

Hilbert modular 曲面の

巾についてのHodge予想

東京電機大 理工 礒 文夫

§1. 定義

F を実2次体, O_F をその整数環とする。 F の元 α に対し, その $\mathbb{Q}$ 上の共役を α' と書くことにすると, $\alpha \mapsto (\alpha, \alpha')$ は, 埋め込み $F \hookrightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$, 更に, $SL_2(F) \hookrightarrow SL_2(\mathbb{R}) \times SL_2(\mathbb{R})$ を定義する。上半平面 H には $SL_2(\mathbb{R})$ が一次分数変換として作用するから, その積として, $SL_2(\mathbb{R}) \times SL_2(\mathbb{R})$ が $H \times H$ に作用し, 上の埋め込みと合成して, $SL_2(F)$ の $H \times H$ への作用が得られる。 $\Gamma = SL_2(F)/\{\pm 1\}$ において $\mathcal{S} = \Gamma \backslash H \times H$ という商空間が得られ, これを Hilbert modular 曲面と呼ぶ。以下では $\mathcal{S}$ のコンパクト化の極小な resolution を $\tilde{\mathcal{S}}$ と書き, これも Hilbert modular 曲面と呼ぶことにする。もう少しことばを導入する。 $SL_2(O_F)$ に関するウェイト2の cusp form の空間を $S_2(SL_2(O_F))$ と書き, cusp form が Hecke 作用素の同時固有関数であるとき, primitive form と言う。

§2. Oda's Theory ([O])

以下, F の類数は1であり, O_F の unit ε で $\varepsilon\varepsilon' = -1$ なるものが存在すると仮定する。 $W_2 H^2(\mathcal{S}, \mathbb{Q})$ の中で

automorphic factor $(\gamma z_1 + \delta)^2, (\gamma' z_2 + \delta')^2$ から生ずる line bundle $(\tilde{S}$ 上の) $\tilde{L}_1, \tilde{L}_2$ の class の直交補空間を $H_{sp}^2(S, \mathbb{Q})$ と書く。そして, Hecke 環を $\mathcal{H}$ と書き, その $\text{End}(H_{sp}^2(S, \mathbb{Q}))$ での image によって $\mathbb{Q}$ 上生成される部分環を $\mathcal{H}_0$ と書く。互いに “companion” である ([10, Ch. 1, 2.6]) という同値関係で primitive form を類別したときの代表元の集合を fixし Ξ と書く。すると, 次の“固有空間分解”が得られる:

$$\mathcal{H}_0 \cong \bigoplus_{f \in \Xi} K_f,$$

$$H_{sp}^2(S, \mathbb{Q}) \cong \bigoplus_{f \in \Xi} H_f,$$

ここに K_f は f の固有値でされる総実代数体, H_f はその上に K_f が Hodge 構造の準同型として作用するある偏極 rational Hodge 構造である。さて, ようやく, Coats Theory の主定理の一つを述べることができる。

定理 (2.1) $\text{End}^0 A_f^i \supset K_f$ なるアーベル多様体 A_f^i ($i = 1, 2$) が存在して, Hodge 構造の同型として,

$$H_f \cong \bigoplus_{K_f} H^1(A_f^1, \mathbb{Q}) \otimes H^1(A_f^2, \mathbb{Q})$$

が成り立つ。更に上の同型は K_f の作用と compatible である。

§3. 主定理.

定理(3.1) 以上の記号の下で, 更に (2.1) の A_f^1 と A_f^2 とが 同じアーベル多様体 A_f に K_f -同値であるを仮定する。そして

$$\text{End}^0\left(\prod_{f \in \Sigma} A_f\right) \cong \prod_{f \in \Sigma} K_f$$

が成り立っていると仮定する。このとき

$$\mathcal{B}^*(\tilde{S}^n) = \mathcal{C}^*(\tilde{S}^n)$$

がすべての n について成り立つ。更に $n=2$ については

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{B}^2(\tilde{S} \times \tilde{S}) / \mathcal{D}^2(\tilde{S} \times \tilde{S}) \\ = \sum_{f \in \Sigma} [K_f : \mathbb{Q}] \end{aligned}$$

$$= p_g(\tilde{S})$$

が成り立つ。

注意. $\mathcal{B}^*(X) = \bigoplus_{d=0}^{\dim X} (H^{2d}(X, \mathbb{Q}) \cap H^{d,d}(X)),$

$\mathcal{C}^*(X) = \mathcal{B}^*(X)$ の algebraic cycle で生成される部分環,

$\mathcal{D}^*(X) = \mathcal{B}^*(X)$ の divisor class で生成される部分環,

なる記号を用いた。複素数体上で定義された非特異射影多様体 X について $\mathcal{B}^*(X) = \mathcal{C}^*(X)$ が成り立つであろう, というのが Hodge 予想であるが, 上の (3.1) はそれがある仮定の下で $\tilde{S}^n$ について成り立つという主張である。従って, 実際にその仮定 (かなりたくさんの) をみたすような $\tilde{S}$ が 存在するかどうか問題となるが, 次の定理はその例を与える。

定理 (3.2) D の判別式 $\in D$ とする。その D が次の条件をみたすとする:

$$D \equiv 1 \pmod{4} \quad \text{かつ} \quad D \leq 181$$

あるいは,

$$D = 197, 269, 293, 317.$$

そのとき, 対応する Hilbert modular 曲面 $\tilde{S}$ について $\mathcal{B}^*(\tilde{S}^n) = \mathcal{C}^*(\tilde{S}^n)$.

§4. 定理 (3.1) の証明.

$n = 2$ のときの証明を与える。まず $\tilde{S}$ は regular なので ([HV, Prop. II. 4]) $H^*(\tilde{S} \times \tilde{S}, \mathbb{Q})$ の Künneth 分解は

$$\begin{aligned} H^*(\tilde{S} \times \tilde{S}, \mathbb{Q}) \cong & (H^0(\tilde{S}, \mathbb{Q}) \otimes H^4(\tilde{S}, \mathbb{Q})) \\ & \oplus (H^4(\tilde{S}, \mathbb{Q}) \otimes H^0(\tilde{S}, \mathbb{Q})) \\ & \oplus (H^2(\tilde{S}, \mathbb{Q}) \otimes H^2(\tilde{S}, \mathbb{Q})) \end{aligned}$$

となる。従って, $H^2(\tilde{S}, \mathbb{Q}) \otimes H^2(\tilde{S}, \mathbb{Q})$ を考察すればよい。更に次の

命題 (4.1) ([C, Remark 1.13])

偏極有理 Hodge 構造として

$$\begin{aligned} H^2(\tilde{S}, \mathbb{Q}) \otimes (\oplus \mathbb{Q}(-1)) \\ \cong H_{sp}^2(\tilde{S}, \mathbb{Q}) \otimes (\oplus \mathbb{Q}(-1)), \end{aligned}$$

ここに, $\mathbb{Q}(-1)$ は ウェイト 2 の "Tate" Hodge 構造。

と, Lefschetz の定理 " $\mathcal{B}^1(X) = \mathcal{C}^1(X)$ " より,
 $H_{sp}^2(\tilde{S}, \mathbb{Q}) \otimes H_{sp}^2(\tilde{S}, \mathbb{Q})$ を考察すればよいことになる。
 その上, (3.1) の仮定と定理 (2.1) を考慮すれば, 結局, $V_f = H^1(A_f, \mathbb{Q})$ として, $(V_{f \otimes V_f})_{\mathbb{Q}} \otimes (V_{f \otimes V_f})_{\mathbb{Q}}$

の Hodge 構造を考察すればよくなる。ところが, V_f の Hodge 構造は A_f の Hodge 群 $H_g(A_f)$ の表現としてとらえることができるから, $H_g(A_f)$ の構造がわかればよい。つまり,

$$\begin{aligned} & \dim_{\mathbb{Q}} [(V_f \otimes_{K_f} V_f) \otimes_{\mathbb{Q}} (V_f \otimes_{K_f} V_f) \text{ の } (2,2)\text{-part}] \\ &= \dim_{\mathbb{Q}} [(V_f \otimes_{K_f} V_f) \otimes_{\mathbb{Q}} (V_f \otimes_{K_f} V_f)]^{H_g(A_f)} \\ &= \dim_{\mathbb{C}} [(V_f \otimes_{K_f} V_f) \otimes_{\mathbb{Q}} (V_f \otimes_{K_f} V_f) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}]^{\text{Lie}(H_g(A_f))_{\mathbb{C}}} \end{aligned}$$

として, Hodge cycle $\mathcal{B}^2(\tilde{S} \times \tilde{S})$ の本質的な部分ととらえることができる。さて, 上の等式の右辺の $[\]$ の中の部分は, $\text{Hom}(K_f, \mathbb{C}) = \{ \sigma_1, \dots, \sigma_{d_f} \}$ ($d_f = [K_f : \mathbb{Q}]$) として,

$$\begin{aligned} & ((V_f \otimes_{K_f} V_f) \otimes_{\mathbb{Q}} (V_f \otimes_{K_f} V_f)) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \\ & \cong ((V_f \otimes_{K_f} V_f) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} ((V_f \otimes_{K_f} V_f) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}) \\ & \cong [\bigoplus_{\sigma_i} ((V_f \otimes_{K_f} V_f) \otimes_{K_f \sigma_i} \mathbb{C})] \otimes_{\mathbb{C}} [\bigoplus_{\sigma_j} ((V_f \otimes_{K_f} V_f) \otimes_{K_f \sigma_j} \mathbb{C})] \\ & \cong \bigoplus_{i,j} ((V_f \otimes_{K_f \sigma_i} \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} (V_f \otimes_{K_f \sigma_i} \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} (V_f \otimes_{K_f \sigma_j} \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} (V_f \otimes_{K_f \sigma_j} \mathbb{C})) \end{aligned}$$

となる。一方, $H_g(A_f)$ については,

命題 (4.2) $H_g(A_f) \cong \text{SL}_2(K_f)$ で, $H_g(A_f)$ の V_f への表現は $\text{SL}_2(K_f)$ の K_f^2 への自然な表現と同値。

が成り立つ。これは, $\text{End}^0 A_f \cong K_f$ (K_f は $\dim A_f$ 次

の総実代数体) が成り立つアーベル多様体については
 $H_g(A_f)_{\mathbb{C}} \cong \prod_{i=1}^{d_f} \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \cong \mathrm{SL}_2(K_f) \otimes \mathbb{C}$ であること ([H]), 及び, $H_g(A_f)$ が V_f に K_f -linear に作用してしかも V_f 上の Riemann 形式 (それは $\mathbb{Q}$ -双線形で歪対称である) を不変にすること, より従う。よって,

$$[V_i \otimes V_i \otimes V_i \otimes V_i]^{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}, \\ (V_i = V_f \otimes_{K_f, \sigma_i} \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^2) \text{ を考えればよい。これに関し,}$$

補題 (4.3) $V_i \cong \mathbb{C}^2$ の標準的な base ε
 $e_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\bar{e}_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ の自然な作用について,

$$\begin{aligned} [V_i \otimes V_i]^{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})} &= \langle e_i \otimes \bar{e}_i - \bar{e}_i \otimes e_i \rangle_{\mathbb{C}}, \\ [V_i \otimes V_i \otimes V_i \otimes V_i]^{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})} \\ &= \langle e_i \otimes \bar{e}_i \otimes e_i \otimes \bar{e}_i - e_i \otimes \bar{e}_i \otimes \bar{e}_i \otimes e_i \\ &\quad - \bar{e}_i \otimes e_i \otimes e_i \otimes \bar{e}_i + \bar{e}_i \otimes e_i \otimes \bar{e}_i \otimes e_i, \\ &\quad e_i \otimes e_i \otimes \bar{e}_i \otimes \bar{e}_i - e_i \otimes \bar{e}_i \otimes \bar{e}_i \otimes e_i \\ &\quad - \bar{e}_i \otimes e_i \otimes e_i \otimes \bar{e}_i + \bar{e}_i \otimes \bar{e}_i \otimes e_i \otimes e_i \rangle_{\mathbb{C}}. \end{aligned}$$

従って,

系 (4.4)

$$\dim_{\mathbb{Q}}(H_f \otimes H_f \text{ の } (2,2)\text{-part}) = d_f^2 + d_f.$$

さて, $[V_f \otimes_{K_f} V_f]^{H_g(A_f)} \cong \mathrm{End}_{K_f}(A_f) \otimes \mathbb{Q} \cong K_f$ に注意すれば, $[V_i \otimes V_i]^{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}$ の部分はすべて algebraic cycle であることがわかる (もちろん, これは Lefschetz の定理の帰結でもある)。従って, 問題は $[V_i \otimes V_i \otimes V_i \otimes V_i]^{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}$ のもう 1次元分の cycle, よって, 全体で (これを動かして) d_f 次元分の algebraic cycle を見出さなければならぬ

い。ところが $z(z_1, z_2) = (z_2, z_1)$ で定義される $H \times H$ の自分自身への写像から induce される $\tilde{S}$ の algebraic correspondence を考え、これが H_f に induce する Hodge 構造としての自己準同型を z^* と書くと、すべての $\sigma_i: K_f \rightarrow \mathbb{C}$ に対し、 z^* は H_f の σ_i に (ある base に関し)

$$\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

として作用していることがわかる。一方、 K_f は H_f の σ_i に scalar として作用 (固有空間だから) しているから、結局 $K_f \otimes K_f \cdot z^*$ で $H_f \otimes H_f$ のすべての Hodge cycle を尽くすことがわかる。更に、(3.1) の後半 $\dim_{\mathbb{Q}}(\mathcal{O}^2(\tilde{S} \times \tilde{S}) / \mathcal{O}^2(\tilde{S} \times \tilde{S})) = \sum_{f \in \mathcal{B}} [K_f : \mathbb{Q}]$ も上の議論から明らかであろう。

§ 5. 定理 (3.2) の証明.

D が 23 以下の mod 4 で 1 に合同な素数の時は $\tilde{S}$ は rational となり ([HV]) 問題ない。 D が 29 以上の mod 4 で 1 に合同な素数の時は 次の著しい事実を用いる:

定理 (5.1) ([C, Th. 17.2, Prop. 13.5])
 任意の "self-conjugate" な primitive form f は、ある primitive elliptic cusp form $h(f) \in S_2(\Gamma_0(D), \left(\frac{D}{\cdot}\right))$ の Deligne-Nagarmma lifting として得られ、(2.1) の A_f^1, A_f^2 は $h(f)$ に附随するアーベル多様体 $B_{h(f)}$ に K_f -同値である。更に、 $\prod_{f \in \mathcal{B}} A_f$ は $\prod_{f \in \mathcal{B}} B_f$ (B_f は B と同様に定義される) と同値である。

(ここに f が self-conjugate かつ $z^*(f)$ が f の定数倍になることを言う。)

更に次の定理が成り立つことに注意すれば,

定理 (5.2)

D が mod 4 で 1 に合同な素数ならば

$$\text{End}^0\left(\prod_{h \in \mathfrak{D}} B_h\right) \cong \prod_{h \in \mathfrak{D}} \text{End}^0 B_h \cong \prod_{f \in \mathfrak{D}} K_f$$

(証明は Ribet 氏に教えて頂きました。彼の [R] のことばを用いて言えば, D が上の条件を満たすとき, f は "twist" も "inner twist" も持たない, ということになります。)

(5.1) と合わせて (3.2) が言えることになる (3.2) の D について, すべての $f \in \mathfrak{D}$ が self-conjugate であることは知られている。例えば [O, p. 169]。)

注意 i) [HV] によると, $\tilde{S}$ は

- | | |
|----------------------|----------------------------------|
| 1) elliptic K3 | ($D = 29, 37, 41$) |
| 2) honestly elliptic | ($D = 53, 61, 73$) |
| 3) general type | ($D \geq 89$ かつ $\equiv 1(4)$) |

である。

注意 ii) (塩田先生による) 上の i) の場合 $\tilde{S}$ は $K_m(E^2)$ (E はある elliptic curve, $K_m(E^2)$ はアーベル多様体 $E^2 = E \times E$ に附随する Kummer 曲面) で dominate され, 従って $\tilde{S}^n$ の Hodge 予想は E^{2n} の Hodge 予想 (Tate, Murasaki による) に帰着される。

Reference

- [H] F. Hazama, Algebraic cycles on Abelian varieties with many real endomorphisms, Tôhoku Math. Journ. 35 (1983), 303-308.
- [HV] F. Hirzebruch, Van de Ven, Hilbert modular surfaces and the classification of algebraic surfaces, Invent. Math. 23 (1974), 1-29.
- [O] T. Oda, Periods of Hilbert modular surfaces, Progress in Mathematics 19, Birkhäuser, 1982.
- [R] K. A. Ribet, Twists of modular forms and endomorphisms of abelian varieties, Math. Ann. 253 (1980), 43-62.