

Hyperbolic geometry and 3-manifolds 問題集

松元重則 (S. Matsumoto), 坪井俊 (T. Tsuboi), 矢野公一 (K. Yano)

- I $SL_2\mathbb{C}$
- II $\pi_1(\Sigma_g)$, M_g
- III Bounded cohomology
- IV Knots
- V Geometric limit
- VI Elliptic surfaces
- VII Miscellaneous

I. $SL_2\mathbb{C}$

(1.1) M : closed oriented 3-manifold

Σ : 1-graph, valency = 3

よって (1.1) uniformizable か?

i.e. $\exists \rho: \pi_1(M \setminus \Sigma) \rightarrow SL_2\mathbb{C}$

s.t. $\rho(\text{meridian}) = \text{elliptic of } 2\pi/n$

かつ $\text{Im } \rho$: discrete

(加藤, 相馬)

(1.2) hyperbolic 3-cone-manifold の cone angle ε

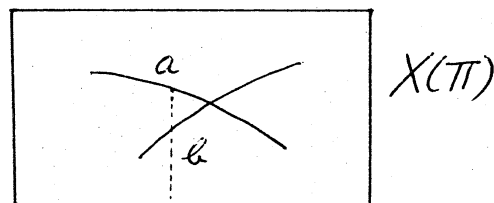
指定して rigid か?

(吉田)

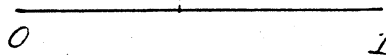
(1.3) (1.1)の記号の下に $\pi = \pi_1(M \setminus \Sigma)$ とし

$$R(\pi) = \{\rho: \pi \rightarrow SL_2\mathbb{C}\}, \quad X(\pi) = R(\pi) / \text{conj. by } SL_2\mathbb{C}$$

とすると 幾何的実現可能
なもので分岐が可能か?



cone angles ↓

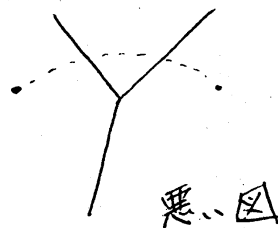


(相馬)

(If YES, $\exists a, b$ の幾何的
実現 N_a, N_b $\bar{\tau}$ N_a と N_b
は cone angle が等しくかつ
metric space として近いが,
異なる holonomies a, b を持つ

(1.4) cusped hyperbolic 3-manifold は ideal 3-simplex
で分割できるか? (吉田)

(1.5) hyperbolic 3-manifold の
Dirichlet domain は 良い性質を
持つか?



悪い図

(If YES, (1.4) は 肯定的

(坪井)

(1.6) Euclidean 3-cone manifold with singularities は
いつ spherical and/or hyperbolic 3-cone manifold
の limit になるか? 更に cone manifold の変形に

よる 8つの geometry の隣接関係を記述せよ。
(小島)

Remarks (i) 2次元は O.K.

(ii) 一般には $D^2 \times (S^1 \times S^1)$ (相馬)

(iii) complement hyperbolic ならどうか?

1.7) hyperbolic 3-cone manifold の deformation τ
hyperbolic 3-cone manifold structure ϕ による cone angle
($\leq 2\pi$) は連続か? また Dehn surgery deformation
 τ はどうか? (大鹿)

(1.8) a) hyperbolic 3-manifold の volume は $\mathbb{Q}$ 上 1次元独立か?

b) $\text{Image}(\text{vol}: H_3(SL_2\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}) = ?$

$$\text{vol}(g_1, g_2, g_3) = \text{vol} \left(\begin{array}{c} \text{tetrahedron} \\ \text{with vertices } x, g_1x, g_2g_1x, g_3g_2g_1x \\ \text{and edges } g_1x, g_2g_1x, g_3g_2g_1x \\ \text{and } x \end{array} \right) \in \mathbb{H}^3$$

c) $\Lambda^2 \text{vol}: H_6(SL_2\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}$
は自明か?

(森田)

d) 一般に s.s. Lie 群の "不連続不変量" は自明か?

(1.9) hyperbolic 3-manifold の isometry group を決定せよ。
(河内)

Remark Given G freely acting on 3-manifold M ,

$\Rightarrow \exists M^*$ hyperbolic 3-manifold, homology equivalent
to M s.t. $G \hookrightarrow \text{Isom}(M^*)$.

II. $\pi_1(\Sigma_g)$, M_g

(2.1) $\Gamma = \pi_1(\Sigma_g)$ に対する $X(\Gamma)$ (cf. 1.3) を M_g 作用で覆えよ。 (吉田)

(2.2) Γ 同上, $X = R(\Gamma, SL_2\mathbb{R})/\text{conj}$ とする。

a) X の連結成分を決めよ。

b) $SL_2\mathbb{R} \in \text{Diff}_+(S')$, $\text{Homeo}_+(S')$ としたらどうか?

c) closed hyperbolic 3-manifold $\tilde{v}$, $SL_2\mathbb{C}$ としたらどうか? (三松)

(2.3) pseudo-Anosov f の mapping torus の volume を求めよ。 (三松)

とくに f の位相的 entropy と measured laminations の角度を記述できるか? (吉田)

(2.4) M_g は uniformly perfect か?

i.e. 任意の元が一定限度以下の交換子積で書ける。 (森田)

(2.5) a) surface bundle が handle body bundle に拡張する為の障害を求めよ。

b) surface bundle が fibrewise bordant なるための障害を求めよ。

以上の障害の何らかの reduction として 森田特性類が
あらわれるか? (加藤)

- (2.6) $f: \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$ pseudo Anosov,
 M_f : f の Heegaard manifold とするとき
 $\exists k$ s.t. $\forall n \geq k$, $\pi_1(M_{f^n}) \neq \{1\}$? (吉田)

III. Bounded cohomology

- (3.1) a) $H_b^3(M^3; \mathbb{R})$ M^3 : hyperbolic は無限生成か?
 ($\neq 0$ は known)

b) $H_b^2(\mathrm{PSL}_2 \mathbb{Z}; \mathbb{R}) = ?$ (何も山からでない)

- c) M^n : hyperbolic に対し $\{ \text{bounded measurable functions} \}$
 $\rightarrow H_b^n(M; \mathbb{R})$ が定義されるか. この写像を調べよ.
 例としては $1:1$ か? onto か? (三松)

(3.2) 次のいづれかを証明せよ。

1° $H_b^2(\Sigma_g; \mathbb{R}) = 0$ for $\forall g \geq 4$

2° $H_b^2(\Sigma_g; \mathbb{R}) \neq 0$ for $\forall g \neq 1$. (森田)

2° について $f: \Sigma_g \rightarrow N^n$; N^n 負曲率より引く戻すことにより
 non-trivial element が構成できるか? (吉田)

IV. Knots

(4.1) prime amphicheiral knot $\tilde{c}$ nontrivial free period ε かつ ε のあるか? (作間)

Remarks (i) 存在しても period は 2 に限る。

(ii) hyperbolic ではない。

(iii) composite ならば存在する。

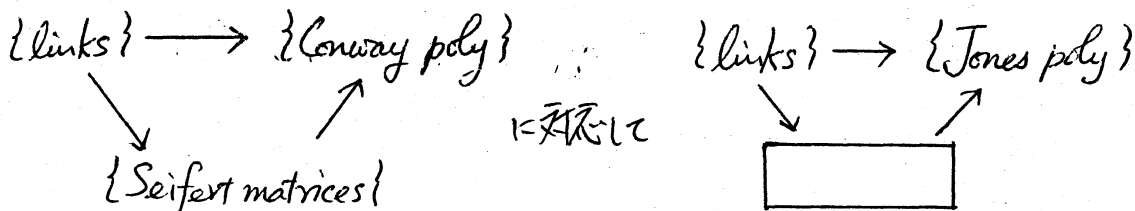
(4.2) a) Alexander-Conway polynomial は Jones polynomial よりも真に弱いのか? (村上)

Remarks (i) Alexander ideal が異なる 上の $\mathbb{Z}$ polynomial の一致する link あり。

(ii) Alexander module $\rightarrow$ Conway polynomial とあるが Jones polynomial については Alexander modules が同じ $\tilde{c}$ も異なるものあり。 (金信)

b) Jones polynomial = 1 $\Rightarrow$ trivial knot? (村上)
多分 No (河内)

c) 下の図式の空欄を埋めよ。 (村上)



Remark $\uparrow$ これは Alexander modules とおけるである。 (金信)

(4.3) unknotting number = 1 の knot を求めよ。 (村上)

$\Rightarrow$ K の unknotting number = 1

$\iff K$ の double cover は ある strongly invertible knot $\tilde{K}$ から $p/2$ (p : odd) - surgery で得られ, $\tilde{K}$ の covering transformation は $\tilde{K}$ の strong invertibility と $\tilde{K}$ 上の involution から自然に導びかれる ± 1 の $\mathbb{Z}_2$ によるものである。

Remarks (i) 上の同値関係より K が 2-bridge なら判定可能
(Culler-Shalen-Gordon-Litherland) (村上)

(ii) (i) の一般化として pretzel knot $K(p, q, r)$ の double cover = S^2 上の Seifert fibered space で index (p, q, r) . ところで どのような Seifert fibered space について 上のよう $\tilde{K}$ をとらせ。

(4.4) W^3 : connected oriented irreducible open 3-manifold
 $\pi_1(W^3)$ は finitely generated とする

a) 1つ W は compact 3-manifold に埋め込めるか?

b) 更に inclusion が π_1 上 mono に埋め込める条件は?

c) W が ある (wild) knot $\subset S^3$ の exterior になる条件は?

(垣水)

(4.5) $\text{Vol} = \infty$ の hyperbolic 3-manifold の end は topological に tame ($\approx \text{曲面} \times [0, \infty)$) か?

(小島)

(4.6) open 3-manifold に対し compact 多様体の内部に同相ではないが universal covering が $\mathbb{R}^3$ とする為の criterion を求めよ。
(小島)

(4.7) $M^3 \supset S$ one-sided incompressible surface
 $S' : S$ と homotopic な surface
 $\Rightarrow \exists f: M \rightarrow \text{homeo. isotopic to id}$ s.t. $f(S) = S'$?
 特に $M \setminus \nu(S)$ が handlebody のときは? (大鹿)

(4.8) a) $S^4 \supset K_1, K_2$: smooth 2-knots
 $\forall n, B_n(K_1) \approx B_n(K_2)$ (n fold cyclic branched covering)
 $\Rightarrow (S^4, K_1) \approx (S^4, K_2)$ diffeomorphic? (岡崎)

Remark Classical knot の時と全く同様に 2 つの non-invertible knot を
 方向を逆転させて connected sum することにより反例を得る。

従って 同様な例を除外して考えるべきです。単純には "prime knot
 ではどうか" とするが, 2-knot に対しては "prime", "prime 分解"
 が存在するかどうかは不明で, この困難から逃げる為には (4.8)a)
 を knot group が "prime" である 2-knot の範囲内で考えるのは
 どうでしょう。

(cf. T. Maeda "A unique decomposition for knot-like groups,"
 Math. Sem. Notes, Kobe Univ. 6 (1978); knot group の primeness
 に関して)

K_1 : unknot のときは特に興味深い, この場合問題が
 unknotting problem と同値かどうかは不明。
(作問)

$$b) W^5 = H^0 \cup \bigcup_{j=1}^n H_j^1 \cup \bigcup_{j=1}^n H_j^2 \quad (H_j^i: i\text{-handle})$$

$$\pi_1(W^5) = 1 \implies W^5 \approx B^5 ?$$

$$c) S^4 \supset K: 2\text{-knot}, B_n(K): 1\text{-connected}$$

$$\implies B_n(K) \approx S^4 ?$$

特に K : ribbon のとき $B_n(K) = \partial(M^{\#} \times I)$ かつ $M^{\#} \times I$ が $b)$ の分解をゆるす $M^{\#}$ が存在する。よって、このときは $b) \implies c)$. (岡崎)

(4.9) 2-knot の prime decomposition は存在するか?
存在するとすれば、その分解は unique か?

Remark. 群レベルでは unique prime decomposition が存在する (T. Maeda (前出 (4.8) e)). 存在証明に誤りがあったが、著者自身により、最近、正しい証明がつけられている。) もし、unknotting conjecture が正しいければ群レベルで prime decomposition が存在することより、2-knot の prime decomposition の存在が いえる. (作問)

V. Geometric limit (深谷)

(5.1) M_i^n : Riemannian manifolds

$\lim M_i^n = X$: compact metric space のとき次を示せ。

$$a) \forall p \in X, \exists \text{ neighborhood } U \ni p \text{ s.t. } U \cong \mathbb{R}^{\dim X} / T$$

ここで T は torus の有限群による拡大で $\mathbb{R}^{\dim X}$ に

isometric に act.

(これは成立する。深谷 609頁)

b) 十分大なる i に対し $f_i: M_i \rightarrow X$ が存在して

b-1) $X_0 \equiv \{x \in X; \exists U \ni x \text{ } U \cong \mathbb{R}^{\dim X}\}$ に対し
 $f_i^{-1}(X_0) \xrightarrow{f_i} X_0$ は fibre bundle with infranil
manifold F as a fibre.

b-2) $x \in X$ の近傍は $\mathbb{R}^{\dim X}/T$ と同型である
 $f_i^{-1}(x) \cong F/T$.

(5.2) $M \rightarrow N$ fiber bundle with a infranil manifold
as a fiber とするとき, M 上の metric g_i の列で

$$|\text{sec. curv. of } g_i| \leq 1, \quad \lim (M, g_i) = N$$

なるものを見つけよ。特に S^1 上の T^2 -bundle はどうか?

VI. Elliptic surfaces (上)

(6.1) $\pi: S \rightarrow \Delta$ は multiple torus 以外の singular fiber
をもたない elliptic surface (holomorphic Seifert fibering) とする。

a) S の diffeo type は $\pi_1 S$ で決まる?

Remarks (i) Δ : hyperbolic or Euclidean orbifold と O.K.

(Zieschung - 坂本-藤原 etc.)

- (ii) Δ : spherical with 3-singularities $\alpha \neq \beta$.
 (iii) Δ : spherical with $\#$ singularities ≤ 2 $\alpha \neq \beta$ NO
 (Hopf surface).

b) 各々 π どのような geometric structure を持つ?
 $\mathcal{V}$ の deformation space は どのようなものか?

(6.2) elliptic surfaces $\{ L_{a_1}(m) L_{a_2}(n) V_g \}$;
 V_g は $\mathbb{CP}^1$ 上 $XV_g = 12(g+1)$ の multiple fiber のない
 elliptic surface, $\gcd(m, n) = d \} d \neq 1$

但し, $L_a(m)$ は logarithmic transformation with
 multiplicity m

これは $\pi_1 \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \neq 1$. この homotopy
 type は何で決まるか? intersection form と ω_2
 だけで決まるか?

Remark C.T.C. Wall も同じ問題を解いている。

(6.3) $\pi: S \rightarrow \Delta$ は (6.1) と同様とするとき

Singular fibering が unique であるものはあるか?

Remark Δ : Euclidean $\alpha \neq \beta$ base orbifold の異なる fibering を
 許すものがある。

(6.4) Intersection form $(H_2(M; \mathbb{Z}), \cdot)$ は even type だが spin じゃない (i.e. $H_1(M; \mathbb{Z}) \neq 0$) closed 4-manifold M について intersection form $2E_8 + U$, $2E_8$ は実現可能か?

Remark. $2E_8 + 2U$ は実現可能 (Furushel-Stern).

(6.5) $\Sigma(2, 3, 7)$ は torsion in H^3 か?

VII. Miscellaneous

(7.1) M^3 : compact hyperbolic 3-manifold 上の non-singular flow を universal covering H^3 に lift したとき, orbit はいつ $S_\infty = \partial H^3$ の一点に収束するか? (矢野)

Remark 任意の orbit が任意の compact subset から出てしまふこと
反例がある。もし収束が与えても連続にはなない。

(7.2) M : 3-dimensional open contractible manifold,
1-connected at ∞

$\Rightarrow \exists$ Complete Riemannian metric $\exists$ complete
Conformal vector field u

s.t. u の singular point はすべて source $\sim$ sink.

(足立)

(7.3) compact leaf を持たない codimension 1 foliation
を許さない 3-manifold を みる 挙げよ。 (松元)

(7.4) T^2 上の foliated S^1 -bundle の G.V. 類 = 0 たる
事実の 簡単な 証明 を 求めよ。 (三松)

(7.5) compact 3-manifolds に対し, G -homotopy 同値
は G -homotopic to G -stratified 同値 か?
但し, G : properly discontinuous, G^u : finite.
(加藤)

以上