

Punctured Surface 上のホロサイクル間の距離について

静岡大学理学部 中西 敏浩 (Toshihiro Nakanishi)

1. 準備

1.1. ホロサイクル間の距離. $(\mathbf{H}, ds^2)$ を Poincaré 平面とする。

$$\mathbf{H} = \{x + iy : y > 0\}, \quad ds^2 = \frac{x^2 + y^2}{y^2}.$$

$\mathbf{H}$ の 2 点 p, q 間の距離を $d(p, q)$ で表わす。以下で扱う Fuchs 群はすべて torsion-free であると仮定する。Poincaré 平面に作用する Fuchs 群 Γ で parabolic 元を含むものを考える。ある parabolic 元の固定点 p で $\partial\mathbf{H}$ に接する $\overline{\mathbf{H}}$ 内のユークリッド円を p を基にもつホロサイクルと呼ぶ。 $\Gamma_p = \{\gamma \in \Gamma : \gamma(p) = p\}$ は一つの parabolic 元で生成される無限巡回群となる。 Γ_p は p を基にもつホロサイクルを不変にする。

1.2. Definition. C を p を基にもつホロサイクル、 γ を Γ_p の生成元とする。 C 上の任意の点 p に対して $d(p, \gamma(p))$ は p に依らない。 $\alpha = d(p, \gamma(p))$ のとき C を (Γ に関して) 長さ α をもつホロサイクルと呼ぶことにする。

次に p_1, p_2 ($p_1 \neq p_2$) を Γ の parabolic 元の固定点とし、 $l(p_1, p_2)$ を p_1 と p_2 を結ぶ双曲測地線とする。 p_1, p_2 それぞれに基を持つホロサイクル C_1, C_2 が与えられたとき $d(C_1, C_2)$ を $l(p_1, p_2)$ と C_1, C_2 との交点間の双曲距離とする。もし C_1 と C_2 が disjoint ならば $\delta(C_1, C_2) = d(C_1, C_2)$ 、そうでなければ $\delta(C_1, C_2) = -d(C_1, C_2)$ とおいて C_1, C_2 間の符号付き距離 $\delta(C_1, C_2)$ を定義する。さらに $L(C_1, C_2) = e^{\delta(C_1, C_2)/2}$ とおく。 $L(C_1, C_2) = 0$ は C_1 と C_2 とが接することを意味する。

1.3. Teichmüller 空間. $F_{g,s}$ を向き付けられた種数 g の閉曲面に s 点集合 $P = \{x_1, \dots, x_s\}$ を一つ指定したものとする。以下 $2g - 2 + s > 0$ を仮定する。 Γ を signature (g, s) の Fuchs 群、すなわち第 1 種 Fuchs 群で、 $R_\Gamma = \mathbf{H}/\Gamma$ が $F_{g,s} \setminus P$ と同相となるものとする。 $Par(\Gamma)$ を Γ の parabolic 固定点全体の集合とすると $\overline{R}_\Gamma = (\mathbf{H} \cup Par(\Gamma))/\Gamma$ は R_Γ のコンパクト化を与える。

向きを保つ同相写像 $f : F_{g,s} \rightarrow \overline{R}_\Gamma$ を Γ (または R_Γ) の marking といい、 (Γ, f) を marked Fuchs 群と呼ぶ。二つの marked Fuchs 群 $(\Gamma_1, f_1), (\Gamma_2, f_2)$ の間の同値関係を次のように定義する: 等角写像 $h : R_{\Gamma_1} \rightarrow R_{\Gamma_2}$ で f_2 と $h \circ f_1$ とが P 固定でホモトピックになるようなものが存在する。Marked Fuchs 群全体にこの同値関係を導入して得られる商空間 $\mathbf{T}_{g,s}$ を signature (g, s) の Teichmüller 空間と呼ぶ。

2. Teichmüller 空間の大域座標系

2.1. 理想三角形分割 $F_{g,s}$ 上 P に端点をもち、端点以外では互いに交わらない単純閉曲線の族 $\Delta = (c_1, \dots, c_d)$ がそれらの補集合の各成分が単連結かつその普遍被覆面への持ち上げが三角形となるように与えられているとき、 Δ を $F_{g,s}$ の三角形分割という。このとき Euler 標数を用いて $d = 6g - 6 + 3s$ であることがわかる。仮定より補集合の成分には図 1 のようなものが存在することがある。

以下 $[c_j]$ を c_j の端点を固定したホモトピー類を表わすことにする。Teichmüller 空間 $\mathbf{T}_{g,s}$ の点 $R_* = [\Gamma, f]$ が与えられたとき、 $\{f(c) : c \in [c_j]\}$ の中にただ一つ双曲測地線 $c_j(R_*)$ が含まれる。 $\Delta(R_*) = (c_1(R_*), \dots, c_d(R_*))$ は自然に $\bar{R}_\Gamma$ の三角形分割に拡張される。 $\Delta(R_*)$ を R_Γ の理想三角形分割 (ideal triangulation) という。

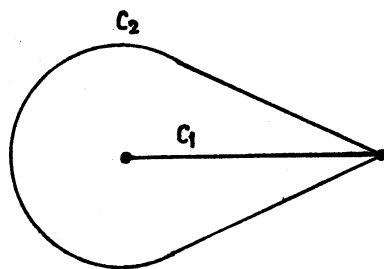


Figure 1

正数 α を一つ固定する。 $R_* = [\Gamma, f]$ を $\mathbf{T}_{g,s}$ の点とする。 $\text{Par}(\Gamma)$ の各点にそれを基にもつ長さ α のホロサイクルを与える。以下この節でホロサイクルというときは、この中の一つであるとする。各 $c_j(R_*)$ の $\mathbf{H}$ 上への一つの持ち上げの端点を基とするホロサイクル C_1, C_2 に対して量 $L(C_1, C_2)$ が定まるが、これは $c_j(R_*)$ の持ち上げの取り方に依らない。 $L_j(\alpha, R_*) = L(C_1, C_2)$ とおく。これは厳密な言い回しではないが、 R_* 上 c_j に沿うホロサイクル間の距離から定まる量である。

2.2. Proposition. ([1]) 写像

$$\varphi_{\alpha, \Delta} : \mathbf{T}_{g,s} \rightarrow \mathbf{R}_+^d, \quad \varphi_{\alpha, \Delta}(R_*) = (L_1(\alpha, R_*), \dots, L_d(\alpha, R_*))$$

は単射であり、したがって $\varphi_{\alpha, \Delta}(\mathbf{T}_{g,s})$ は $\mathbf{T}_{g,s}$ の大域座標系を与える。

像 $\varphi_{\alpha, \Delta}(\mathbf{T}_{g,s})$ を具体的に表示することができる。 $F_{g,s}$ 上の点 $x_i \in P$ を頂点に持つ三角形 (Δ の補集合の成分) を $T_{i1}, \dots, T_{iq(i)}$ とする。ただし図 1 の三角形で右側の頂点が x_i となるものあれば 2 回書くことにする。 T_{ik} の x_i に端点をもつ 2 辺を $c_{1(ik)}, c_{2(ik)}$ 、残りの辺を $c_{3(ik)}$ とする。(図 1 の三角形については $c_{1(ik)} = c_1, c_{2(ik)} = c_2, c_{3(ik)} = c_1$ となる。) このとき $\varphi_{\alpha, \Delta}(\mathbf{T}_{g,s})$

は $(L_1, \dots, L_d)$ -空間内で次の s 個の方程式系の軌跡によって表わされる。

$$(2.3) \quad \sum_{k=1}^{q(i)} \frac{L_{3(ik)}}{L_{1(ik)} L_{2(ik)}} = \alpha \quad i = 1, \dots, s.$$

$d - s = 6g - 6 + 2s = \dim_{\mathbf{R}} \mathbf{T}_{g,s}$ であることに注意する。 $\varphi_{\alpha, \Delta}(\mathbf{T}_{g,s})$ 上にある点 $(L_1, \dots, L_d)$ に対して次に示すの補題から、もし c_i が同一の puncture を結ぶ場合は $\alpha L_i > 4$ 、 c_i が異なる punctures を結ぶ場合は $\alpha L_i > 2$ であることがわかる。Fuchs 群 Γ が signature (g, s, t) をもつとは、 Γ の極限集合の最小凸包 (Nielsen Kernel) $K(\Gamma)$ に対して、 $K(\Gamma)/\Gamma$ が s 個の punctures と t 個の totally geodesic boundary curve をもつ種数 g の曲面になるときにいう。

2.5. Lemma. $\alpha > 0$ を固定し、以下ホロサイクルはすべて各主張で述べられる Fuchs 群に関して長さ α をもつものとする。(1) Γ を signature $(0, 1, 2)$ をもつ Fuchs 群とし、 c を R_Γ 上 puncture からそれ自身を結ぶ単純閉測地線とする。 c の $\mathbf{H}$ への持ち上げの端点を基とするホロサイクル C_1, C_2 を取り $L_\alpha = L(C_1, C_2)$ 、2つの境界曲線に対応する原始的 hyperbolic 元の trace を $t_1, t_2 > 0$ とおくと $\alpha L_\alpha = t_1 + t_2$ 。

(2) Γ を signature $(0, 2, 1)$ をもつ Fuchs 群とし、 c を R_Γ 上 2つの puncture を結ぶ単純閉測地線とする。 c の $\mathbf{H}$ への持ち上げの端点を基とするホロサイクル C_1, C_2 を取り $L_\alpha = L(C_1, C_2)$ 、境界曲線に対応する原始的 hyperbolic 元の trace を $t > 0$ とおくと $\alpha L_\alpha = \sqrt{t+2}$ 。

Proof. (1) については [2, Lemma 4.4] を見よ。(2) $K(\Gamma)/\Gamma$ を各 puncture から境界曲線へおろした測地的垂線で切ることにより、2つの合同な hyperbolic quadrilateral に分解する。適当な元で Γ の共役をとることにより、hyperbolic quadrilateral は $\infty, 0, u+iv, \alpha/2+iv$ に頂点をもつとしてよい。ただし $0 < u < \alpha/2$, $v, w > 0$ はこれから定める数である。 $u+iv$ と $\alpha/2+iv$ とを通る測地線は ∞ と $\alpha/2$ を結ぶ測地線に直交するから、それを表わす円 K_1 の方程式は $(x - \alpha/2)^2 + y^2 = w^2$ と書ける。他方 0 と $u+iv$ を通る測地線を表わす円 K_2 の方程式を $(x - b)^2 + y^2 = b^2$ ($0 < 2b < \alpha/2$) とおく。 0 を基にもつホロサイクルが ic ($c > 0$) を通るならば、このホロサイクルの ∞ と 0 を結ぶ測地線と K_2 の間にある部分の長さが $\alpha/2$ となることより、 $b = c/\alpha$ を得る。さらにこのとき $L_\alpha^2 = 1/c$ 。

$a = \alpha/2$ とおく。 K_1 と K_2 が直交することより、 $w^2 = (a - 2b)^2 - b^2 = a^2 - 2ab$ 。 $u+iv$ は K_1, K_2 上にあるから

$$(u - b)^2 + v^2 = b^2, \quad (u - a)^2 + v^2 = a^2 - 2ab.$$

これから

$$u = \frac{ab}{a-b}, \quad v = \frac{b\sqrt{a(a-2b)}}{a-b}.$$

$P = u + iv$ と $Q = a + iw$ 間の距離は $K(\Gamma)/\Gamma$ の境界曲線の長さの半分だから

$$t = 2 \cosh d(P, Q) = \frac{|P - Q|^2}{\operatorname{Im}(P)\operatorname{Im}(Q)} + 2 = \frac{2a}{b} - 2.$$

すなわち $t + 2 = \alpha^2/c = \alpha^2 L_\alpha^2$.

3. ホロサイクル間の距離

3.1. $F_{g,s}$ の三角形分割 $\Delta = (c_1, \dots, c_d)$ が与えられたとして、Teichmüller 空間 $\mathbf{T}_{g,s}$ を $\varphi_{\alpha,\Delta}(\mathbf{T}_{g,s})$ と同一視して考える。 $S_{\alpha,\Delta}(R_*) = L_1(\alpha, R_*) + \dots + L_d(\alpha, R_*)$ を $\mathbf{T}_{g,s}$ 上の関数と見たときの最小値および最小値を与える点を求める問題を考える。 $\mathbf{T}_{g,s}$ の具体的表示 (2.3) があるのでこの問題は条件付き極値問題 (Lagrange の未定乗数法) に帰着できる。以下計算の具体例をみていこう。

3.2. Once punctured torus Once punctured tori の Teichmüller 空間 $\mathbf{T}_{1,1}$ の三角形分割は、その同相写像による像を区別しない場合、一通りしかないのである。 $F_{1,1}$ に指定された点 $x_1 \in P$ を基点とする基本群を $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ と同一視すると、 $(1, 0), (0, 1), (1, 1)$ を代表する単純閉曲線 $\Delta = (c_1, c_2, c_3)$ が三角形分割を与える。簡単のため $x = L_1, y = L_2, z = L_3$ とおくと、Teichmüller 空間 $\mathbf{T}_{1,1}$ は $x^2 + y^2 + z^2 = (\alpha/2)xyz$ で表現される。 $S_{\alpha,\Delta}$ は点 $(6/\alpha, 6/\alpha, 6/\alpha)$ で最小値をもつ。この点は位数 3 の自己等角写像をもつ面である。

3.2. Sphere with four punctures Teichmüller 空間 $\mathbf{T}_{0,4}$ の三角形分割は、その同相写像による像を区別しない場合、以下の図で示す 6 通りがあることがわかる。(球面から三角形分割に関係ない一点を除いたものを平面と同一視してある。) 曲線に付した alphabet 文字が対応する座標も表わすことにする。したがって面上の自己等角写像 (この場合、位数 2 の involution) で互いに移りあうことによって同じ座標値を与えることがわかるものに対しては異なる曲線でも同じ文字が付されている。

1.

$$\mathbf{T}_{0,4} = \left\{ \frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab} = \alpha \right\}.$$

最小値を与える点 $(a, b, c) = (\frac{3}{\alpha}, \frac{3}{\alpha}, \frac{3}{\alpha})$.

2.

$$\mathbf{T}_{0,4} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{c}{ab} + \frac{d}{ab} = \alpha, \\ \frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{a}{bd} + \frac{b}{ad} = \alpha. \end{array} \right\}$$

最小値を与える点 $(a, b, c, d) = (\frac{2\sqrt{2}}{\alpha}, \frac{2\sqrt{2}}{\alpha}, \frac{4}{\alpha}, \frac{4}{\alpha})$.

3.

$$T_{0,4} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{b}{ac} + \frac{b}{ad} + \frac{e}{cd} = \alpha, \\ \frac{c}{ab} + \frac{d}{ab} = \alpha, \\ \frac{d}{ce} + \frac{a}{bc} + \frac{a}{bd} + \frac{c}{de} + \frac{2}{e} = \alpha, \\ e = \alpha a^2. \end{array} \right\}$$

最小値を与える点 $(a, b, c, d, e) = (\frac{2\sqrt{2}}{\alpha}, \frac{2\sqrt{2}}{\alpha}, \frac{4}{\alpha}, \frac{4}{\alpha}, \frac{8}{\alpha})$.

4.

$$T_{0,4} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{f}{de} + \frac{f}{ce} + \frac{2}{c} + \frac{e}{cf} + \frac{e}{df} + \frac{2}{d} = \alpha, \\ \frac{c}{ef} + \frac{d}{ef} = \alpha, \\ c = \alpha a^2, d = \alpha b^2. \end{array} \right\}$$

最小値を与える点 $(a, b, c, d, e, f) = (\frac{2\sqrt{2}}{\alpha}, \frac{2\sqrt{2}}{\alpha}, \frac{8}{\alpha}, \frac{8}{\alpha}, \frac{4}{\alpha}, \frac{4}{\alpha})$.

5.

$$T_{0,4} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{f}{de} + \frac{e}{df} + \frac{d}{ef} + \frac{2}{d} + \frac{2}{e} + \frac{2}{f} = \alpha, \\ d = \alpha a^2, e = \alpha b^2, f = \alpha c^2. \end{array} \right\}$$

最小値を与える点 $(a, b, c, d, e, f) = (\frac{3}{\alpha}, \frac{3}{\alpha}, \frac{3}{\alpha}, \frac{9}{\alpha}, \frac{9}{\alpha}, \frac{9}{\alpha})$

6.

$$T_{0,4} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{e}{cf} + \frac{f}{ce} + \frac{d}{ef} + \frac{2}{c} = \alpha, \\ \frac{c}{ef} + \frac{e}{fd} + \frac{f}{ed} + \frac{2}{d} = \alpha, \\ c = \alpha a^2, d = \alpha b^2. \end{array} \right\}$$

最小値を与える点 $(a, b, c, d, e, f) = (\frac{2\sqrt{2}}{\alpha}, \frac{2\sqrt{2}}{\alpha}, \frac{8}{\alpha}, \frac{8}{\alpha}, \frac{4}{\alpha}, \frac{4}{\alpha})$.

1 と 5 において $S_{\alpha, \Delta}$ が最小値をとる Riemann 面は同一であり、2, 3, 4, 6 において $S_{\alpha, \Delta}$ が最小値をとる Riemann 面は同一である。

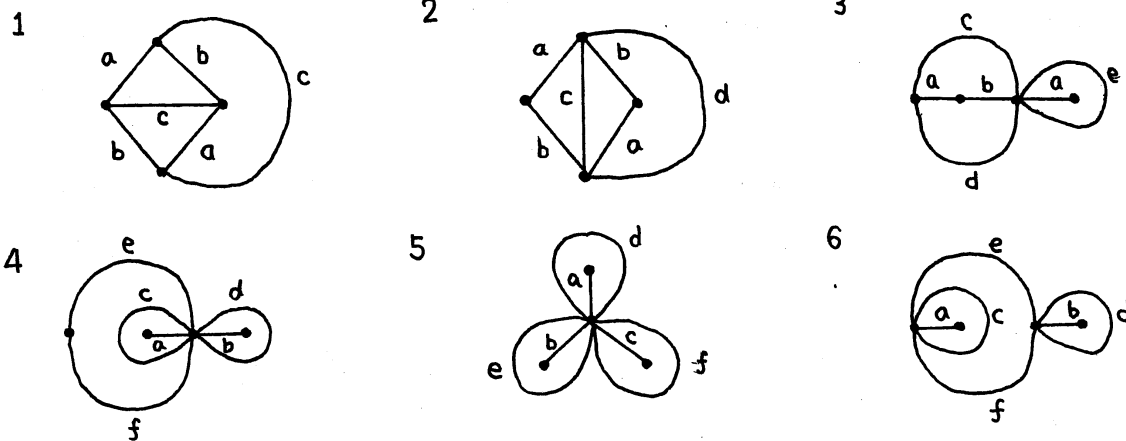


Figure 2

3.4. Teichmüller 空間の点 $R_* = (L_1, \dots, L_d)$ でもし $L_i = 1$ ならば、 c_i の端点に付随するホロサイクルは $c_i(R_*)$ 上で接していることを意味する。いま signature (g, s) の Fuchs 群 Γ に対し、 $Par(\Gamma)$ の各点に長さ α のホロサイクルを与える。ここで α はホロサイクルの内部の円板が互いに disjoint になるように選ぶがホロサイクルそれ自身は他のホロサイクルと接していてもよい。もし二つのホロサイクル C_1 と C_2 とが接するならば、それぞれの基点を結ぶ双曲測地直線は接点を通る。このように互いに接するすべてのホロサイクルの組にそれらの基点を結ぶ双曲測地線を描くと Γ の作用で不変な H の分割ができる。それを商空間 R_Γ に射影させると R_Γ 上に一つの理想胞体分割 (ideal cell decomposition) が定義される。 $F_{g,s}$ の三角形分割 (より一般に胞体分割) Δ が与えられたとき、もし適当な Fuchs 群と $\alpha > 0$ に対して上のように作られた理想胞体分割で Δ と同相なものが存在するとき Δ は (双曲幾何的に) 実現化可能であるということにしよう。いったい、どのような三角形分割が実現化可能だろうか。(2.3) はそのため必要条件を与えており、すなわちそれは (2.3) のすべての式の左辺が同一数の項をもつことである。したがって once punctured surface の場合は $L_1 = L_2 = \dots = L_d = 1$ とおいて α (すなわち項の個数) を定めれば問題はなさそうである。puncture が複数個ある場合は、どのような三角形分割が実現化可能だろうか? また実現化可能な三角形分割はどれだけの個数あるかということを問題として残しておく。Euler 標数を用いて実現化可能な三角形分割の各頂点に対し、それを端点に持つ辺がちょうど $12s^{-1}(g-1)+6$ 個あることがわかるので、 s は $12(g-1)$ の約数でなければならない。したがって与えられた g に対しては s を不定にしても実現化可能な三角形分割の可能性は有限個しかない。

参考文献

- [1] T. Nakanishi and M. Näättänen, The Teichmüller space of a punctured surface represented as a real algebraic space, *Michigan Math. J.* **42** (1995), 235–258.
- [2] T. Nakanishi and M. Näättänen, Parametrization of Teichmüller space by length parameters, to appear in *Analysis and Topology* (C. Andreian-Cazacu, O. Lehto and Th. M. Rassias, eds.) World Scientific, Singapore.