を $s \in [0, 2\pi]$ として、それぞれの場合のアンデュロイドと生成曲線を描くと、以下のようになる。



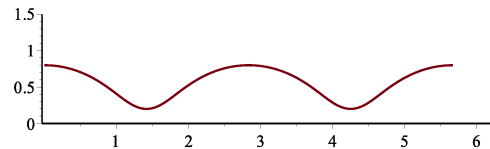
(a) の場合のアンデュロイド



(a) の場合の生成曲線



(b) の場合のアンデュロイド



(b) の場合の生成曲線

上記の2つの曲面の特徴的な違いは、弧長パラメータ s の増加にともない、(a) の場合はまずは凸に、(b) の場合はまずは凹になる形状をしている点である。直観的には、(a) の方が安定度が高いと推察される。Maple 17 を用いた解析により、以下を得る。

• (a) の場合

まず、各 $B \in (0, 1)$ に対して、 $A^u\left(-1, B, d, \frac{\pi}{4}\right) = 0$ を満たす d を求める。 $d = \frac{\pi}{2} + m\pi$ ($m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) は $A^u\left(-1, B, d, \frac{\pi}{4}\right) = 0$ を満たさないで、 $d \neq \frac{\pi}{2} + m\pi$ とすると、

$$\begin{aligned} & A^u\left(-1, B, d, \frac{\pi}{4}\right) \\ &= -\frac{\{(1-B)^2 I_{1, \frac{\pi}{4}}(d; B) - 2I_{2, \frac{\pi}{4}}(d; B)\} \sin(2d) + Q_{\frac{\pi}{4}}(d; B) (1 - \cos(2d))}{4Q_{\frac{\pi}{4}}(d, B)} \\ &= -\frac{\sin(d) \cos(d)}{2Q_{\frac{\pi}{4}}(d; B)} \{(1-B)^2 I_{1, \frac{\pi}{4}}(d; B) - 2I_{2, \frac{\pi}{4}}(d; B) + Q_{\frac{\pi}{4}}(d; B) \tan(d)\} \end{aligned}$$

ただし、 $Q_{\frac{\pi}{4}}(d; B) = \sqrt{1 + B^2 - 2B \cos(2d)}$ であり、

$$\begin{aligned} I_{1, \frac{\pi}{4}}(d; B) &= \int_0^d \frac{1}{\sqrt{1 + B^2 - 2B \cos(2\sigma)}} d\sigma, \\ I_{2, \frac{\pi}{4}}(d; B) &= \int_0^d \sqrt{1 + B^2 - 2B \cos(2\sigma)} d\sigma. \end{aligned}$$

このとき、各 $B \in (0, 1)$ に対して、まず $d = m\pi$ ($m \in \mathbb{N}$) が $A^u\left(-1, B, d, \frac{\pi}{4}\right) = 0$ を満たすことがわかる。さらに、

$$f(d; B) = (1 - B)^2 I_{1, \frac{\pi}{4}}(d; B) - 2I_{2, \frac{\pi}{4}}(d; B) + Q_{\frac{\pi}{4}}(d; B) \tan(d)$$

とおくと、 $d \in (m\pi, (m+1)\pi)$, $d \neq m\pi + \frac{\pi}{2}$ に対して

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial d} f(d; B) &= \frac{(1 - B)^2}{Q_{\frac{\pi}{4}}(d; B)} - 2Q_{\frac{\pi}{4}}(d; B) + \frac{2B \sin(2d)}{Q_{\frac{\pi}{4}}(d; B)} \tan(d) + \frac{Q_{\frac{\pi}{4}}(d; B)}{\cos^2(d)} \\ &= \frac{(1 - B)^2}{\sqrt{(1 + B)^2 - 4B \cos^2(d)}} - 2\sqrt{(1 + B)^2 - 4B \cos^2(d)} \\ &\quad + \frac{4B \sin(d) \cos(d)}{\sqrt{(1 + B)^2 - 4B \cos^2(d)}} \tan(d) + \frac{\sqrt{(1 + B)^2 - 4B \cos^2(d)}}{\cos^2(d)} \\ &= \frac{(1 + B)^2 \tan^2(d) - 4B \sin^2(d)}{\sqrt{(1 + B)^2 - 4B \cos^2(d)}} \\ &= \frac{\{(1 + B)^2 - 4B \cos^2(d)\} \tan^2(d)}{\sqrt{(1 + B)^2 - 4B \cos^2(d)}} \\ &= \frac{\{(1 - B)^2 + 4B \sin^2(d)\} \tan^2(d)}{\sqrt{(1 + B)^2 - 4B \cos^2(d)}} > 0. \end{aligned}$$

したがって、 $f(d; B)$ は $d \in (m\pi, (m+1)\pi)$, $d \neq m\pi + \frac{\pi}{2}$ に対して狭義単調増加である。ここで、 $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して、

$$\begin{aligned} f(m\pi; B) &= 2m(1 + B)\{(1 - k^2)K(k) - 2E(k)\}, \\ f((m+1)\pi; B) &= 2(m+1)(1 + B)\{(1 - k^2)K(k) - 2E(k)\}. \end{aligned}$$

ただし、 $k = \frac{2\sqrt{B}}{1+B}$, $1 - k^2 = \frac{(1 - B)^2}{(1 + B)^2}$ である。 $B \in (0, 1)$ であれば、 $k \in (0, 1)$ であることに注意すると、

$$(1 - k^2)K(k) - 2E(k) < 0.$$

実際、

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dk} \{(1 - k^2)K(k) - 2E(k)\} \\ &= -2kK(k) + (1 - k^2) \left\{ \frac{E(k)}{(1 - k^2)k} - \frac{K(k)}{k} \right\} - 2 \left\{ \frac{E(k)}{k} - \frac{K(k)}{k} \right\} \\ &= \frac{(1 - k^2)K(k)}{k} - \frac{E(k)}{k} \\ &= -k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \eta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \eta}} d\eta < 0 \end{aligned}$$

$(K(k), E(k))$ の微分に関しては、[17, pp.6-8] を参照) であり、 $K(0) = E(0) = \frac{\pi}{2}$ であるから

$$\{(1 - k^2)K(k) - 2E(k)\}|_{k=0} = K(0) - 2E(0) = -\frac{\pi}{2} < 0.$$

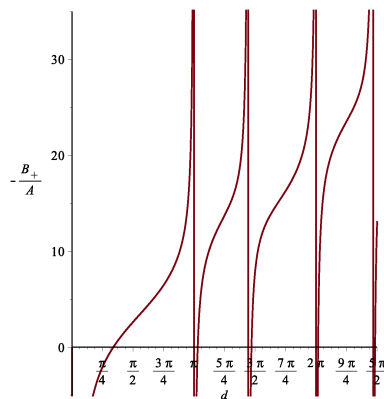
よって, $(1 - k^2)K(k) - 2E(k) < 0$ を得る. したがって, $B \in (0, 1)$ に対して

$$f(\ell\pi; B) < 0 \quad (\ell = m, m+1, m \in \mathbb{N}).$$

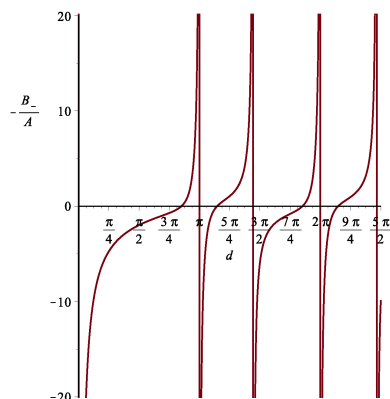
さらに,

$$\lim_{d \rightarrow m\pi + \frac{\pi}{2} - 0} f(d; B) = \infty, \quad \lim_{d \rightarrow m\pi + \frac{\pi}{2} + 0} f(d; B) = -\infty$$

を得るので, 各 $B \in (0, 1)$ に対して $f(d; B) = 0$ を満たす d が区間 $(m\pi, m\pi + \frac{\pi}{2})$ ($m \in \mathbb{N}$) にただ1つ存在することがわかる. この結果を踏まえつつ, Maple 17 によって $B = 0.6$ の場合の $K_- = \frac{B_+^u}{A}$, $K_+ = \frac{B_-^u}{A}$ を図示すると以下ようになる.



$$K_- = -\frac{B_+^u}{A^u}$$

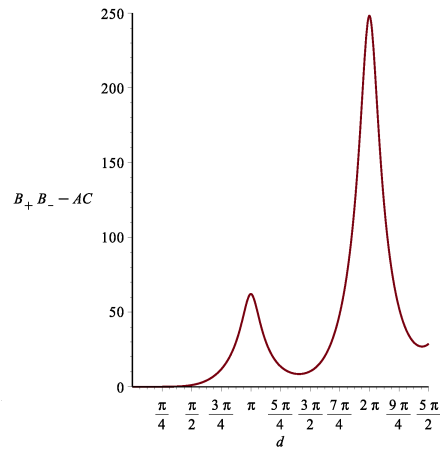


$$K_+ = -\frac{B_-^u}{A^u}$$

残念ながら $K_- = \frac{B_+^u}{A^u}$, $K_+ = \frac{B_-^u}{A^u}$ の厳密な解析はできていないが, 単調増加であることがうかがえる. 次に, $B_-^u B_+^u - A^u C^u$ の解析を行う. (a) の場合, 以下ようになる.

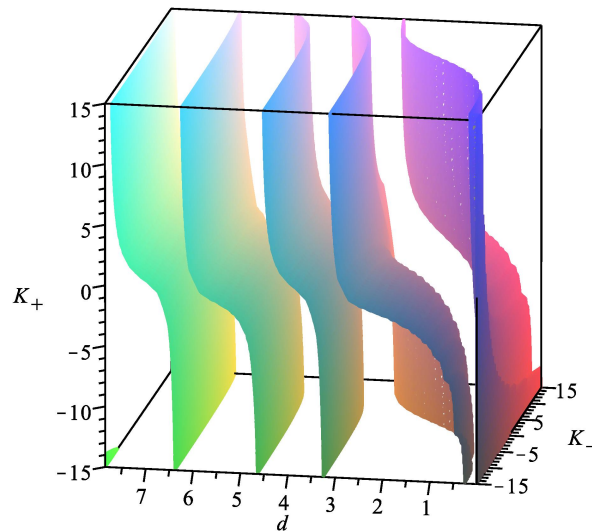
$$\begin{aligned} & B_-^u B_+^u - A^u C^u \\ &= \frac{(\text{正定数})}{Q_{\frac{\pi}{4}}} \cdot \{(1 - B)^2(1 + \cos(2d))I_{1, \frac{\pi}{4}} - (3 + \cos(2d))I_{2, \frac{\pi}{4}} + Q_{\frac{\pi}{4}} \sin(2d)\}^2. \end{aligned}$$

$B_-^u B_+^u - A^u C^u$ が零点をもつかどうか解析上重要であるが, 現段階では厳密な解析ができていない. Maple 17 を用いて図示すると以下ようになる.



$$B_- B_+^u - A^u C^u$$

$B_- B_+^u - A^u C^u$ は零点をもたないことがうかがえる。以上の解析から、(a) の場合、(36) は d が A^u の零点でないときは (29) の形に、零点のときは (31) の形に変形できることがわかる。この結果、(36) を (K_-, d, K_+) 座標空間上に図示すると次のようになる。



$$A^u K_- K_+ + B_-^u K_- + B_+^u K_+ + C^u = 0$$

したがって、(a) の場合のアンデュロイドの安定性について、円柱の場合と同様の次の結果を得ることができる。

定理 8.2 (a) の場合、 d, K_-, K_+ が

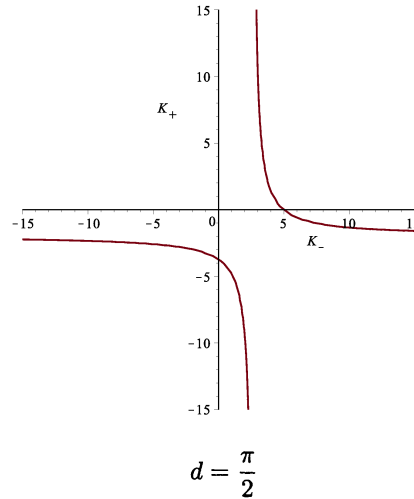
$$A^u(d) K_- K_+ + B_-^u(d) K_- + B_+^u(d) K_+ + C^u(d) > 0 \quad \text{かつ} \quad d < \pi$$

を満たすならば、アンデュロイドが軸対称な摂動に関して線形安定となる (K_-, K_+) の組が存在する。また、 $d \geq \pi$ ならば、アンデュロイドが安定となるような (K_-, K_+) の組は存在しない。

Athanassenas[1] と Vogel[12] の結果と比較する. [1, 12] より、 $\Pi_{\pm}$ が平行な平面で $\theta_{\pm} = \frac{\pi}{2}$ のときは、

アンデュロイドは不安定である

ことが得られている. [1, 12] の結果と比較するため、特に、 $d = \frac{\pi}{2}$ のときを図示すると次のようになる.



$\Pi_{\pm}$ が平行な平面で $\theta_{\pm} = \frac{\pi}{2}$ あるとき、(a) の設定においては $d = \frac{m\pi}{2}$ ($m \in \mathbb{N}$) のときアンデュロイドを $\Pi_{\pm}$ の間に置くことができる. $\Pi_{\pm}$ が平行な平面であることは $(K_-, K_+) = (0, 0)$ に相当するが、定理 8.2 より、設定 (a) の場合は $d \geq \pi$ ではアンデュロイドが安定となるような (K_-, K_+) の組は存在せず、また上図から $d = \frac{\pi}{2}$ の場合も $(K_-, K_+) = (0, 0)$ は不安定領域に含まれているので、[1, 12] の結果と整合していることがわかる.

• (b) の場合

まず、各 $B \in (0, 1)$ に対して、 $A^u\left(-1, B, d, -\frac{\pi}{4}\right) = 0$ を満たす d を求める. $d = \frac{\pi}{2} + m\pi$ ($m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) は $A^u\left(-1, B, d, -\frac{\pi}{4}\right) = 0$ を満たさないで、 $d \neq \frac{\pi}{2} + m\pi$ とすると、

$$\begin{aligned} & A^u\left(-1, B, d, -\frac{\pi}{4}\right) \\ &= -\frac{\{(1+B)^2 I_{1, -\frac{\pi}{4}}(d; B) - 2I_{2, -\frac{\pi}{4}}(d; B)\} \sin(2d) + Q_{-\frac{\pi}{4}}(d; B) (1 - \cos(2d))}{4Q_{-\frac{\pi}{4}}(d, B)} \\ &= -\frac{\sin(d) \cos(d)}{2Q_{-\frac{\pi}{4}}(d; B)} \{(1+B)^2 I_{1, -\frac{\pi}{4}}(d; B) - 2I_{2, -\frac{\pi}{4}}(d; B) + Q_{-\frac{\pi}{4}}(d; B) \tan(d)\} \end{aligned}$$

ただし、 $Q_{-\frac{\pi}{4}}(d; B) = \sqrt{1 + B^2 + 2B \cos(2d)}$ であり、

$$\begin{aligned} I_{1, -\frac{\pi}{4}}(d; B) &= \int_0^d \frac{1}{\sqrt{1 + B^2 + 2B \cos(2\sigma)}} d\sigma, \\ I_{2, -\frac{\pi}{4}}(d; B) &= \int_0^d \sqrt{1 + B^2 + 2B \cos(2\sigma)} d\sigma. \end{aligned}$$

このとき、各 $B \in (0, 1)$ に対して、まず $d = m\pi$ ($m \in \mathbb{N}$) が $A^u\left(-1, B, d, -\frac{\pi}{4}\right) = 0$ を満たすことがわかる。さらに、

$$f(d; B) = (1 + B)^2 I_{1, -\frac{\pi}{4}}(d; B) - 2I_{2, -\frac{\pi}{4}}(d; B) + Q_{-\frac{\pi}{4}}(d; B) \tan(d)$$

とおくと、(a) の場合と同様の計算をすることにより、 $d \in (m\pi, (m+1)\pi)$, $d \neq m\pi + \frac{\pi}{2}$ に対して

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial d} f(d; B) &= \frac{(1 - B)^2 \tan^2(d) + 4B \sin^2(d)}{\sqrt{(1 - B)^2 + 4B \cos^2(d)}} \\ &= \frac{\{(1 - B)^2 + 4B \cos^2(d)\} \tan^2(d)}{\sqrt{(1 - B)^2 + 4B \cos^2(d)}} > 0. \end{aligned}$$

したがって、 $f(d; B)$ は $d \in (m\pi, (m+1)\pi)$, $d \neq m\pi + \frac{\pi}{2}$ に対して狭義単調増加である。ここで、 $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して、

$$\begin{aligned} f(m\pi; B) &= 2m(1 + B)\{K(k) - 2E(k)\}, \\ f((m+1)\pi; B) &= 2(m+1)(1 + B)\{K(k) - 2E(k)\}. \end{aligned}$$

ただし、 $k = \frac{2\sqrt{B}}{1+B}$ である。 $k \in (0, 1)$ に対して、 $K(k) - 2E(k)$ の符号を調べる。 k に関して微分し、 $k \in (0, 1)$ のとき $2k^2 - 1 \in (-1, 1)$ であることに注意すれば、

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dk} \{K(k) - 2E(k)\} \\ &= \frac{E(k)}{(1 - k^2)k} - \frac{K(k)}{k} - 2 \left\{ \frac{E(k)}{k} - \frac{K(k)}{k} \right\} \\ &= \frac{K(k)}{k} + \frac{(2k^2 - 1)E(k)}{(1 - k^2)k} \\ &= \frac{k^2}{1 - k^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - (2k^2 - 1)\sin^2 \eta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \eta}} d\eta > 0. \end{aligned}$$

さらに、 $K(0) = E(0) = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{k \rightarrow 1-0} K(k) = +\infty$, $E(0) = 1$ であるから、

$$\begin{aligned} \{K(k) - 2E(k)\}|_{k=0} &= K(0) - 2E(0) = -\frac{\pi}{2} < 0, \\ \lim_{k \rightarrow 1-0} \{K(k) - 2E(k)\} &= +\infty. \end{aligned}$$

よって、ある $k_c \in (0, 1)$ が存在して、

$$K(k) - 2E(k) = \begin{cases} < 0 & (k \in (0, k_c)), \\ = 0 & (k = k_c), \\ > 0 & (k \in (k_c, 1)) \end{cases}$$

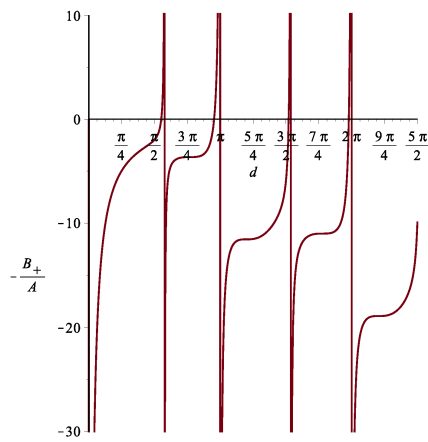
を得る。Maple 17 によれば、 $k_c \approx 0.9089$ 。したがって、ある $B_c \in (0, 1)$ が存在して、

$$f(\ell\pi; B) = \begin{cases} < 0 & (B \in (0, B_c)) \\ = 0 & (B = B_c), \\ > 0 & (B \in (B_c, 1)). \end{cases}$$

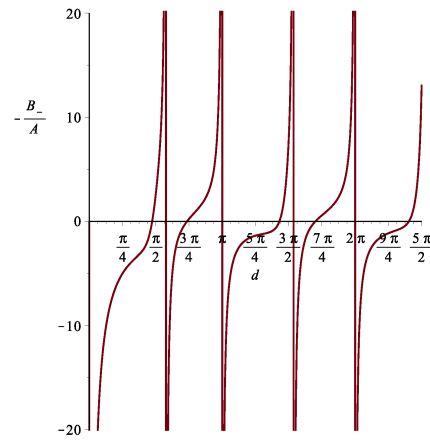
ただし, $\ell = m, m+1$, $m \in \mathbb{N}$ であり, Maple 17 によれば, $B_c \approx 0.4114$. また, 各 $B \in (0, 1)$ に対して,

$$\lim_{d \rightarrow m\pi + \frac{\pi}{2} - 0} f(d; B) = \infty, \quad \lim_{d \rightarrow m\pi + \frac{\pi}{2} + 0} f(d; B) = -\infty.$$

よって, $f(d; B) = 0$ を満たす d が, $B \in (0, B_c)$ の場合は区間 $(m\pi, m\pi + \frac{\pi}{2})$ ($m \in \mathbb{N}$) にただ1つ存在し, $B \in (B_c, 1)$ の場合は区間 $(m\pi + \frac{\pi}{2}, (m+1)\pi)$ ($m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) にただ1つ存在することがわかる. $0.6 \in (B_c, 1)$ に注意し, Maple 17 によって $B = 0.6$ の場合の $K_- = \frac{B_+}{A}$, $K_+ = \frac{B_-}{A}$ を図示すると以下ようになる.



$$K_- = -\frac{B_+^u}{A^u}$$

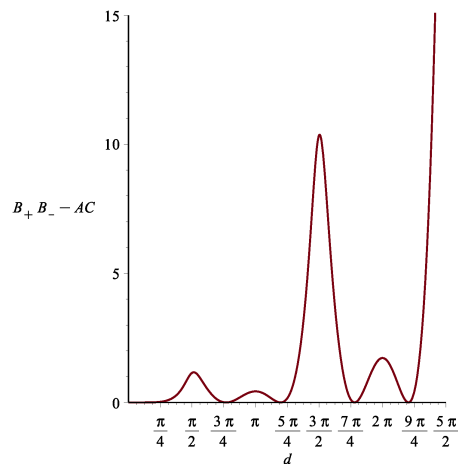


$$K_+ = -\frac{B_-^u}{A^u}$$

残念ながら (a) の場合と同様に, $K_- = \frac{B_+^u}{A^u}$, $K_+ = \frac{B_-^u}{A^u}$ の厳密な解析はできていないが, 単調増加であることがうかがえる. 次に, $B_-^u B_+^u - A^u C^u$ の解析を行う. (b) の場合, 以下のようなになる.

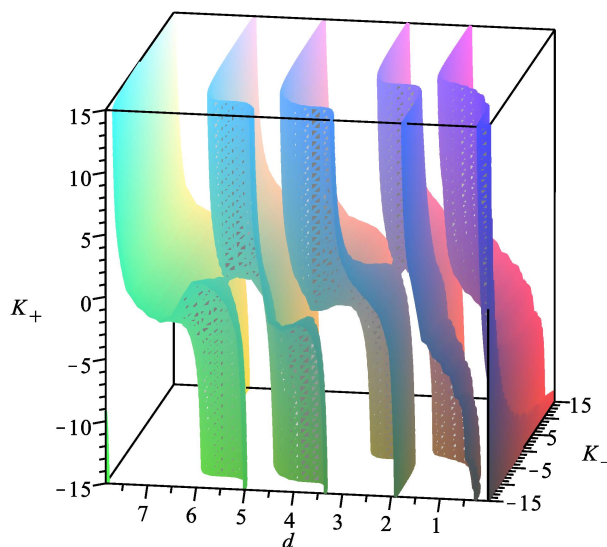
$$\begin{aligned} & B_-^u B_+^u - A^u C^u \\ &= \frac{(\text{正定数})}{Q_{-\frac{\pi}{4}}} \cdot \{(1+B)^2(1+\cos(2d))I_{1,-\frac{\pi}{4}} - (3+\cos(2d))I_{2,-\frac{\pi}{4}} + Q_{-\frac{\pi}{4}} \sin(2d)\}^2. \end{aligned}$$

$B_-^u B_+^u - A^u C^u$ が零点をもつかどうか解析上重要であるが, (a) の場合と同様に現段階では厳密な解析ができていない. Maple 17 を用いて図示すると以下のようなになる.



$$B_-^u B_+^u - A^u C^u$$

よって, (b) の場合は (a) の場合と異なり, $B_-^u B_+^u - A^u C^u$ は零点をもつことがうかがえる. 以上の解析から, (b) の場合, (36) は d に応じて (29), (30), (31) の形に変形できることがわかる. この結果, (36) を (K_-, d, K_+) 座標空間上に図示すると次のようになる.



$$A^u K_- K_+ + B_-^u K_- + B_+^u K_+ + C^u = 0$$

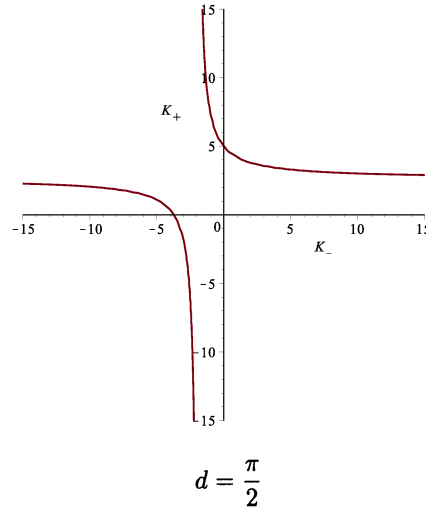
したがって, (b) の場合のアンデュロイドの安定性について, 次の結果を得ることができる.

定理 8.3 (b) の場合, ある $d_1 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ が存在して, d, K_-, K_+ が

$$A^u(d)K_- K_+ + B_-^u(d)K_- + B_+^u(d)K_+ + C^u(d) > 0 \quad \text{かつ} \quad d < d_1$$

を満たすならば, アンデュロイドが軸対称な摂動に関して線形安定となる (K_-, K_+) の組が存在する. また, $d \geq d_1$ ならば, アンデュロイドが安定となるような (K_-, K_+) の組は存在しない.

Athanassenas[1] と Vogel[12] の結果と比較する．[1, 12] の結果と比較するため，特に， $d = \frac{\pi}{2}$ のときを図示すると次のようになる．



$\Pi_{\pm}$ が平行な平面で $\theta_{\pm} = \frac{\pi}{2}$ あるとき，(b) の設定においても $d = \frac{m\pi}{2}$ ($m \in \mathbb{N}$) のときアンデューロイドを $\Pi_{\pm}$ の間に置くことができる． $\Pi_{\pm}$ が平行な平面であることは $(K_-, K_+) = (0, 0)$ に相当するが，定理 8.2 より，設定 (b) の場合は $d \geq d_1$ ではアンデューロイドが安定となるような (K_-, K_+) の組は存在せず，また，上図から $d = \frac{\pi}{2}$ の場合も $(K_-, K_+) = (0, 0)$ は不安定領域に含まれているので，[1, 12] の結果と整合していることがわかる．

(注 1) $B_-^u B_+^u - A^u C^u$ の零点では，0 固有値の多重度が 2 であることが推察されるが，現段階ではそこまでの解析はできていない．今後，さらなる解析を進めていきたい．

(注 2) Vogel は [14, 15, 16] において，2 つの球にまたがる Delaunay 曲面の安定性について部分的な結果を得ている．また，本稿を書いている段階で Fel, Rubinstein[6, 10] による 2 つの球にまたがる Delaunay 曲面の安定性に関する非常に詳細な結果を見つけたが，現段階では結果の比較ができていない．今後，比較検討を進めていく必要がある．

A 楕円積分による表示

$I_1(s; B)$ と $I_2(s; B)$ が楕円積分を用いて表されることを示す．

$$\begin{aligned}
 & 1 + B^2 - 2B \sin(2H_*(\sigma - r)) \\
 &= (1 + B)^2 - 2B(1 - \sin(2H_*(\sigma - r))) \\
 &= (1 + B)^2 \left\{ 1 - \frac{4B}{(1 + B)^2} \left(\frac{\sin(H_*(\sigma - r) + \cos(H_*(\sigma - r)))}{\sqrt{2}} \right)^2 \right\} \\
 &= (1 + B)^2 \left\{ 1 - k^2 \sin^2 \left(H_*(\sigma - r) + \frac{\pi}{4} \right) \right\} \quad \left(k = \frac{2\sqrt{B}}{1 + B} \right)
 \end{aligned}$$

と変形できるので, $\hat{H}_* = -H_* (> 0)$, $\alpha = \hat{H}_* r + \frac{\pi}{4}$ とおくと,

$$1 + B^2 - 2B \sin(2H_*(\sigma - r)) = (1 + B)^2 \{1 - k^2 \sin^2(\hat{H}_* \sigma - \alpha)\}.$$

よって,

$$\begin{aligned} I_1(s; B) &= \frac{1}{1+B} \int_0^s \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\hat{H}_* \sigma - \alpha)}} d\sigma \\ &= \frac{1}{\hat{H}_*(1+B)} \int_{-\alpha}^{\hat{H}_* s - \alpha} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \eta}} d\eta, \\ I_2(s; B) &= (1+B) \int_0^s \sqrt{1 - k^2 \sin^2(\hat{H}_* \sigma - \alpha)} d\sigma \\ &= \frac{1+B}{\hat{H}_*} \int_{-\alpha}^{\hat{H}_* s - \alpha} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \eta} d\eta. \end{aligned}$$

ここで, 一般性を失うことなく

$$-\frac{\pi}{2} \leq \hat{H}_* r \leq \frac{\pi}{2} \quad (\Leftrightarrow -\pi \leq 2\hat{H}_* r \leq \pi)$$

としてよいので,

$$-\frac{\pi}{4} \leq \alpha \leq \frac{3\pi}{4}.$$

(a) $-\frac{\pi}{4} \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ の場合

まず, $I_1(s; B)$ について考える.

$$f(\eta) = \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \eta}}$$

とおくと, $-\frac{\pi}{2} + m\pi < \hat{H}_* s - \alpha < -\frac{\pi}{2} + (m+1)\pi$ ($m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) に対して,

$$\begin{aligned} \int_{-\alpha}^{\hat{H}_* s - \alpha} f(\eta) d\eta &= \int_{-\alpha}^{\frac{\pi}{2}} f(\eta) d\eta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(\eta) d\eta \\ &\quad + \cdots + \int_{-\frac{\pi}{2} + (m-1)\pi}^{-\frac{\pi}{2} + m\pi} f(\eta) d\eta + \int_{-\frac{\pi}{2} + m\pi}^{\hat{H}_* s - \alpha} f(\eta) d\eta \end{aligned}$$

ここで, $\xi = \sin \eta$ とおくと, $\frac{d\xi}{d\eta} = \cos \eta$ であり,

$$\cos \eta = \begin{cases} \sqrt{1 - \xi^2} & (\cos \eta > 0 \text{ のとき}), \\ -\sqrt{1 - \xi^2} & (\cos \eta < 0 \text{ のとき}). \end{cases}$$

さらに,

$$\tilde{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{(1 - \xi^2)(1 - k^2 \xi^2)}}$$

とおき, $\tilde{f}(-\xi) = \tilde{f}(\xi)$ であることに注意すれば,

$$\begin{aligned} \int_{-\alpha}^{\frac{\pi}{2}} f(\eta) d\eta &= \int_{\sin(-\alpha)}^1 \tilde{f}(\xi) d\xi = \int_0^1 \tilde{f}(\xi) d\xi - \int_0^{\sin(-\alpha)} \tilde{f}(\xi) d\xi \\ &= K(k) - F(\sin(-\alpha); k), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2} + (2\ell-1)\pi}^{-\frac{\pi}{2} + 2\ell\pi} f(\eta) d\eta &= - \int_1^{-1} \tilde{f}(\xi) d\xi = - \left(\int_0^{-1} \tilde{f}(\xi) d\xi - \int_0^1 \tilde{f}(\xi) d\xi \right) \\ &= -(-2K(k)) = 2K(k), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2} + 2\ell\pi}^{-\frac{\pi}{2} + (2\ell+1)\pi} f(\eta) d\eta &= \int_{-1}^1 \tilde{f}(\xi) d\xi = \int_0^1 \tilde{f}(\xi) d\xi - \int_0^{-1} \tilde{f}(\xi) d\xi \\ &= 2K(k), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2} + (2\ell-1)\pi}^{\hat{H}_*s - \alpha} f(\eta) d\eta &= - \int_1^{\sin(\hat{H}_*s - \alpha)} \tilde{f}(\xi) d\xi = - \left(\int_0^{\sin(\hat{H}_*s - \alpha)} \tilde{f}(\xi) d\xi - \int_0^1 \tilde{f}(\xi) d\xi \right) \\ &= (-1)^{2\ell-1} F(\sin(\hat{H}_*s - \alpha); k) + K(k), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2} + 2\ell\pi}^{\hat{H}_*s - \alpha} f(\eta) d\eta &= \int_{-1}^{\sin(\hat{H}_*s - \alpha)} \tilde{f}(\xi) d\xi = \int_0^{\sin(\hat{H}_*s - \alpha)} \tilde{f}(\xi) d\xi - \int_0^{-1} \tilde{f}(\xi) d\xi \\ &= (-1)^{2\ell} F(\sin(\hat{H}_*s - \alpha); k) + K(k). \end{aligned}$$

ただし, $K(k)$ は第 1 種完全楕円積分, $F(s; k)$ は第 1 種不完全楕円積分である. つまり

$$K(k) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}} d\xi, \quad F(s; k) = \int_0^s \frac{1}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}} d\xi.$$

よって,

$$\begin{aligned} \int_{-\alpha}^{\hat{H}_*s - \alpha} f(\eta) d\eta &= K(k) - F(\sin(-\alpha); k) + (m-1) \cdot 2K(k) \\ &\quad + (-1)^m F(\sin(\hat{H}_*s - \alpha); k) + K(k) \\ &= 2mK(k) + (-1)^m F(\sin(\hat{H}_*s - \alpha); k) - F(\sin(-\alpha); k) \end{aligned}$$

を得るので,

$$I_1(s; B) = \frac{1}{\hat{H}_*(1+B)} \{2mK(k) + (-1)^m F(\sin(\hat{H}_*s - \alpha); k) - F(\sin(-\alpha); k)\}.$$

$I_2(s; B)$ についても同様にして,

$$I_2(s; B) = \frac{1+B}{\hat{H}_*} \{2mE(k) + (-1)^m E(\sin(\hat{H}_*s - \alpha); k) - E(\sin(-\alpha); k)\}.$$

ただし, $E(k)$ は第 2 種完全楕円積分, $E(s; k)$ は第 2 種不完全楕円積分である. つまり

$$E(k) = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2\xi^2}{1-\xi^2}} d\xi, \quad E(s; k) = \int_0^s \sqrt{\frac{1-k^2\xi^2}{1-\xi^2}} d\xi.$$

(b) $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{3\pi}{4}$ の場合

$I_1(s; B)$ について考える. $-\frac{\pi}{2} + m\pi < \hat{H}_*s - \alpha < -\frac{\pi}{2} + (m+1)\pi$ ($m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) に対して,

$$\begin{aligned} \int_{-\alpha}^{\hat{H}_*s - \alpha} f(\eta) d\eta &= \int_{-\alpha}^{-\frac{\pi}{2}} f(\eta) d\eta + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\eta) d\eta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(\eta) d\eta \\ &\quad + \cdots + \int_{-\frac{\pi}{2} + (m-1)\pi}^{-\frac{\pi}{2} + m\pi} f(\eta) d\eta + \int_{-\frac{\pi}{2} + m\pi}^{\hat{H}_*s - \alpha} f(\eta) d\eta. \end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned} \int_{-\alpha}^{-\frac{\pi}{2}} f(\eta) d\eta &= - \int_{\sin(-\alpha)}^{-1} \tilde{f}(\xi) d\xi = - \left(\int_0^{-1} \tilde{f}(\xi) d\xi - \int_0^{\sin(-\alpha)} \tilde{f}(\xi) d\xi \right) \\ &= - \{ -K(k) - F(\sin(-\alpha); k) \} = K(k) + F(\sin(-\alpha); k) \end{aligned}$$

であり, 2 項目以降については (a) の場合と同様な計算を行うと,

$$\begin{aligned} \int_{-\alpha}^{\hat{H}_*s - \alpha} f(\eta) d\eta &= K(k) + F(\sin(-\alpha); k) + m \cdot 2K(k) \\ &\quad + (-1)^m F(\sin(\hat{H}_*s - \alpha); k) + K(k) \\ &= 2(m+1)K(k) + (-1)^m F(\sin(\hat{H}_*s - \alpha); k) + F(\sin(-\alpha); k) \end{aligned}$$

を得るので,

$$I_1(s; B) = \frac{1}{\hat{H}_*(1+B)} \{ 2(m+1)K(k) + (-1)^m F(\sin(\hat{H}_*s - \alpha); k) + F(\sin(-\alpha); k) \}.$$

$I_2(s; B)$ についても同様にして,

$$I_2(s; B) = \frac{1+B}{\hat{H}_*} \{ 2(m+1)E(k) + (-1)^m E(\sin(\hat{H}_*s - \alpha); k) + E(\sin(-\alpha); k) \}.$$

謝辞

本研究は, JSPS 科研費 24540200, 24244012, 25247008 の助成を受けて行われた研究である. 本研究を進めるにあたって有意義な助言をして下さった, 九州大学の小磯深幸氏, 龍谷大学の四ツ谷晶二氏にこの場をかりて感謝申し上げます. 最後に, 研究集会においてシリーズレクチャーの場を提供して下さい, また本講究録においても十分なページ数を与えて下さった研究代表者の石渡哲哉氏, 副代表者の池田幸太氏に深く感謝申し上げます.

References

- [1] M. Athanassenas, *A variational problem for constant mean curvature surfaces with free boundary*, J. Reine Angew. Math., 377(1987), 97–107.
- [2] J. W. Cahn, C. M. Elliott, and A. Novick-Cohen, *The Cahn-Hilliard equation with a concentration dependent mobility: motion by minus the Laplacian of the mean curvature*, European J. Appl. Math., 7(1996), no.3, 287–301.

- [3] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of mathematical physics*, vol.I, Interscience, New York, 1953.
- [4] D. Depner, *Stability analysis of geometric evolution equations with triple lines and boundary contact*, PhD thesis 2010, University Regensburg.
- [5] F. Farroni, R. Giova, and T. Ricciardi, *Best constants and extremals for a vector Poincaré inequality with weights*, *Scientiae Math. Japonicae*, 71(2010), 111–126.
- [6] L. G. Fel and B. Y. Rubinstein, *Stability of axisymmetric liquid bridges*, *Z. Angew. Math. Phys.*, 66(2015), Issue 6, 3447–3471.
- [7] 藤田宏, 黒田成俊, 伊藤清三, 関数解析 (岩波基礎数学選書), 岩波書店, 1991.
- [8] 剣持勝衛, 曲面論講義-平均曲率一定曲面入門, 培風館, 2000.
- [9] W. W. Mullins, *theory of thermal grooving*, *J. Appl. Phys.*, 28(1957), 333–339.
- [10] B. Y. Rubinstein and L. G. Fel, *Theory of axisymmetric pendular rings*, *J. Colloid Interface Sci.*, 417(2014), 37–50.
- [11] J. E. Taylor and J. W. Cahn, *Linking anisotropic sharp and diffuse surface motion laws via gradient flows*, *J. Stat. Phys.* 77, no.1-2(1994), 183–197.
- [12] T. I. Vogel, *Stability of a liquid drop trapped between two parallel planes*, *SIAM J. Appl. Math.*, 47(1987), no. 3, 516–525.
- [13] T. I. Vogel, *Stability of a liquid drop trapped between two parallel planes. II. General contact angles*, *SIAM J. Appl. Math.*, 49(1989), no. 4, 1009–1028.
- [14] T. I. Vogel, *Convex, rotationally symmetric liquid bridges between spheres*, *Pacific J. Math.*, 224(2006), no. 2, 367–377.
- [15] T. I. Vogel, *Liquid Bridges Between Balls: The Small Volume Instability*, *J. Math. Fluid Mech.*, 15(2013), no. 2, 397–413.
- [16] T. I. Vogel, *Liquid Bridges between Contacting Balls*, *J. Math. Fluid Mech.*, 16(2014), 737–744.
- [17] 四ツ谷晶二, 村井実, 楕円関数と仲良くなろう-微分方程式の解の全体像を求めて, 日本評論社, 2013.