

【研究ノート】

私学振興プロジェクト プロジェクト【数学】報告と 数学教育における「内発的動機づけ」に関する考察

京都大学特任教授 鳩山 文雄

はじめに

平成30年度に、兵庫県播磨高等学校・京都大学連携プロジェクトとして、プロジェクト【数学】を高等学校の数学科の教員対象に実施した。数学の指導法についての講義を軸として、指導力向上を支援することを目的に、具体的な実践方法を講義と研究協議により授業展開を中心として推進した。

具体的な内容は、①平成30年5月18日には、「数学の指導方法について」・「授業展開での留意点」・「生徒に学力をつけるための留意点」・「高校数学の式変形の原則」、②平成30年7月4日には、「**数学とはどのような学問か**」・「数学Aの確率の導入から入試問題まで」、③平成30年8月17日には、「**なぜ数学を学ぶのか**」・「数学がわかるとできるの違いについて」・「数学Iの図形と計量」、④平成30年10月16日には、「**アクティブ・ラーニングの高校数学への授業展開**」・「数学Aの図形の性質」、⑤平成30年12月3日には、「数学I、数学Aのセンター試験を素早く解くための授業展開」、⑥平成31年2月21日には、よりよい授業を目指す授業改善のための「研究授業と研究協議」を実施した。

文部科学省は「21世紀型教育」として、2018年2月14日に、2022年から実施する高等学校の学習指導要領の改定案を発表した。55科目中27科目が新設または見直しとなる9年ぶりの大幅な改定となる。思考力・判断力・表現力の育成を重視し、全ての科目で討論や発表を通じた「主体的・対話的で深い学び」による授業改善を進めるものであり、社会に開かれた教育課程となる。知識注入型授業からの発想の転換が求められ、知識偏重から主体的に課題を解決するための思考力が重視され、教員も課題発見・解決能力を磨くことが必要となる。

文部科学省は「新たな未来」を築くため、教育の質を向上しグローバル化する社会に即した人材を育成する教育を実践する方針を提示したのである。

文部科学省が示す「生徒が見通しを持って粘り強く取り組み、自らの学習活動を振り返って次につなげる主体的な学びの過程を実現すること」には、数学が最適な教科であるが、数学が必要不可欠であると生徒が感じていないことが課題である。このような認識から、「**数学とはどのような学問か**」・「**なぜ数学を学ぶのか**」を生徒に理解させる必要があり、文部科学省が求めるものは数学的な論理的思考力のうえに成り立つものであることを念頭に置いて、生徒に数学の問題が解ける楽しさと喜びを支援する授業展開を研究することを、今回の私学振興プロジェクトのプロジェクト【数学】の目的とした。

学習意欲を高めて行動に向かわせる「学習動機づけ」は、近年の心理学の研究では4つに分類してとらえることが主流となった。「内発的動機づけ」「同一化的動機づけ」「取り入的動機づけ」「外的動機づけ」の4つである。活動に対する好奇心や興味・関心によってもたらされる「内発的動機づけ」の、中等教育における学習に価値や意味を見出し、自律的・意欲的に数学に取り組むための方法論を考察する。

心理学の研究においても、中等教育が生徒の動機づけや価値観の形成に大きな変化をもたらすことが指摘されている。中等教育において、いかに内発的動機づけを維持させていくかが重要な課題である。

本稿では、数学教育における「内発的動機づけ」を『生徒に授業展開する方法論』として、「なぜ数学を学ぶのか」・「数学とはどのような学問か」・「アクティブ・ラーニングの高校数学への授業展開」について探究する。

1. 『生徒に授業展開する方法論』としての「なぜ数学を学ぶのか」についての考察

内発的動機づけとして、「なぜ数学を学ぶのか」の生徒に授業展開する方法論を一考察する。

初めに議論の前提として、「なぜ数学を学ぶのか」についての文献（引用文献 1）における記述を提示する。

① 世界的な数学者の東北大学 小谷元子教授の見解（概要）

（i）数学は世界、科学を理解するための「共通言語」。自然界や人間の仕組みを解き明かす重要なツール。（ii）数学の有用性や楽しさが、日本では認識されておらず、数学を重要視する世界の情勢から取り残されている。その原因は、受験勉強が優先され、数学の本来の自ら発見する喜びや面白さに気付く機会を奪っている。（iii）例えば土砂の中で水がどう流れるかという問題は、細胞の中で物質がどう拡散するかという問題と数学的には同じで、本質的なものを共通言語である数学で表現することで、類似の結果が期待でき、早く成果がでる。（iv）現代の社会は理系か文系かといったどちらか一方の知識だけでは生きていくことが出来ない。デジタル化社会ではデータや情報を論理的に考えることが必要で、多重的思考を持つことも重要。

② カドカワの川上量生 社長の見解（概要）

（i）未来を先取りしたい企業が、今 数学の世界にどっと押し寄せている。数学が決定的に必要なと感じたのはAI（人工知能）の研究。現代数学の教養がなければ、仕組みや可能性が理解できない。（ii）世界がどのように成り立っているのかを考える時に、数学は極めて論理的な思考方法を与えてくれる。（iii）世の中で数学の対象にできないものは、ほとんどなくなっている。実用的に計算できるかどうかは別だが、数学で扱えない現実世界の問題はほぼない。（iv）数学専攻の学生の獲得競争は、米国では激しい。例えば微積分の考え方は、米国では文系の人でも普通に使っている。世界の秘密を知りたいという欲求を持っているならば、数学を諦めることは人生を諦めることと同じ。（v）高校までの数学は、プロローグに過ぎない。現代数学は、これからの人類に絶対必要な最低限の教養である。

③ 著名な大学教授や数学者の見解（概要）

（i）17世紀の科学革命以来、数学は人類文化にとって必須不可欠の道具となった。数学を知らないと、世界的な変化の大潮流から取り残されてしまう。数学を学習する一つの目的は、急速に変化する世界の動きを敏感に知るための基礎を築くことである。数学教育は、現代の人材育成のための深い教養の鍛錬の舞台として、困難な課題に挑戦するために不可欠である。数学の学習が、数学的な知識の暗記であってはならず、暗記しても分からない、試行錯誤的な思索が必要である。（長岡 亮介：数学者）

（ii）数学を学ぶのは、数学がこの自然界（社会 も含めて）の現象に対して、揺るぎのない真理を伝えるほとんど唯一の方法である。（原田 耕一郎：オハイオ州立大学教授）

（iii）現代社会が求める人材とは、知識の有無ではなく、開発された新しい手法などを臆せず忍耐強く

勉強して、ニーズに合わせて何かを考案しようと努力する「数学的な態度でものを考えられる」人材である。論証によって得られた結論と事実を区別したり、論証可能なことなのか個人の価値観によることなのかを探究することは必要不可欠な「数学的人格」である。(根上 生也：横浜国立大学大学院教授)

(iv) 数学を学ぶためには緻密な論理をきちんと追っていく経験をしていくことがトレーニングとして必要不可欠である。こういった経験は実際の社会でも「役立つ」。(山崎 雅人：東京大学教授)

(v) 数学は多くの職業で必要となる基本的な知識・技術である。携帯電話・テレビ・自動車・などなど、裏にはたくさんの数学が使われている。産業の分野で数学が活躍できるのは、数学が「論理の展開を式変形という機械的操作に置き換える」という他にはない力を持っているからである。(杉原 厚吉：明治大学教授)

④ 文部科学省の見解

未来社会を切り拓くための、知識及び技能の習得と、思考力・判断力・表現力等の育成を重視し、学びに向かう力を育み、主体的・対話的で深い学びの質をさらに高め、生涯にわたって探求を深める未来の創り手として、問題を見いだして解決策を考え、思いや考えを基に創造することに向かう過程を重視した学習の充実が不可欠である。

数学を活用して事象を論理的に考察する力、事象の本質や他の事象との関係を認識し統合的・発展的に考察する力、数学的な表現を用いて事象を簡潔・明瞭・的確に表現する力を養う。粘り強く考え数学的論拠に基づいて判断しようとする態度、問題解決の過程や結果の妥当性について考察を深めたり、評価・改善したりしようとする態度や創造性の基礎を養う。

⑤ 「なぜ数学を学ぶのか」の生徒に授業展開する方法論の考察

中学や高校の数学について「日常生活の役に立つわけでもないし、専門家になるわけでもないのに全員に本当に必要？」という疑問が湧く生徒への「内発的動機づけ」として、文部科学省の見解を観点にしながら考察する。数学を学ぶ大きな理由は、数学を通して、論理的な思考力、人に分かりやすく結論とその根拠を説明する説得力、プレゼンテーション力を身に着けることが、未来社会に出てからも特に必要な能力になるからである。問題の本質を整理し、原理・原則を見極めていくことで方向性が見えるトレーニングには、数学が最適である。数学の学習を通して身に着けた能力は、確実に将来の夢に役立てられる。特に社会に出て仕事をするようになると、あらゆるデータの分析・処理を行うようになる。何かを達成する途中で上手くいかないことがあっても、何通りも方法を試し続けることで、理想を実現できる。試行錯誤的な思索は数学を学ぶことで身に付く。数学教育は、現代の人材育成のための深い教養の鍛錬の舞台として、困難な課題に挑戦するために不可欠である。

2.『生徒に授業展開する方法論』としての「数学とはどのような学問か」についての考察
内発的動機づけとして、「数学とはどのような学問か」の生徒に授業展開する方法論を一考察する。

① 「なぜか?」「なぜか?」「なぜか?」……を追求し続けていくと、それ以上説明できない事柄に行きつく。(例として、幾何学の「2点を通る直線は1本引ける」など)そこで、「理由を考えないで、成り立つとする」ものを〈公理〉と呼ぶ。そして、定義と公理とそれまでに証明された事柄を用いて、証明された命題を〈定理〉と呼び、次々と定理が証明されて数学の一つの体系が完成される。

すなわち、公理とは、数学の理論体系で、論証なしに正しいと認めて、推論の出発点とする、定理を証明する前提として仮定する基本命題である。また、定義とは、用語の意味を明確に限定することである。そして、定理とは、公理や定義を前提とし演繹によって導き出された命題で、それ以降の推論の前提となる特に重要なものである。

② 数学の一つの体系として、「ユークリッド幾何学」が最も生徒に理解されやすいと思われる。

「ユークリッド幾何学」は、紀元前3世紀に「原論」が完成し、その後2000年以上にわたって幾何学の在り方を決定づけたもので、5つの公理（「原論」では公準）からなる。（生徒に分かる表現に一部変更）

1) 2点を通る直線は、1本引ける。2) 線分は直線として延長できる。3) 任意の点を中心として、任意の半径の円がかけられる。4) 直角はすべて等しい。5) (平行線公理) 直線外の1点を通り、この直線と平行な直線は1つあって、ただ1つに限る。この5つの公理と定義から、中学・高校で学習する「図形」の定理が全て証明され、図形の体系が完成した。これを、「ユークリッド幾何学」という。

③ 18世紀に、平行線公理に疑問を抱く数学者が出現した。

これにより、「非ユークリッド幾何学」が誕生した。例えば、「リーマン幾何学」では、5) 平行線公理の平行線の本数は0本（球体）として、また、「ロバチェフスキー幾何学」では、5) 平行線公理の平行線の本数は2本以上（鞍型）として、それぞれ数学の一つの体系が完成された。

④ 現代数学へ

完成された数学の一つの体系では、その体系の中で相矛盾する定理が出ないという、定理の無矛盾性が問題となる。現代数学は、19世紀末カントルの集合論によって飛躍的な進歩をみたが、相矛盾する定理を導くことが明らかになり、数学は重大な危機に陥った。その結果、ラッセルの論理主義・ヒルベルトの形式主義・ブラウアーの直観主義の三つの立場が生じた。これらの三つの立場は、激しい論争を経ながら互いに影響しあい、今日の数学基礎論へと発展した。カントルの集合論はツエルメロ（1908）、フレンケル（1922）によって公理化され、ノイマン（1927）によって整備され、ゲーデル（1938）、コーエン（1963）ゲンツェン（1936）によりその無矛盾性が証明された。また、ヒルベルトは、「幾何学の基礎」（1899）において、ユークリッド「原論」の不備を補って「ユークリッド幾何学」の完全な公理系を提示した。その際、ヒルベルトは、点・直線・平面などの基本概念を「無定義概念」とし、それらの概念の間の相互関係を5つの公理群によって規定した。それによって、これらの公理の無矛盾性と独立性を証明したのである。

⑤ 高校までには学習しない数学の自由性

非ユークリッド幾何学の発見によって、幾何学は図形を扱う具象的な学問から、抽象的な分野へと大きく発展した。位相幾何学などの現代の幾何学へとつながっていく。例えば、位相幾何学では、同相写像によって変換できる図形どうしは同じとみなし、たとえば、コーヒーカップとドーナツは同じとなる。

3.『生徒に授業展開する方法論』としての「アクティブ・ラーニングの高校数学への授業展開」についての考察

(1) 「アクティブ・ラーニング」の経緯

1990年頃の米国で、学生に主体的な学びを展開するという教育改革の中で使われる。日本では、2012年8月の中央教育審議会答申「新たな未来を築くための大学教育の質的転換に向けて～生涯学び続け、主

体的に考える力を育成する大学へ」で、初めて「アクティブ・ラーニング」が登場する。「知識の伝達・注入を中心とした授業から、教員と学生が意思疎通を図りつつ、学生が主体的に問題を発見し解を見出していく能動的学修（アクティブ・ラーニング）への転換が必要である」と提示された。高大接続の観点から高等学校に、その後は義務教育段階にまで浸透することとなる。2014年12月に示された、中央教育審議会答申「新しい時代にふさわしい高大接続の実現に向けた高等学校教育、大学教育、大学入学者選抜の一体的改革について」では、「学習指導要領を抜本的に見直し、課題の発見と解決に向けた主体的・協働的な学習・指導方法であるアクティブ・ラーニングへの飛躍的充実を図る」とした。2014年11月に文部科学大臣から中央教育審議会へ諮問があり、『何を教えるか』という知識の質や量の改善はもちろんのこと、『どのように学ぶか』という、学びの質や深まりを重視することが必要であり、課題の発見と解決に向けて主体的・協働的に学ぶ学習（いわゆる『アクティブ・ラーニング』）や、そのための指導の方法等を充実させていく必要がある」と述べている。

ここで、能動的学習（アクティブ・ラーニング）とは異なり、他者と協働するという意味合いが強くなり、グループ学習やペア学習などの授業形態を問う表現になる。2016年12月の次期学習指導要領に向けた中央教育審議会の答申には、「アクティブ・ラーニング」の視点とは、「主体的・対話的で深い学び」の実現を目指す授業改善の視点であって、グループ活動などの授業形式や「アクティブ」だけが強調されているわけではない。具体的には、次の3点が示された。(i) 学ぶことに興味や関心を持ち、見通しを持って粘り強く取り組み、自己の学習活動を振り返って次につなげる「主体的な学び」(ii) 生徒同士の協働、対話等を通じ、自己の考えを広げ深める「対話的な学び」(iii) 習得・活用・探究という学びの過程の中で、知識を相互に関連付けてより深く理解したり、問題を発見して解決策を考える「深い学び」の3点を提示し、今後の授業の改善に当たって「アクティブ・ラーニング」をするのではなく、「アクティブ・ラーニング」の視点に立つことが重要であることを、答申は示している。(引用文献 2) 文部科学省は、2017年2月にアクティブ・ラーニングという表現を用いず、「主体的・対話的で深い学び」を求めるようになった。また、PBL型授業（Problem-based Learning）という「課題解決型学習」や「問題発見解決型学習」と訳される授業形態が、世界の大学で研究されている。

(2) 高等学校数学における「アクティブ・ラーニング」の位置づけ

①数学の指導において、学力差のある生徒に対する授業展開、習熟の程度が不十分な生徒への対応、数学嫌いの生徒に興味を持たせる工夫、大学入試対策、生徒の実態に応じた授業改善など、さまざまな課題を抱えている中で、生徒が主体的に学ぶ授業展開の方法としての「アクティブ・ラーニング」を高等学校の数学教育の中に取り入れることになった。②高校数学における「アクティブ・ラーニング」については、単にアクティブにすればよいというものではない。「アクティブ・ラーニングの視点に立った授業改善」という表現になっているのは、今の授業をすべて「アクティブ・ラーニング」にすることを期待していない。高校数学における「アクティブ・ラーニング」の視点とは、「数学的活動」を充実させることである。「数学的活動を充実させる」とは、適切な課題に対して、数学的な見方・考え方をいろいろな形で表出したり、得られた結果について振り返る活動を豊かにすること、と捉えることが出来る。さらに、どのような学びであったのかという、数学的活動を通して学び得た結果について評価することも大切なことになる。この評価の観点として「知識・技能」「思考力・判断力・表現力」「学びに向かう力」という学力の三要素にかかわる評価が必要である。(引用文献 2)

（３）高等学校数学における「アクティブ・ラーニング」の視点に立った授業改善

「数学的活動」の充実を念頭に置き、考察する。数学的活動は、基礎的・基本的な知識・技能を確実に身に付けるとともに、数学的な思考力・表現力を高めたり、数学を学ぶことの楽しさや意義を実感したりするために、重要な役割を果たすものである。

授業設計にあたっては、生徒が身に付けるべき資質・能力を明確にした授業目標を設定し、その実現に向けて数学的活動を充実させるような課題の準備が必要である。その課題の達成のために必要な知識・技能を具体的に検証し、生徒の学習活動と教師の指導・支援を位置付ける指導案を計画する必要がある。

具体的な授業展開としては、①準備した知識・技能（定理・公式など）を生徒に発表させる。②課題を提示する。③机間指導をしてヒントを与え、まず生徒個人で考えさせる。④グループをつくり、互いの考えを交流させる。⑤いろいろな方法を生徒に全体の前で発表させる。（思考力・判断力・表現力など）⑥次の課題として、どの方法がよいかグループで意見を出し合わせて検討させる。⑦いろいろな考え方を共有させ、比較・検討をさせ、よりよく課題解決する態度を全体で確認する。⑧授業後に各自レポートを提出させる。⑨提出されたレポートを評価し、生徒に全体の前で「振り返り発表」させる。（学びに向かう力の育成）

このような実践が、「アクティブ・ラーニングの高校数学への授業展開」の具体的な『生徒に授業展開する方法論』の一考察となる。

おわりに

文部科学省が発表した「２１世紀型教育」としての高等学校の学習指導要領の改定案によって、思考力・判断力・表現力の育成を重視し、「主体的・対話的で深い学び」による授業改善を進め、社会に開かれた教育課程となった。知識注入型授業からの発想の転換が求められ、知識偏重から主体的に課題を解決するための思考力が重視され、教員も課題発見・解決能力を磨くことが必要となる。

文部科学省は「新たな未来」を築くため、教育の質を向上しグローバル化する社会に即した人材を育成する教育を実践する方針を発表したのである。

今、中等教育の現場の教員に課せられた授業改善と、教育の質の向上が求められている。数学教育においても大きな転換期となり、国際的な観点からもさらなる改善が必要不可欠である。これらの課題を踏まえ、引き続き研究を進めていきたい。

引用文献

- 1) 数学セミナー（日本評論社）第57巻第4号、2018年、8頁～38頁
- 2) アクティブ・ラーニングを位置づけた高校数学の授業プラン 吉田明史 編著（明治図書）

Private School Promotion Project: [Mathematics] A Report and Consideration on “Voluntary Motivation” in Mathematics Education

Fumio HATOYAMA

In the 30th fiscal year of Heisei (2017-2018), as a cooperative project of Hyogo Prefectural Harima High School and Kyoto University, a project related to mathematics was carried out for the teachers of the Department of Mathematics of the high school. Centered on the teaching methods in mathematics, and with the aim of supporting leadership improvement, this project promoted concrete practice methods focusing on class development through lecture and research consultation.

In “voluntary motivation” brought about spontaneously and naturally through curiosity and interest in activities, we find value and meaning in learning and consider a methodology to autonomously and ambitiously tackle mathematics problems.

In this paper, which deals with “the methodology of classroom development for students” for the independent motivation of mathematics in secondary education, questions and topics such as “Why do you study mathematics?”, “What kind of study is mathematics?”, and “How active learning is developed in high school mathematics lessons” will be considered.

We feel it is necessary to improve lessons taught by teachers and the overall quality of education at secondary schools in Japan. Mathematics education is also at a major turning point, and further improvement is indispensable from an international perspective. Based on these issues, I would like to continue my research.