

Free group factor 上の $*$ -derivation(pre-generator) の構成について

水尾 勝 (Masaru Mizuo)

東北大・情報科学

(Graduate School of Information Sciences, Tohoku University)

概要

Quantum lattice system あるいは一般の UHF 環上では相互作用する Hamiltonian から 1 パラメータ自己同型群の pre-generator を構成することができる. ここでは, 環を free group factor およびその dense C^* -subalgebra にした場合に non-trivial な pre-generator をどの様に構成するのかを議論する.

1 Introduction

$\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ を separable real Hilbert space, $N \equiv \dim \mathcal{H}_{\mathbb{R}}$, $[N] \equiv \{1, 2, \dots, N\}$ または $\{1, 2, \dots\}$ とし $\mathcal{H}$ をその複素化とする. $\mathcal{F}(\mathcal{H}) \equiv \mathbb{C}\Phi \oplus \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}^{\otimes n}$ は full Fock space とし $\{e_i : i \in [N]\}$ を $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ の CONS とする. $f \in \mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ に対して $a^*(f) \in B(\mathcal{F}(\mathcal{H}))$ を creation operator,

$$a^*(f)e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \cdots \otimes e_{i_n} \equiv f \otimes e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \cdots \otimes e_{i_n} \quad (n \geq 0, i_j \in [N] (1 \leq j \leq n))$$

$a(f) \equiv a^*(f)^*$ は annihilation operator とするとき,

$$\begin{aligned} a(f)e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \cdots \otimes e_{i_n} &= \langle f, e_{i_1} \rangle e_{i_2} \otimes \cdots \otimes e_{i_n} \quad (n \geq 1, i_j \in [N] (1 \leq j \leq n)) \\ a(f)\Phi &= 0 \end{aligned}$$

ただし $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ の内積. $s(f) \equiv a^*(f) + a(f)$ としたとき, ここで扱う作用素環は $\mathcal{M} \equiv \mathcal{M}(\mathcal{H}_{\mathbb{R}}) \equiv \{s(f) : f \in \mathcal{H}_{\mathbb{R}}\}''$ および $\mathcal{A} \equiv C^*(\{1\} \cup \{s(f) : f \in \mathcal{H}_{\mathbb{R}}\})$ である. このとき真空 Φ は $\mathcal{M}$ 上 cyclic かつ separating vector になり, さらに $\tau(\cdot) \equiv \langle \cdot, \Phi \rangle$ とするとき τ は $\mathcal{M}$ 上 tracial にもなる. したがって $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ への $\mathcal{M}$ の恒等表現は standard representation になり, $\eta : \mathcal{M} \ni x \mapsto x\Phi \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$ としたとき, $L_2(\mathcal{M}, \tau)$ と $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ は η の閉包で同型になる.

$s(f)(\forall f \in \mathcal{H}_{\mathbb{R}})$ は τ に対して semicircular element で $\eta(s(f)) = f (f \in \mathcal{H}_{\mathbb{R}})$ となるので, $s(f) (f \in \mathcal{H}_{\mathbb{R}})$ の全体は $L_2(\mathcal{M}, \tau)$ で閉部分空間となりそこでは L_2 ノルムと C^* ノルムは同値になる. したがって $\mathcal{M} = \{s(e_i) : i \in [N]\}''$, $\mathcal{A} = C^*(\{1\} \cup \{s(e_i) : i \in [N]\})$ が分かる. ところが $\{s(e_i) : i \in [N]\}$ は τ に対して semicircular system すなわち互いに free relation (in the sense of free probability) にある standard semicircular element の族

になる. したがって $(\mathcal{M}, \tau) \cong \star_N(L^\infty([-2, 2], \mu_s), \int \cdot d\mu_s) \cong (\mathcal{L}(\mathbb{F}_N), \langle \cdot \delta_e, \delta_e \rangle)$ および $(\mathcal{A}, \tau) \cong \star_N(C^*([-2, 2]), \int \cdot d\mu_s)$ となる. ただし μ_s は standard semicircular distribution で $\mathcal{L}(\mathbb{F}_N)$ は generator が N 個の free group factor である. また $\mathcal{A}$ は [3] の free product C^* -algebra の simplicity の判定条件を用いると simple になることが分かる. また $\mathcal{P} \equiv \text{Alg}(\{1\} \cup \{s(e_i) : i \in [N]\})$ とするとき, faithful state による free product は代数的 free product の閉包になるので, $\mathcal{P} \cong \mathbb{C}\langle X_i : i \in [N] \rangle$ である. ただし $\mathbb{C}\langle X_i : i \in [N] \rangle$ は N 個の不定元の非可換多項式環.

2 $L_2(\mathcal{M}, \tau)$ の調和解析

ここでまず $L_2(\mathcal{M}, \tau)$ に Fourier 展開を導入する. 以下 $s_i \equiv s(e_i) (i \in [N])$ とする.

Definition 2.1 $T_n(X)$ を n 次 ($n \geq 0$) の第 2 種 Chebyshev 多項式 ($T_0(X) = 1, T_1(X) = X$ および $T_{n+1}(X) \equiv XT_n(X) - T_{n-1}(X)$ で定まる) とするとき,

$$\underbrace{T_{i_1 i_1 \cdots i_1}}_{m_1} \underbrace{T_{i_2 i_2 \cdots i_2}}_{m_2} \cdots \underbrace{T_{i_n i_n \cdots i_n}}_{m_n} \equiv T_{m_1}(s_{i_1}) T_{m_2}(s_{i_2}) \cdots T_{m_n}(s_{i_n})$$

$$(n \geq 0, i_j \in [N] (1 \leq j \leq n), m_j \geq 0 (1 \leq j \leq n))$$

このとき $\{T_{i_1 i_2 \cdots i_n} : n \geq 0, i_j \in [N] (1 \leq j \leq n)\}$ および $\{s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_n} : n \geq 0, i_j \in [N] (1 \leq j \leq n)\}$ は明らかに $\mathcal{P}$ の linear basis となるが, $\eta(T_{i_1 i_2 \cdots i_n}) = e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \cdots \otimes e_{i_n} (n \geq 1, i_j \in [N] (1 \leq j \leq n))$ および $\eta(T_0) = \Phi$ となることが確認できるので $\{T_{i_1 i_2 \cdots i_n} : n \geq 0, i_j \in [N] (1 \leq j \leq n)\}$ は $L_2(\mathcal{M}, \tau)$ の CONS となる. $L_2(\mathcal{M}, \tau) \ni f$ に対して $f = \sum_{n \geq 0, i_j \in [N] (1 \leq j \leq n)} f_{i_1 i_2 \cdots i_n} T_{i_1 i_2 \cdots i_n}$ あるいは $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n (f_n \in P_n)$ を f の Fourier 展開と呼ぶ (実際これは Wiener-Ito 展開の free probability analog になっている). ただし P_n は $\{T_{i_1 i_2 \cdots i_n} : i_j \in [N] (1 \leq j \leq n)\}$ の生成する閉部分空間への projection である.

$T_{\mathbb{R}} : \mathcal{H}_{\mathbb{R},1} \rightarrow \mathcal{H}_{\mathbb{R},2}$ を contraction とし, $T : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ はその複素化, さらに $\mathcal{F}(T_{\mathbb{R}}) : \mathcal{F}(\mathcal{H}_1) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{H}_2)$ を,

$$\mathcal{F}(T_{\mathbb{R}})e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \cdots \otimes e_{i_n} \equiv Te_{i_1} \otimes Te_{i_2} \otimes \cdots \otimes Te_{i_n} \quad (n \geq 1, i_j \in [N] (1 \leq j \leq n))$$

$$\mathcal{F}(T_{\mathbb{R}})\Phi \equiv \Phi$$

で定義するとき $\mathcal{F}(T_{\mathbb{R}})$ も contraction である. さらに $\Gamma(T_{\mathbb{R}}) : \Gamma(\mathcal{H}_{\mathbb{R},1}) \equiv \mathcal{M}(\mathcal{H}_{\mathbb{R},1}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{H}_{\mathbb{R},2}) \equiv \mathcal{M}(\mathcal{H}_{\mathbb{R},2})$,

$$\Gamma(T_{\mathbb{R}})x \equiv \mathcal{F}(T_{\mathbb{R}})x\mathcal{F}(T_{\mathbb{R}})^*(x \in \Gamma(\mathcal{H}_{\mathbb{R},1}))$$

は τ preserving normal complete positive map になることが知られている ([6]). このとき Γ は (real Hilbert space, contraction) のカテゴリから (free group factor, τ preserving normal complete positive map) のカテゴリへの functor になる. これは Voiculescu の free Γ functor と呼ばれる. このときさらに $T_{\mathbb{R},i}$ が $T_{\mathbb{R}}$ にノルム収束するとき $\Gamma(T_{\mathbb{R},i})$ は $\Gamma(T_{\mathbb{R}})$ に point- σ weak 収束する. したがって $\Gamma(\exp^{-t} 1) (t \geq 0)$ は $\mathcal{M}$ 上の τ preserving normal complete positive semigroup を与える (実際これは Ornstein-Uhlenbeck semigroup の free

probability analog になっている). さらに $\Gamma(\exp^{-t} 1)(t \geq 0)$ を $L_2(\mathcal{M}, \tau)$ 上に拡張した場合を $\overline{\Gamma(\exp^{-t} 1)}$ と記すと ($L_2(\mathcal{M}, \tau)$ と $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ を η で同一視すれば $\overline{\Gamma(\exp^{-t} 1)} = \mathcal{F}(\exp^{-t} 1)$ となるので) 先の Fourier 展開を使って spectral 表示すると,

$$\overline{\Gamma(\exp^{-t} 1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \exp^{-nt} P_n$$

したがってその generator L は,

$$L = \frac{d\overline{\Gamma(\exp^{-t} 1)}}{dt} \Big|_{t=0} = \sum_{n=0}^{\infty} -nP_n$$

で Laplacian の機能をする. ここで次の Sobolev 不等式型の定理 ([1]) が証明されている.

Fact 2.2 $f \in L_2(\mathcal{M}, \tau)$ のとき,

$$\|\Gamma(\exp^{-t} 1)f\|_2 \leq \|\Gamma(\exp^{-t} 1)f\|_{\infty} \leq t^{-\frac{3}{2}} \|f\|_2$$

3 Generator の構成

ここでは $\mathcal{M}$ 上の $*$ -derivation δ で $\text{dom } \delta = \mathcal{P}$ となるものを考察する. UHF 環では dense な行列環の代数的 inductive limit に定義域を持つ derivation を normal derivation と呼ぶ. 上述した full Fock space による構成を antisymmetric Fock space に変えた場合に対応する C^* 環は 2^∞ の UHF 環となるが両者の構成の対応を見ることでここで考察する型の derivation が normal derivation の free analog になっていることが分かる. ただし AF 環の normal $*$ -derivation は approximate inner $*$ -derivation になることがすぐ分かり ([5]), approximate inner $*$ -derivation は closable でその closure が generator になり, さらに生成される one-parameter action は approximate inner automorphism であることも知られている ([5]). 我々の場合 $\mathcal{P}$ を定義域とする $*$ -derivation の approximate innerness が不明なので, ここで議論するのはこの型の $*$ -derivation が pre-generator となるための十分条件ということになる.

このとき $\mathcal{P}$ は非可換多項式環と同型なので写像 $A : \{s_i : i \in [N]\} \rightarrow \mathcal{M}$ あるいは A が指定されたときに derivation δ_A s.t. $\delta_A(s_i) = A(s_i)(i \in [N])$ は一意的に確定する. さらに δ_A が $*$ -derivation となるための必要十分条件は明らかに $A : \{s_i : i \in [N]\} \rightarrow \mathcal{M}^{sa}$ である. ただし $\mathcal{M}^{sa}$ は selfadjoint 元の全体. ここで A の定める写像を Fourier 展開で記述して $A(e_i) = \sum_{n \geq 0, j_k \in [N](1 \leq k \leq n)} a_{ij_1 j_2 \dots j_n} T_{j_1 j_2 \dots j_n}(i \in [N])$ とする. したがって問題は $\{a_{ij_1 j_2 \dots j_n} : i \in [N], n \geq 0, j_k \in [N](1 \leq k \leq n)\}$ に如何なる条件を与えたときに δ_A が pre-generator となるかを議論することになる.

Remark 3.1 Fact 2.2 を使うと, $L_2(\mathcal{M}, \tau) \ni f = \sum_{n \geq 0, i_j \in [N](1 \leq j \leq n)} f_{i_1 i_2 \dots i_n} T_{i_1 i_2 \dots i_n}$ に対して $\exists t \sum_{n \geq 0, i_j \in [N](1 \leq j \leq n)} e^{nt} |f_{i_1 i_2 \dots i_n}|^2 < \infty$ のとき $f \in \mathcal{A}$ がいえる. すなわち Fourier 展開係数が急激に小さくなる元は連続関数であることが言える. したがって (条件 I)

$$1. \forall i \exists t_i \sum_{n \geq 0, j_k \in [N](1 \leq k \leq n)} e^{nt_i} |a_{ij_1 j_2 \dots j_n}|^2 < \infty$$

$$2. \underline{a_{ij_1j_2\cdots j_n} = a_{ij_nj_{n-1}\cdots j_1} \quad (i \in [N], n \geq 0, j_k \in [N](1 \leq k \leq n))}$$

のとき δ_A は $\mathcal{M}$ 上あるいは $\mathcal{A}$ 上の $*$ -derivation として定義できる。

Proposition 3.2 δ_A が条件 I を満たす $*$ -derivation とする。さらに (条件 II)

$$\underline{a_{i_1i_2\cdots i_n} + a_{i_2i_3\cdots i_ni_1} + a_{i_3i_4\cdots i_ni_2} + \cdots + a_{i_ni_1\cdots i_{n-1}} = 0 \quad (n \geq 0, i_j \in [N](1 \leq j \leq n))}$$

のとき $\tau(\delta_A(x)) = 0 (\forall x \in \text{dom } \delta_A)$ 。

C^* 環あるいは W^* 環上の $*$ -derivation が faithful state を preserve するとそれぞれ closable あるいは σ -weak closable となることが知られている ([5]) のでこの Proposition の条件下で δ_A は closable になる。この Proposition の証明のために Lemma を準備する。 $T_{i_1i_2\cdots i_l}, T_{j_1j_2\cdots j_m}, \cdots, T_{k_1k_2\cdots k_n}$ が与えられたとき次のようなラベル $i_1, i_2, \dots, k_n$ とブロック | のついた集合を準備する。

$$\left\{ \begin{array}{cccc|cccc|cccc} \blacksquare & \blacksquare & \cdots & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \cdots & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \cdots & \blacksquare \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_l & j_1 & j_2 & \cdots & j_m & k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{array} \right\}$$

このときこの集合の pair partition (2 個ずつの分割) が異なるブロックの元を pair にして いてかつ同じラベルの元を pair にしている場合に適合しているとよぶことにする。

Lemma 3.3 $\tau(T_{i_1i_2\cdots i_l} \cdot T_{j_1j_2\cdots j_m} \cdots T_{k_1k_2\cdots k_n})$ は上記の集合上の適合した pair partition の総数に等しい。

proof of Proposition 3.2 アルファベット $[N]$ の生成する free monoid を $[N]^*$ としたとき, $[N]^*$ に次の同値関係をいれる。単語 $i_1i_2\cdots i_l, j_1j_2\cdots j_m \in [N]^*$ はある $n \leq l$ が存在して, $i_ni_{n+1}\cdots i_li_1\cdots i_{n-1} = j_1j_2\cdots j_m$ となるととき同値であるとする。この同値による同値類集合を $\text{cong}([N]^*)$ と書くことにする。このとき $[i_1i_2\cdots i_n] \in \text{cong}([N]^*)$ に対して $a_{[i_1i_2\cdots i_n]} = a_{i_1i_2\cdots i_n} + a_{i_2i_3\cdots i_ni_1} + a_{i_3i_4\cdots i_ni_2} + \cdots + a_{i_ni_1\cdots i_{n-1}}$ と記す。このとき Lemma 3.3 を用いると, 条件 I のもとでは任意の $f \in \mathcal{P}$ に対して,

$$\tau(\delta_A(f)) = \sum_{w \in \text{cong}([N]^*)} a_w c_{w,f}$$

となることがいえる。ただし $\sum_{w \in \text{cong}([N]^*)}$ は絶対収束する和で $c_{w,f} \in \mathbb{C}$ は w, f によって定まる定数。したがって条件 II が Proposition の十分条件であることは明らか。□

Proposition 3.4 δ_A を条件 I, II を満たすとする。さらに

1. $a_{ij_1j_2\cdots j_n} = 0 \quad (n \geq 3, i \in [N], j_k \in [N](1 \leq k \leq n))$
2. $\sup_{n \geq 0, i \in [N], j_k \in [N](1 \leq k \leq n)} |a_{ij_1j_2\cdots j_n}| < \infty$
3. $\sum_{n \geq 0, j_k \in [N](1 \leq k \leq n)} \text{sign}(|a_{ij_1j_2\cdots j_n}|)$ が i に対して一様有界。

を満たすとき δ_A は pre-generator である。特に $N < \infty$ のときは 1. を仮定するだけで

証明は定義域 $\mathcal{P}$ の全ての元が analytic element (in the sense of Yoshida-Hill semigroup) であることを直接確認する.

Example 3.5 $\dim \mathcal{H}_{\mathbb{R}} = 3$ とし $A(e_1) = -2e_2 \otimes e_3 - 2e_3 \otimes e_2$, $A(e_2) = e_3 \otimes e_1 + e_1 \otimes e_3$, $A(e_3) = e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1$ のとき δ_A は closable $*$ -derivation で pre-generator. Faithful state τ を preserve する $*$ -derivation が有界であるとき $L_2(\mathcal{M}, \tau)$ 有界にもなることが知られている ([5]). 上記の例は $L_2(\mathcal{M}, \tau)$ 有界でないことが確認できるので non-inner であることが分かる.

参考文献

- [1] M. Bożejko, *Ultracontractivity and Strong Sobolev Inequality for q -Ornstein-Uhlenbeck Semigroup* ($-1 < q < 1$), preprint.
- [2] O. Bratteli and D.W. Robinson, *Operator Algebras and Statistical Mechanics*, Vol.I(1979), Vol.II(1981), Springer, Berlin, Heidelberg, New York.
- [3] K.J. Dykema, *Simplicity and the stable rank of some free product C^* -algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. 351(1999), 1-40.
- [4] F. Hiai and D. Petz, *The Semicircle Law, Free Random Variables and Entropy*, Mathematical Surveys and Monographs, Vol.77, Amer. Math. Soc., 2000.
- [5] S. Sakai, *Operator Algebras in Dynamical Systems*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol.41, Cambridge University Press, 1991.
- [6] D.V. Voiculescu, K.J. Dykema and A. Nica, *Free Random Variables*, CRM Monograph Ser., Vol.1, Amer. Math. Soc., 1992.