

Infinite tensor products of operators

京大 数研 · 東工大 理中 神 祥 臣

§ 1. 序.

ここでは現在準備中である KITAGAWA and NAKAGAMI [2] の結果を紹介する.

§ 2. 定義と記号の説明.

I : 無限添字集合 ; $i, k \in I$

$J \subset I \iff J$ は I の有限部分集合

$\mathcal{H}_i$: $\{0\}$ でない Hilbert 空間 ; $\xi_i, \eta_i \in \mathcal{H}_i$

M_i : $\mathcal{H}_i$ 上の von Neumann algebra ; $x_i, y_i \in M_i$

Γ_0 : Co-sequences 全体の集合 ; $(\xi_i), (\eta_i) \in \Gamma_0$

ただし $0 < \prod \|\xi_i\| < +\infty$.

$(\xi_i) \sim (\eta_i) \iff \sum |(\xi_i, \eta_i) - 1| < +\infty$

$(\xi_i) \approx (\eta_i) \iff$ あるユニタリ作用素 $u_i \in M_i'$ が存在
 $\sum |(u_i \xi_i, \eta_i) - 1| < +\infty$

$$\Gamma = \Gamma_0 / \sim$$

$$; \quad \Gamma, \Gamma' \in \Gamma$$

$$(\Gamma) = \Gamma_0 / \simeq$$

$$; \quad (\Gamma), (\Gamma') \in (\Gamma)$$

$\otimes \mathcal{H}_i$: 完全無限テンソル積

$\otimes^{\Gamma} \mathcal{H}_i$: $\Gamma \in \Gamma$ に対応した不完全無限テンソル積

$$\otimes M_i = \left(\bigcup_{j \in I} (\otimes_j M_i) \otimes C(\otimes_{j \in I} \mathcal{H}_i) \right)''$$

ここで, $C(\otimes_{j \in I} \mathcal{H}_i)$ は $\otimes_{j \in I} \mathcal{H}_i$ 上の scalar 作用素全部

$\otimes^{\Gamma} M_i$: $\otimes M_i$ の $\otimes^{\Gamma} \mathcal{H}_i$ 上への制限.

§ 3. 作用素の無限テンソル積.

$\mathcal{H}_i$ を $\mathcal{H}_i$ 上の有界な作用素としたとき, $\prod \|\mathcal{H}_i\| < +\infty$ が成り立, ていれば, $\otimes \mathcal{H}_i$ 上にその無限テンソル積 $\otimes \mathcal{H}_i$ を定義でき, 各 $\mathcal{H}_i$ の極分解 $\mathcal{H}_i = u_i |\mathcal{H}_i|$ により, その $\otimes \mathcal{H}_i$ は $(\otimes u_i)(\otimes |\mathcal{H}_i|)$ と表わせることを [3] の中で示したが, 幾つかの応用を考える場合には, $\prod \|\mathcal{H}_i\| < +\infty$ という条件は必ずしも適切ではない. そこで定義域を不完全テンソル積 $\otimes^{\Gamma} \mathcal{H}_i$ だけに済ませることにより, これより弱い条件下で作用素の無限テンソル積を与えることにする.

この節では各 $i \in I$ に対して

$\mathcal{H}_i$: 稠密な定義域 $\mathcal{D}(\mathcal{H}_i)$ を持つ 0 でない $\mathcal{H}_i$ 上の閉作用素

$\mathcal{D}(\mathcal{H}_i^*)$: $\mathcal{H}_i^*$ の定義域

$\mathcal{H}_i = u_i |\mathcal{H}_i|$: 極分解.

$(\xi_{0i}) \in \mathbb{C}$, $\xi_{0i} \in \Theta(\lambda_i)$ に対して

$\Theta(\Theta\lambda_i)^{\xi_0}$: $\xi_i \in \Theta(\lambda_i)$, $\{i \in I: \xi_i \neq \xi_{0i}\}$ が有限であるような
 $\otimes \xi_i$ により張られる線形空間

$\Theta(\Theta\lambda_i)^{\mathbb{C}}$: $\xi_i \in \Theta(\lambda_i)$, $(\xi_i) \in \mathbb{C}$, $\prod \{\|\lambda_i \xi_i\|: \lambda_i \xi_i \neq 0\} < +\infty$
 なる $\otimes \xi_i$ により張られる線形空間

以後 $\otimes \xi_i \in \Theta(\Theta\lambda_i)^{\xi_0}$ または $\Theta(\Theta\lambda_i)^{\mathbb{C}}$ とは ξ_i が上のような条件を満たしているものとする. 同様の記号 $\Theta(\Theta\lambda_i^*)^{\eta_0}$, $\Theta(\Theta\lambda_i^*)^{\mathbb{C}}$ を使う. 次の事が容易に示される.

$$\exists \otimes \xi_i \in \Theta(\Theta\lambda_i)^{\xi_0}: \otimes \lambda_i \xi_i \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \{i \in I: \lambda_i \xi_{0i} = 0\} \text{ は有限, } 0 < \prod \{\|\lambda_i \xi_{0i}\|: \lambda_i \xi_{0i} \neq 0\} < +\infty$$

$$\Leftrightarrow \sum \|\lambda_i \xi_{0i}\| - 1 < +\infty$$

定義. $(\xi_{0i}) \in \mathbb{P}_0$, $(\eta_{0i}) \in \mathbb{P}_0$ とする. (ξ_{0i}) が (a) (か) (d) または non (d) を満たす場合には (λ_i) の (zero 又は non zero) reference vector という. $\{(\xi_{0i}), (\eta_{0i})\}$ が (a), (b), (c) (か), (d) を満たす場合には (λ_i) の (non zero) reference vector という.

$$(a) \quad \xi_{0i} \in \Theta(\lambda_i), \prod \{\|\lambda_i \xi_{0i}\|: \lambda_i \xi_{0i} \neq 0\} < +\infty;$$

$$(b) \quad \eta_{0i} \in \Theta(\lambda_i^*), \prod \{\|\lambda_i^* \eta_{0i}\|: \lambda_i^* \eta_{0i} \neq 0\} < +\infty;$$

$$(c) \quad \otimes \xi_i \in \Theta(\Theta\lambda_i)^{\xi_0}: \otimes \lambda_i \xi_i \neq 0 \Rightarrow (\lambda_i \xi_i) \sim (\eta_{0i});$$

$$(d) \exists \otimes \xi_i \in \mathcal{D}(\otimes \eta_i)^{\otimes_0} : \otimes \eta_i \xi_i \neq 0.$$

補助定理. $(\xi_{i0}) \in \mathbb{C}$ を zero reference vector とすると, $\forall i$ なる $\otimes \xi_i \in \mathcal{D}(\otimes \eta_i)^{\otimes_0}$ に対し $(\otimes \xi_{i0} \eta_i)(\otimes \xi_i) = \otimes \eta_i \xi_i$ となるような定義域 $\mathcal{D}(\otimes \eta_i)^{\otimes_0}$ を持つ作用素 $\otimes \xi_{i0} \eta_i$ が存在し, その最小の閉包は $\otimes \eta_i$ 上の 0 である.

$\{(\xi_{i0}), (\eta_{i0})\}$ を (η_i) の non zero reference vector とし, $\mathcal{D}(\otimes \eta_i)^{\otimes}$ 上に内積と norm を

$$(\xi | \xi')_{\otimes \eta_i} = (\xi | \xi') + \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n (\otimes \eta_j \xi_j | \otimes \eta_k \xi'_k)$$

$$\|\xi\|_{\otimes \eta_i} = \{(\xi | \xi)_{\otimes \eta_i}\}^{1/2}$$

で定義する. $\xi = \sum_{j=1}^m \otimes \xi_j \eta_j$, $\xi' = \sum_{k=1}^n \otimes \xi'_k \eta'_k \in \mathcal{D}(\otimes \eta_i)^{\otimes}$

$\mathcal{D}(\otimes \eta_i)^{\otimes}$, $\therefore \mathcal{D}(\otimes \eta_i)^{\otimes}$ の $\|\cdot\|_{\otimes \eta_i}$ 閉包

$\mathcal{D}(\otimes \eta_i^*)^{\otimes'}$: $\mathcal{D}(\otimes \eta_i^*)^{\otimes'}$ の $\|\cdot\|_{\otimes \eta_i^*}$ 閉包

定理 3.1. $\{(\xi_{i0}), (\eta_{i0})\}$ を $(\xi_{i0}) \in \mathbb{C}$, $(\eta_{i0}) \in \mathbb{C}'$ なる (η_i) の non zero reference vector とすると下のような条件を満たす 0 でない閉作用素 $\otimes \eta_i^{\otimes} \eta_i : \otimes \eta_i \rightarrow \otimes \eta_i$ と $\otimes \eta_i^{\otimes' *} \eta_i^* : \otimes \eta_i^* \rightarrow \otimes \eta_i^*$ とが存在する:

(i) $\otimes \eta_i^{\otimes} \eta_i$ の定義域は $\mathcal{D}(\otimes \eta_i)^{\otimes}$

$\otimes \eta_i^{\otimes' *} \eta_i^* \quad \mathcal{D}(\otimes \eta_i^*)^{\otimes'}$

- (ii) $\otimes \xi_\lambda \in \mathcal{O}(\otimes \lambda_\lambda)^{\mathfrak{f}_0}$ ならば $(\otimes^{\mathfrak{C}^c} \lambda_\lambda)(\otimes \xi_\lambda) = \otimes \lambda_\lambda \xi_\lambda$
 $\otimes \eta_\lambda \in \mathcal{O}(\otimes \lambda_\lambda^*)^{\mathfrak{f}_0}$ $(\otimes^{\mathfrak{C}^c} \lambda_\lambda^*)(\otimes \eta_\lambda) = \otimes \lambda_\lambda^* \eta_\lambda$
- (iii) $\otimes^{\mathfrak{C}^c} \lambda_\lambda \subset (\otimes^{\mathfrak{C}^c} \lambda_\lambda^*)^*$, $\otimes^{\mathfrak{C}^c} \lambda_\lambda^* \subset (\otimes^{\mathfrak{C}^c} \lambda_\lambda)^*$

系 3.1. $\{(\xi_\lambda), (\eta_\lambda)\}$ は (λ_λ) の non zero reference vector
 として $0 < \prod \|\eta_\lambda\| < +\infty$ とする. すると $\otimes \xi_\lambda \in \mathcal{O}(\otimes \lambda_\lambda)^{\mathfrak{f}_0}$ と $\otimes \eta_\lambda$
 $\in \mathcal{O}(\otimes \lambda_\lambda^*)^{\mathfrak{f}_0}$ が存在して $(\eta_\lambda \eta_\lambda) \in \mathbb{C}^n$, $(\eta_\lambda^* \xi_\lambda) \in \mathbb{C}^m$ ならば

- (i) $(\otimes^{\mathfrak{C}^c} \eta_\lambda)(\otimes^{\mathfrak{C}^c} \lambda_\lambda) = \otimes^{\mathfrak{C}^c} \eta_\lambda \lambda_\lambda$
 (ii) $\mathcal{R}(\lambda_\lambda) \subset \mathcal{O}(\lambda_\lambda)$ ならば $(\otimes^{\mathfrak{C}^c} \lambda_\lambda)(\otimes^{\mathfrak{C}^c} \eta_\lambda) = \otimes^{\mathfrak{C}^c} \lambda_\lambda \eta_\lambda$

系 3.2. $\{(\xi_\lambda), (\eta_\lambda)\}$ は (λ_λ) の non zero reference vector
 とする. すると $\otimes \eta_\lambda \in \mathcal{O}(\otimes \lambda_\lambda^*)^{\mathfrak{f}_0}$ が存在して $(\eta_\lambda^* \eta_\lambda) \in \mathbb{C}^m$ ならば
 ば $\otimes^{\mathfrak{C}^c} \lambda_\lambda = (\otimes^{\mathfrak{C}^c} \eta_\lambda)(\otimes^{\mathfrak{C}^c} |\lambda_\lambda|)$.

定理 3.2. $\prod \{\lambda_\lambda : \lambda_\lambda \neq 0\} < +\infty$ なる $\lambda_\lambda \in \sigma(|\lambda_\lambda|)$ の集合
 $\{l \in I : \lambda_l \notin \sigma_p(|\lambda_l|)\}$ が可算ならば,

- (i) $\xi_{0\lambda} \in \mathcal{O}(\lambda_\lambda)$, $\sum \|\lambda_\lambda \xi_{0\lambda} - \lambda_\lambda \xi_{0\lambda}\| < +\infty$ なる (λ_λ) の reference
 vector $\{(\xi_{0\lambda}), (\eta_{0\lambda})\}$ が存在する;
 (ii) $\xi \in \mathcal{O}(\otimes \lambda_\lambda)^{\mathfrak{C}}$ に対して

$$(\otimes^{\mathfrak{C}^c} \lambda_\lambda) \xi = \lim_{J \subset I} \eta_J \xi,$$

ただし $w_\lambda = \eta_\lambda \xi_{0\lambda} \otimes \overline{\xi_{0\lambda}}$; $\eta_\lambda = \lambda_\lambda$, $l \in J$ かつ $\eta_l = \lambda_l w_l$, $l \in J^c$;

$$y_j = \otimes^{c_j} y_L ; (y_L) \sim (u_L \xi_{0L}) \in E'.$$

系 3.3. $\{(\xi_{0L}), (y_{0L})\}$ を (x_L) の non zero reference vector とし $x_L \in M_L$ とすれば, $\otimes^{c_L} |x_L| \in \otimes^{c_L} M_L$.

系 3.4. $\sum \|x_L\| \xi_{1L} - \xi_{1L} < +\infty$ なる (ξ_{1L}) が存在すれば, $\{i \in I : \lambda_i = 0\}$ が有限, $\{i \in I : \lambda_i \neq \sigma_p(|x_L|)\}$ が可算で $0 < \prod \{\lambda_i : \lambda_i \neq 0\} < +\infty$ となるような $\lambda_i \in \sigma(|x_L|)$ が存在する.

§4. 応用例 1.

$\mathcal{O}_L$ を normalized identity 1_L を持つ generalized Hilbert algebra $\mathcal{O}_L$ の完備化で $(1_L) \in E$ とする.

定義. Generalized Hilbert algebra $\mathcal{O}_L$, $i \in I$ の無限テンソル積を $\xi_i \in \mathcal{O}_L$, $\{i \in I : \xi_i \neq 1_i\}$ は有限であるような $\otimes \xi_i \in \otimes^E \mathcal{O}_L$ に involution と積

$$(\otimes \xi_i)^\# = \otimes \xi_i^\#, (\otimes \xi_i)(\otimes \eta_i) = \otimes \xi_i \eta_i$$

を導入して得られる involutive algebra のこととし, $\otimes \mathcal{O}_L$ で表わす.

β_c を modular automorphism $\Delta_c(\alpha)$ を持つ modular Hilbert algebra $\mathcal{H} \otimes \beta_c$ 上の modular automorphism を

$$\Delta(\alpha)(\otimes \xi_c) = \otimes_c \Delta_c(\alpha) \xi_c$$

とすると $\Delta(\alpha)$ は $\mathcal{H} \otimes \beta_c$ 上の modular automorphism である。

$\mathcal{H}$: Hilbert 空間

$B(\mathcal{H})$: $\mathcal{H}$ 上の 有界作用素全体

$C(\mathcal{H})$: $\mathcal{H}$ 上の scalar 作用素全体

$\xi \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$: $\|\xi\|=1$, $B(\mathcal{H}) \otimes C(\mathcal{H})$ に対して separating, cyclic とすると, ω_ξ により $B(\mathcal{H}) \otimes C(\mathcal{H})$ は generalized Hilbert algebra に成るのだからこれを $\mathcal{U}$ とし, $B(\mathcal{H}) \otimes C(\mathcal{H})$ に対して $\mathcal{U}$ の言葉を使う。こゝで

$$M_c = B(\mathcal{H}_c) \otimes C(\mathcal{H}_c) \quad , \quad \xi_c = \xi$$

$$M(\mathcal{H}, \xi) = \otimes^c M_c \quad , \quad (\xi_c) \in \mathbb{C}$$

とすると

命題. $j=1, 2$ に対して Δ_j を $M(\mathcal{H}_j, \xi_j)$ の modular operator とする。もし Δ_1 と Δ_2 が ± 1 の冪値ならば, $M(\mathcal{H}_1, \xi_1)$ と $M(\mathcal{H}_2, \xi_2)$ は spacially 同型である。

§5. 応用例 2.

この節は単なるお話しである。

σ_i と τ_i を M_i 上の faithful normal states としたとき
稠密な定義域を持つ閉作用素 $h_i \eta M_i$ を

$$\sigma_i(x_i) = \tau_i(h_i^* x_i h_i), \quad x_i \in M_i$$

となるように選ぶ. (h_i) の reference vector を $\{(\xi_{i0}), (\eta_{i0})\}$
とし $(\xi_{i0}) \in E$, $(\eta_{i0}) \in E'$ に対し $(E) = (E')$ と仮定する. もし
 (ξ_{i0}) が τ_i の quasi-characteristic vector ならば, $\otimes \sigma_i$
が存在して

$$(\otimes \sigma_i)(\otimes^{E,E'} x_i) = (\otimes \tau_i)((\otimes^{E,E'} h_i)^* (\otimes^{E,E'} x_i) (\otimes^{E,E'} h_i))$$

がすべての $\otimes x_i \in \otimes M_i$ に対して成立する.

昨年、講演の中に補助定理3が間違っていることを荒木先生に指摘していただきました。それを使わないでも定理1の証明はできます [4]。

数理解析研究所での荒木先生の御指導と御好意に対して心から感謝致します。

補遺. (ξ_{i0}) は reference vector であるが, 一般的な $(\eta_{i0}) \in P_i$ を選んでも $\{(\xi_{i0}), (\eta_{i0})\}$ が reference vector に成らない場合には, 自然な意味での閉作用素 $\otimes h_i$ の定義は困難である.

参考文献

- [1] ARAKI, H., AND E. J. WOODS, A classification of factors.
Publ. RIMS, Kyoto Univ., 4 (1968), 51-130.
- [2] KITAGAWA, S., AND Y. NAKAGAMI, Infinite tensor products
of operators. To be prepared.
- [3] NAKAGAMI, Y., Infinite tensor products of von Neumann
algebras, I. Kodai Math. Sem. Rep., 22 (1970), 341-354.
- [4] NAKAGAMI, Y., A characterization of an infinite tensor
products of von Neumann algebras. Unpublished.
- [5] TAKESAKI, M., Tomita's theory of modular Hilbert algebras
and its applications. Springer-Verlag, (1970).
- [6] TOMITA, M., Standard forms of von Neumann algebras.
第5回関数解析シンポジウム講義録. (1967).