

LMI を用いた離散時間非負システムの安定性と H_∞ 性能解析*

松村 大気[†]・蛭原 義雄[†]・萩原 朋道[†]

LMI-based Stability and H_∞ Performance Analysis of Discrete-time Positive Systems*

Taiki MATSUMURA[†], Yoshio EBIHARA[†] and Tomomichi HAGIWARA[†]

This paper is concerned with the stability and H_∞ performance analysis of discrete-time positive systems. In the literature, it is shown that the stability and H_∞ performance of continuous-time positive systems can be characterized by LMIs with diagonal Lyapunov matrices. Recently, new LMIs allowing asymmetric matrix solutions have been reported as well. In this paper, by means of the Perron-Frobenius theorem, we first show that the Schur stability of a given positive matrix is equivalent to the Hurwitz stability of an appropriately constructed Metzler matrix. Then, we secondly prove that we can construct a continuous-time positive system preserving the stability and H_∞ norm of the original discrete-time positive system. By applying existing results to the resulting continuous-time positive systems, we can readily obtain useful LMIs for the stability and H_∞ performance analysis of discrete-time positive systems.

1. はじめに

近年、経済学や環境学、医学や生物学といった多彩な分野に制御理論を応用する試みが活発に行われている。このような研究の一環として、非負システムの解析や設計に関する研究が盛んである[12,11,1–4]。非負システムとは、いかなる非負の入力および非負の初期状態に対しても、その出力および状態変数が非負の値のみを取る動的システムである[5,7]。非負システムは、大気汚染モデルや化学反応を伴う工業プロセスを表すモデル、人口動態の推移を表す年齢構成モデルなど、負の値を取り得ない変数で動特性が表される動的システムの数理モデルとして有効である[5]。

線形時不変 (Linear Time-Invariant: LTI) システムが非負システムとなるための必要十分条件は、連続時間システムの場合にはシステム係数行列が Metzler 行列 (非対角要素が非負である正方行列) となりその他の係数行列が非負行列 (すべての要素が非負である行列) となること、離散時間システムの場合には係数行列がすべて

非負行列となることである[5]。また、連続時間非負システムの安定性と H_∞ 性能は、それぞれ対角の Lyapunov 行列を解とする Lyapunov 不等式と KYP タイプの標準的な線形行列不等式 (Linear Matrix Inequality: LMI) により特徴づけられることが示されている[5,12]。さらにこの結果の拡張もなされ、非対称行列を解として許容する LMI も導出されている[4]。後者の LMI は、パラメトリックな不確かさを有する連続時間非負システムのロバスト安定性解析、ロバスト H_∞ 性能解析において有用である[4,8]。一方、離散時間非負システムに関しては、安定性が対角の Lyapunov 行列により特徴づけられる[5,11] ことが示されるに留まっている。

そこで本論文では、文献[12,4]の結果を離散時間非負システムに拡張し、安定性と H_∞ 性能を特徴づける種々の LMI 条件を導出する。鍵となるのは、係数行列の簡単な変換により、与えられた離散時間非負システムの安定性と H_∞ ノルムを保存する連続時間非負システムを構成できるという結果である。この結果を示す過程で、離散時間非負システムの H_∞ ノルムが、対角の Lyapunov 行列を解とする KYP タイプの LMI によって特徴づけられることを明らかにする。一方、係数行列の変換によって得られる連続時間非負システムに対して文献[4]の結果を適用することで、離散時間非負システムの安定性と H_∞ 性能を特徴づける種々の有用な LMI 条件 (と

* 原稿受付 2012年6月13日

[†] 京都大学 大学院 工学研究科 Graduate School of Engineering, Kyoto University; Kyotodaigaku-Katsura, Nishikyo-ku, Kyoto city, Kyoto 615-8510, JAPAN

Key Words: discrete-time positive system, stability, H_∞ performance, LMI.

くに非対称行列を解として許容する LMI 条件)を導出する. さらに本論文では, 非対称行列を解として許容する LMI の有効性を, パラメトリックな不確かさを有する離散時間非負システムのロバスト性能解析に関する数値例を用いて示す.

本論文で用いる表記は以下の通りである. まず, n 次の非負ベクトルからなる集合を $\mathbb{R}_+^n$ で表し, 同様に $n \times m$ 次の非負行列からなる集合を $\mathbb{R}_+^{n \times m}$ で表す. また, サイズが n の正定 (半正定) 行列からなる集合, および対角正定行列からなる集合をそれぞれ $\mathbb{S}_{++}^n$ ($\mathbb{S}_+^n$), $\mathbb{D}_{++}^n$ で表す. さらに, サイズが n の Metzler 行列からなる集合を $\mathbb{M}^n$ で表す. 行列 A の (i, j) 要素を A_{ij} で, ベクトル x の第 i 要素を x_i で表す. 与えられた同じサイズの行列 A, B に対して, $A_{ij} > B_{ij}$ ($A_{ij} \geq B_{ij}$) となるとき $A > B$ ($A \geq B$) と書く. 同様に, 与えられた同じサイズのベクトル x, y に対して $x_i > y_i$ ($x_i \geq y_i$) となるとき $x > y$ ($x \geq y$) と書く. また, $A > 0$ ($A < 0$) は行列 A が正定 (負定) 行列であることを表す. 最後に, 正方行列 A に対して $\text{He}\{A\} := A + A^T$ と定義する.

2. 非負システムの定義と条件

非負システムの解析のための準備として, まず非負システムの定義 [5,7] を述べる.

【定義 1】 任意の非負の初期状態および任意の非負の入力に対して, システムの状態変数と出力が常に非負となるとき, このシステムは非負システムであるという.

次の二つの定理 [5,7] は, 与えられた連続時間 LTI システムおよび離散時間 LTI システムが非負となるための必要十分条件を示している.

【定理 1】 次式で表される m 入力 l 出力 n 次の連続時間 LTI システムを考える.

$$G(s) := C(sI - A)^{-1}B + D \quad (1)$$

このシステムが非負となるための必要十分条件は, $A \in \mathbb{M}^n$, $B \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}_+^{l \times n}$, $D \in \mathbb{R}_+^{l \times m}$ が成立することである.

【定理 2】 次式で表される m 入力 l 出力 n 次の離散時間 LTI システムを考える.

$$G(z) := C(zI - A)^{-1}B + D \quad (2)$$

このシステムが非負となるための必要十分条件は, $A \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}_+^{l \times n}$, $D \in \mathbb{R}_+^{l \times m}$ が成立することである.

3. LMI に基づく離散時間非負システムの安定性解析

本節では, 離散時間非負システムの安定性解析を行う. 離散時間および連続時間非負システムの安定性解析は, それぞれ非負行列の Schur 安定性および Metzler 行列の Hurwitz 安定性解析に帰着される. 文献 [4] では Metzler 行列の Hurwitz 安定性に関する考察がなされ, 非対称行列を解として許容する LMI 条件が導出されて

いる. そこで本節では, 安定性を保存する離散時間非負システムの連続時間非負システムへの変換法 (非負行列の Metzler 行列への変換法) を示し, 文献 [5,4] の結果を適用することで, 離散時間非負システムの安定性を特徴づける新たな LMI 条件 (とくに非対称行列を解として許容する LMI 条件) を導出する.

3.1 連続時間非負システムの安定性を特徴づける LMI

文献 [5,4] では, 連続時間非負システムの安定性, すなわち Metzler 行列の Hurwitz 安定性に関する種々の条件が示されている. これらを次の補題にまとめる.

【補題 1】 与えられた行列 $A \in \mathbb{M}^n$ に対して, 次の条件は等価である.

(SC-I) 行列 A は Hurwitz 安定である.

(SC-II) いかなる $h \in \mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}$ に対しても, 行ベクトル $h^T A$ は少なくとも一つの負成分をもつ.

(SC-III) 行列 A は正則で, $A^{-1} \leq 0$ を満たす.

(SC-IV) 次式を満たす $X \in \mathbb{D}_{++}^n$ が存在する.

$$\text{He}\{AX\} < 0 \quad (3)$$

(SC-V) 次式を満たす $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ が存在する.

$$\text{He}\{M\} > 0, \quad \text{He}\{AM\} < 0 \quad (4)$$

この補題の条件 (SC-V) は, Metzler 行列の Hurwitz 安定性解析においては Lyapunov 不等式の解として非対称行列を許容できることを示している. この条件は, パラメトリックな不確かさを有する連続時間非負システムのロバスト安定性解析において有効となる [4,8].

3.2 離散時間非負システムの安定性を特徴づける新たな LMI

次の補題は, 与えられた非負行列の Schur 安定性が, 簡単な変換によって得られる Metzler 行列の Hurwitz 安定性と等価となることを示している.

【補題 2】 与えられた行列 $A \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ に対して, 次の条件は等価である.

(i) 行列 A は Schur 安定である.

(ii) 行列 $A - I$ は Hurwitz 安定である.

(証明) (i) $\Rightarrow$ (ii) なる関係は, 非負とは限らない一般の行列 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ に対しても自明に成立する. (ii) $\Rightarrow$ (i) の証明は下記の通りである. 行列 A は非負であるから, Perron-Frobenius 定理 [10,9] より, 行列 A はそのスペクトル半径と等しい実固有値 $\alpha (\geq 0)$ をもつ. さらに $A - I$ は Hurwitz 安定であるから $\alpha - 1 < 0$ すなわち $\alpha < 1$ が成立する. したがって行列 A は Schur 安定である. $\square$

この補題より, 与えられた非負行列 A をシステム係数行列として有する離散時間非負システムと, Metzler 行列 $A - I$ をシステム係数行列として有する連続時間非負システムは, 安定性に関して等価であることがわかる. この結果と 補題 1 より, 離散時間非負システムの安定性を特徴づける次の定理がただちに導かれる.

【定理 3】 与えられた行列 $A \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ に対して、以下の条件は等価である。

(SD-I) 行列 A は Schur 安定である。

(SD-II) いかなる $h \in \mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}$ に対しても、行ベクトル $h^T(A-I)$ は少なくとも一つの負成分をもつ。

(SD-III) 行列 A は正則で、 $(A-I)^{-1} \leq 0$ を満たす。

(SD-IV) 次式を満たす $X \in \mathbb{D}_{++}^n$ が存在する。

$$\text{He}\{(A-I)X\} \prec 0 \quad (5)$$

(SD-V) 次式を満たす $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ が存在する。

$$\text{He}\{M\} \succ 0, \quad \text{He}\{(A-I)M\} \prec 0 \quad (6)$$

この定理における諸条件に加え、補題 2 より、次の条件も行列 $A \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ の Schur 安定性を特徴づける必要十分条件となっていることがわかる。

$$X \in \mathbb{S}_{++}^n, \quad \text{He}\{(A-I)X\} \prec 0 \quad (7)$$

一方、(必ずしも非負とは限らない) 行列 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ の Schur 安定性を特徴づける通常の離散型 Lyapunov 不等式は、次式で与えられる。

$$X \in \mathbb{S}_{++}^n, \quad -X + AXA^T \prec 0 \quad (8)$$

ここで、これら (7) 式と (8) 式で表される二つの LMI 条件に関連して、次の結果が成立する。

【補題 3】 (8) 式を満足する $X \in \mathbb{S}_{++}^n$ は (7) 式を満足する。

(証明) 任意の $X \in \mathbb{S}_{++}^n$ に対して、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} & (-X + AXA^T) - (\text{He}\{(A-I)X\}) \\ &= (A-I)X(A-I)^T \succeq 0 \end{aligned}$$

したがって (8) を満足する $X \in \mathbb{S}_{++}^n$ は (7) を満足する。□

この補題より、与えられた行列 $A \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ に対して離散型 Lyapunov 不等式 (8) を満足する行列 $X \in \mathbb{S}_{++}^n$ は (7) 式を満足し、さらに (6) 式を ($M = X$ として) 満足することがわかる。このような明確な関係に基づくことで、パラメトリックな不確かさを有する離散時間非負システムのロバスト安定性解析における条件 (SD-V) の有効性を理論的に保証することができる (次節参照)。なお、文献 [5,11] では、行列 $A \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ が Schur 安定となるための必要十分条件が、(8) 式で表される離散型 Lyapunov 不等式を満足する行列 $X \in \mathbb{D}_{++}^n$ が存在することであることが示されている。補題 3 より、(8) 式を満足する $X \in \mathbb{D}_{++}^n$ は必ず (5) 式を満足する。このような明確な関係は、パラメトリックな不確かさを有する離散時間非負システムに対する (閉ループシステムの非負性の維持を考慮した) ロバスト安定化制御器設計問題を扱ううえで有用となる。紙面の都合上、詳細は省略する。

3.3 ロバスト安定性解析

本項では、ポリトープ型の不確かさを有する離散時間非負システムのロバスト安定性解析を例に、前項の定理 3 の条件 (SD-V) の有効性を示す。システム (2) の係数行列 A が、与えられた Schur 安定な非負行列 A_0 およ

び Schur 安定とは限らない非負行列 A_i ($i = 1, \dots, N$) を用いて次式で表される $A_\alpha(r)$ となる場合を考える。

$$\begin{aligned} A_\alpha(r) &= \sum_{i=1}^N \alpha_i A_i(r), \\ A_i(r) &= A_0 + r A_i \quad (i = 1, \dots, N), \\ \alpha \in \alpha, \quad \alpha &:= \left\{ \alpha \in \mathbb{R}_+^N : \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1 \right\} \end{aligned} \quad (9)$$

本項では任意の $\alpha \in \alpha$ に対して $A_\alpha(r)$ が Schur 安定となるような $r > 0$ の上限値 r^* を求める問題、すなわちロバスト安定余裕を求める問題を考える。この問題は $\alpha \in \alpha$ の変動に応じた“無限個”の行列の Schur 安定性を解析する問題であり、そのため厳密に解くことは困難である。一方、 $A_\alpha(r)$ が任意の $\alpha \in \alpha$ に対して Schur 安定であるための十分条件は、すべての $A_i(r)$ ($i = 1, \dots, N$) に対して離散型 Lyapunov 不等式 (8) が共通解をもつことである。ここでは定理 3 の条件 (SD-V) の有効性を考察するために、従来の離散型 Lyapunov 不等式 (8) と定理 3 の条件 (SD-V) の LMI について考え、これらより導かれる次の最適化問題を解くことで、 r^* の下界値を求める。

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \sup_{X \in \mathbb{S}_{++}^n} r \quad \text{subject to} \\ & -X + A_i(r)X A_i(r)^T \prec 0 \quad (i = 1, \dots, N) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad & \sup_{\text{He}(M) \in \mathbb{S}_{++}^n} r \quad \text{subject to} \\ & \text{He}\{(A_i(r) - I)M\} \prec 0 \quad (i = 1, \dots, N) \end{aligned} \quad (11)$$

ここで補題 3 より、(10) の制約条件を満たす $X \in \mathbb{S}_{++}^n$ は、(11) の制約条件を ($M = X$ として) 満足する。したがって最適化問題 (a), (b) の最適値を r_a, r_b とすると、 $r_a \leq r_b$ が成立する。すなわち、条件 (SD-V) の LMI を用いることで少なくとも悪くはない下界値が求まることを理論的に保証できる。この結果の検証のために、 $N = 3$ とし、行列 A_0, A_1, A_2, A_3 を次式で与え、最適化問題 (a), (b) を二分法により解いた。

$$\begin{aligned} A_0 &= \begin{bmatrix} 0.0095 & 0.0103 & 0.0082 \\ 0.0192 & 0.0035 & 0.0128 \\ 0.0072 & 0.0097 & 0.0131 \end{bmatrix}, \\ A_1 &= \begin{bmatrix} 0.7285 & 0.4300 & 0.6622 \\ 0.1460 & 0.7375 & 0.0205 \\ 0.0846 & 0.0181 & 0.3953 \end{bmatrix}, \\ A_2 &= \begin{bmatrix} 0.1277 & 0.6204 & 0.5947 \\ 0.4754 & 0.0911 & 0.6260 \\ 0.1665 & 0.3465 & 0.2226 \end{bmatrix}, \\ A_3 &= \begin{bmatrix} 0.3864 & 0.1200 & 0.3523 \\ 0.4163 & 0.4705 & 0.3167 \\ 0.1319 & 0.6413 & 0.2521 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

計算結果は $r_a = 0.9063$, $r_b = 0.9173$ となり, 本論文で導出した新たな条件 (SD-V) の有効性が示された.

4. LMI に基づく離散時間非負システムの H_∞ 性能解析

文献 [12] では, 連続時間非負システムの H_∞ ノルムが, 対角の Lyapunov 行列を解とする KYP タイプの LMI により特徴づけられることが示されている. 一方, 文献 [4] では, 非対称行列を解として許容する LMI が導出された. 本節では, これらの結果を離散時間非負システムに拡張する. 鍵となるのは, 係数行列の簡単な変換により, 与えられた離散時間非負システムの安定性と H_∞ ノルムを保存する連続時間非負システムを構成できるという結果である. この結果を示す過程で, 文献 [12] の結果の拡張が可能であること, すなわち離散時間非負システムの H_∞ ノルムも, 対角の Lyapunov 行列を解とする KYP タイプの LMI によって特徴づけられることを示す. 一方, 係数行列の変換によって得られる連続時間非負システムに対して文献 [4] の結果を適用することで, 種々の有用な LMI (とくに非対称行列を解として許容する LMI) を導く.

なお, 一般の (非負とは限らない) 離散時間システムの H_∞ 性能解析においては, これを双一次変換によって連続時間システムに変換し, 連続時間システムに対する解析結果を適用するという方策をとることができる. しかしながら, 離散時間非負システムを双一次変換によって連続時間システムに変換すると, 変換後の連続時間システムは一般に非負とはならない. たとえば,

$$A_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_+^{3 \times 3}$$

をシステム係数行列とする離散時間非負システムを双一次変換すると, 変換後の連続時間システムはそのシステム係数行列が次式となるため, 非負とはならない.

$$A_c = (A + I)^{-1}(A - I) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \notin \mathbb{M}^3$$

したがって, 本節で示す離散時間非負システムの解析条件は, 双一次変換によって単純に導かれるものではない.

4.1 連続時間非負システムの H_∞ ノルムを特徴づける LMI

次の補題に, 文献 [12, 4] で示された連続時間非負システムの H_∞ 性能を特徴づける LMI 条件をまとめて記す.

【補題 4】 与えられたシステム $G(s) := C(sI - A)^{-1}B + D$ と $\gamma > 0$ に対して, 次の条件は等価である. ただし, $A \in \mathbb{M}^n$, $B \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}_+^{l \times n}$, $D \in \mathbb{R}_+^{l \times m}$ とする.

(BC-I) 行列 A が Hurwitz 安定でかつ $\|G\|_\infty < \gamma$ である.

(BC-II) 行列 A が Hurwitz 安定でかつ $\|G(0)\| < \gamma$ で

ある. ただし $G(0) = -CA^{-1}B + D$ である.

(BC-III) 次式を満たす $X \in \mathbb{D}_{++}^n$ が存在する.

$$\begin{bmatrix} \text{He}\{AX\} + BB^T XC^T + BD^T \\ CX + DB^T \quad DD^T - \gamma^2 I \end{bmatrix} \prec 0 \quad (12)$$

(BC-IV) 次式を満たす $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ が存在する.

$$\text{He}\{M\} \succ 0,$$

$$\begin{bmatrix} \text{He}\{AM\} + BB^T M^T C^T + BD^T \\ CM + DB^T \quad DD^T - \gamma^2 I \end{bmatrix} \prec 0 \quad (13)$$

補題 4 の (BC-II) は, 連続時間非負システムの H_∞ ノルムが定常ゲイン行列のノルムと一致することを意味している. また, (BC-IV) における LMI は, 非対称行列を解として許容するものとなっている. この条件は, パラメトリックな不確かさを有する連続時間非負システムのロバスト H_∞ 性能解析において有効であることが示されている [4, 8].

4.2 離散時間非負システムの H_∞ ノルムを特徴づける新たな LMI

本項では, 前項で示した連続時間非負システムに対して成立する結果を, 離散時間非負システムに拡張する. はじめに, 次の定理を示す.

【定理 4】 与えられたシステム $G(z) := C(z - A)^{-1}B + D$ と $\gamma > 0$ に対して, 以下の条件は等価である. ただし, $A \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}_+^{l \times n}$, $D \in \mathbb{R}_+^{l \times m}$ とする.

(BD-I) 行列 A が Schur 安定でかつ $\|G\|_\infty < \gamma$ である.

(BD-II) 行列 A が Schur 安定でかつ $\|G(1)\| < \gamma$ である.

ただし $G(1) = -C(A - I)^{-1}B + D$ である.

(BD-III) 次式を満たす $X \in \mathbb{D}_{++}^n$ が存在する.

$$\begin{bmatrix} \text{He}\{(A - I)X\} + BB^T XC^T + BD^T \\ CX + DB^T \quad DD^T - \gamma^2 I \end{bmatrix} \prec 0 \quad (14)$$

(BD-IV) 次式を満たす $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ が存在する.

$$\text{He}\{M\} \succ 0$$

$$\begin{bmatrix} \text{He}\{(A - I)M\} + BB^T M^T C^T + BD^T \\ CM + DB^T \quad DD^T - \gamma^2 I \end{bmatrix} \prec 0 \quad (15)$$

この定理の条件 (BD-II) は, 離散時間非負システムの H_∞ ノルムが定常ゲイン行列のノルムと一致することを意味している. この定理における条件 (BD-I), (BD-II) に関して, H_∞ ノルムの性質より (BD-I) $\Rightarrow$ (BD-II) が成立することは明らかである. 一方, 両者が等価であることの証明は, システム $G(z)$ がスカラシステムである場合は容易であり, 文献 [11] にはインパルス応答の非負性を用いた証明が記されている. この証明を多変数システムに拡張することも可能であると考えられるが, 本論文では 4.3 項にて, 双対 LMI に基づいた (BD-II) $\Rightarrow$ (BD-I) の証明を記す. この証明を与えることは, 離散時間非負システムの H_∞ ノルムが対角の Lyapunov 行列を解とする KYP タイプの LMI によっても特徴づけられることを明らかにできるという意義ももつ.

このようにしていったん条件 (BD-I) と (BD-II) の等価性が示されれば、条件 (BD-III), (BD-IV) との等価性は **補題 2**, **補題 4**, より明らかである。実際、**補題 2** から、条件 (BD-II) は A を $A-I$ と置き換えた条件 (BC-II) と等価であり、さらに **補題 4** から、条件 (BC-III) および (BC-IV) で A を $A-I$ と置き換えた条件とも等価となるからである。

なお、条件 (BD-II) が A を $A-I$ と置き換えた条件 (BC-II) と等価であるという上記の事実と (BD-I) $\Leftrightarrow$ (BD-II), (BC-I) $\Leftrightarrow$ (BC-II) なる関係より、係数行列を (A, B, C, D) とする離散時間非負システムと、係数行列を $(A-I, B, C, D)$ とする連続時間非負システムとは、安定性と H_∞ ノルムが等価である。したがって、(上記の等価性の証明と基本的に同じであるが) **定理 4** の条件 (BD-III), (BD-IV) は、係数行列を $(A-I, B, C, D)$ とする連続時間非負システムに **補題 4** の条件 (BC-III), (BC-IV) を適用することでただちに導かれるといえる。

定理 4 の諸条件に加え、 H_∞ ノルムを特徴づける標準的な KYP タイプの LMI を上で誘導された係数行列を $(A-I, B, C, D)$ とする連続時間システムに対して適用すると、次の条件も離散時間非負システムの H_∞ ノルムを特徴づける必要十分条件となっていることがわかる。

$$X \in \mathbb{S}_{++}^n, \quad \text{LMI (14)} \quad (16)$$

一方、(必ずしも非負とは限らない) 離散時間システムの H_∞ ノルムを特徴づける標準的な KYP タイプの LMI は

$$X \in \mathbb{S}_{++}^n, \quad \begin{bmatrix} AXA^T - X + BB^T & AXC^T + BD^T \\ CXA^T + DB^T & CXC^T + DD^T - \gamma^2 I \end{bmatrix} \prec 0 \quad (17)$$

で与えられる。これら (16) 式と (17) 式で表される二つの LMI 条件に関連して、次の結果が成立する。

【補題 5】 (17) 式を満足する $X \in \mathbb{S}_{++}^n$ は (14) 式を満足する。

(証明) (17) 式の左辺から (14) 式の左辺を引くと、任意の $X \in \mathbb{S}_{++}^n$ に対して次式が成立する。

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} (A-I)X(A-I)^T & (A-I)XC^T \\ CX(A-I)^T & CXC^T \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A-I \\ C \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} A-I \\ C \end{bmatrix}^T \succeq 0 \end{aligned}$$

したがって (17) を満足する $X \in \mathbb{S}_{++}^n$ は (14) を満足する。 $\square$

4.4 項では、この **補題 5** をもとに、ポリトープ型の不確かさを有する離散時間非負システムのロバスト H_∞ 性能解析問題を扱ううえで、**定理 4** の条件 (BD-IV) が有効となることを示す。

4.3 対角の Lyapunov 行列を解とする KYP タイプの LMI

次の定理は、離散時間非負システムの H_∞ ノルムが対角の Lyapunov 行列を解とする KYP タイプの LMI に

よって特徴づけられることを示したものであり、文献 [12] で示された連続時間非負システムに関する結果の離散時間非負システムへの拡張となっている。

【定理 5】 次の条件は、**定理 4** の条件 (BD-I) から (BD-IV) と等価である。

(BD-V) (17) 式を満たす $X \in \mathbb{D}_{++}^n$ が存在する。

以下では、(BD-II) $\Rightarrow$ (BD-V) の証明を記す。これと明らかに (BD-V) $\Rightarrow$ (BD-I) が成立することから、4.2 項で先送りとした (BD-II) $\Rightarrow$ (BD-I) の証明が完了する。これにより **定理 4** の証明も完了することに注意すれば、**定理 5** 自身も同時に証明完了となることがわかる。証明内で用いる **補題 6**, **7** は **付録 1** に示す。また、証明内では次の定義を用いる。

$$\overline{AC} := \begin{bmatrix} A & 0_{n,l} \\ C & 0_{l,l} \end{bmatrix}, \quad \overline{BD}_\gamma := \begin{bmatrix} BB^T & BD^T \\ DB^T & DD^T - \gamma^2 I \end{bmatrix}$$

(証明) (BD-II) $\Rightarrow$ (BD-V): 背理法を用いるため、いかなる $X \in \mathbb{D}_{++}^n$ に対しても (17) 式が成立しないと仮定する。このとき、分離超平面定理 [6] より次式を満足する $H \in \mathbb{S}_{++}^{n+l} \setminus \{0\}$ が存在する。

$$\text{trace} \left(H \left(\begin{bmatrix} AXA^T - X & AXC^T \\ CXA^T & CXC^T \end{bmatrix} + \overline{BD}_\gamma \right) \right) \geq 0, \quad \forall X \in \mathbb{D}_{++}^n$$

上式は次のように書き直すことができる。

$$\text{trace} \left(\left\{ \overline{AC}^T H \overline{AC} - H \right\} \begin{bmatrix} X & 0_{n,l} \\ 0_{l,n} & 0_{l,l} \end{bmatrix} \right) + \text{trace}(H \overline{BD}_\gamma) \geq 0, \quad \forall X \in \mathbb{D}_{++}^n$$

上式より以下の二つの条件がともに成立する。

$$(a1) \quad (\overline{AC}^T H \overline{AC} - H)_{ii} \geq 0 \quad (i=1, \dots, n)$$

$$(b1) \quad \text{trace}(H \overline{BD}_\gamma) \geq 0$$

ここで $\overline{AC}$ は非負行列、 $\overline{BD}_\gamma$ は Metzler 行列であるから、(a1) に **補題 6**, (b1) に **補題 7** をそれぞれ適用することにより、 $\sqrt{H_{ii}}$ を i 番目の成分とする n 次元ベクトル $\bar{h} \in \mathbb{R}_{++}^{n+l} \setminus \{0\}$ は次式を満たす。

$$(a2) \quad (\overline{AC}^T \bar{h} \bar{h}^T \overline{AC} - \bar{h} \bar{h}^T)_{ii} \geq 0 \quad (i=1, \dots, n)$$

$$(b2) \quad \text{trace}(\bar{h} \bar{h}^T \overline{BD}_\gamma) \geq 0$$

ここで $\bar{h} = [\bar{h}_1^T \ \bar{h}_2^T]^T$ ($\bar{h}_1 \in \mathbb{R}_+^n$, $\bar{h}_2 \in \mathbb{R}_+^l$) と定義すると、上記の二つの条件はそれぞれ次のように書ける。

$$(a3) \quad \bar{h}_1^T (A-I) + \bar{h}_2^T C \geq 0$$

$$(b3) \quad (\bar{h}_1^T B + \bar{h}_2^T D)(\bar{h}_1^T B + \bar{h}_2^T D)^T \geq \gamma^2 \bar{h}_2^T \bar{h}_2$$

以上より、(a3) と (b3) が成立すれば、条件 (BD-II) は決して成立しないことを示せばよい。以下これを示す。

まず

$$\bar{h}_1^T (A-I) + \bar{h}_2^T C =: \bar{g}^T \quad (18)$$

と定義すると、(a3) より $\bar{g}^T \geq 0$ である。ここで $(A-I)^{-1} \leq 0$ が成立しないとすると、**定理 3** の (SD-III) より行列 A は Schur 安定とならず条件 (BD-II) は決して成立しない。したがって、 $(A-I)^{-1} \leq 0$ の場合のみを考えればよい。このとき (18) 式と $\bar{h}_1^T \geq 0$, $\bar{g}^T \geq 0$ より次式が成立する。

$$\begin{aligned}\bar{h}_1^T &= -\bar{h}_2^T C(A-I)^{-1} + g^T \geq 0, \\ g^T &:= \bar{g}^T(A-I)^{-1} \leq 0.\end{aligned}\quad (19)$$

ここで $\bar{h}_2 = 0$ と仮定すると, 上式より $0 \leq \bar{h}_1^T = g^T \leq 0$ より $\bar{h}_1 = 0$ となる. これは $\bar{h} := [\bar{h}_1^T \bar{h}_2^T]^T \neq 0$ に矛盾する. したがって $\bar{h}_2 \neq 0$ である. さらに (19) 式より

$$\begin{aligned}\bar{h}_1^T B + \bar{h}_2^T D &= (-\bar{h}_2^T C(A-I)^{-1} + g^T)B + \bar{h}_2^T D \\ &= \bar{h}_2^T (-C(A-I)^{-1}B + D) + g^T B \\ &\leq \bar{h}_2^T G(1)\end{aligned}$$

が成立し, $\bar{h}_1^T B + \bar{h}_2^T D \geq 0$ であるから, これと (b3) より $\bar{h}_2^T G(1)G(1)^T \bar{h}_2 \geq \gamma^2 \bar{h}_2^T \bar{h}_2$ を得る. これは $\bar{h}_2 \neq 0$ より $\|G(1)\| \geq \gamma$ であり (BD-II) が成立しないことを意味している. 以上で (BD-II) $\Rightarrow$ (BD-V) が示された. $\square$

連続時間非負システムに対する条件 (BC-III) が導出された文献 [12] では, Lyapunov 行列の対角構造を利用することで, 閉ループシステムを非負とし, かつ与えられた構造上の制約を満足する H_∞ 制御器を設計できることが示されている. 同じ結果を離散時間非負システムに対して得るためには, **定理 4** の条件 (BD-III) と **定理 5** の条件 (BD-V) のいずれを利用することもでき, この目的を達成するうえで両者に差異はない. また, パラメトリックな不確かさを有する離散時間非負システムに対する, 閉ループシステムの非負性の維持を考慮したロバスト H_∞ 制御器設計問題を扱ううえでも, これら二つの LMI 条件を利用することができる. この場合には, **補題 5** より, 条件 (BD-III) を用いる方が条件 (BD-V) を用いるよりも保守的とはならないことを, 理論的に保証できる (紙面の都合上詳細は省略する). これらより, 文献 [12] の結果の離散時間非負システムへの拡張に対応する条件 (BD-V) の導出は, 非負システムの性質を明らかにしようとする本論文の理論的成果の一つであるものの, 実際の応用においては, 条件 (BD-III) で十分である場合がほとんどであると考えられる.

4.4 ロバスト H_∞ 性能解析

本項では, ロバスト H_∞ 性能解析問題を通して **定理 4** の有効性を示す. 例題として, 行列 A がポリトープ型不確かさを有する離散時間非負システムのロバスト H_∞ 性能解析問題を考える. すなわち, 非負システム (2) の係数行列 A が, 不確かなパラメータ $\alpha \in \alpha \subset \mathbb{R}^N$ と, 与えられた Schur 安定な非負行列 A_i ($i=1, \dots, N$) を用いて, 次式で表される A_α となる場合を考える.

$$A_\alpha = \sum_{i=1}^N \alpha_i A_i \quad (20)$$

また, 対応するシステムを G_α とする. 本項で考察するロバスト H_∞ 性能解析問題とは, 任意の $\alpha \in \alpha$ に対して $\|G_\alpha\|_\infty < \gamma$ を満たすような γ の下限値 γ^* を求める問題である. この問題は $\alpha \in \alpha$ の変動に応じた “無限個” のシステムの H_∞ 性能を解析する問題であり, そのため厳密に解くことは困難である. 一方 $\|G_\alpha\|_\infty < \gamma$ ($\forall \alpha \in \alpha$) が成立するための十分条件は, ポリトープのすべての端

点行列に対して, 離散時間システムの H_∞ ノルムを特徴づける標準的な LMI (17) が共通解をもつこと, あるいは **定理 4** のいずれかの LMI が共通解をもつことである. ここでは **定理 4** の条件 (BD-IV) の有効性を考察するために, 離散時間システムの H_∞ ノルムを特徴づける標準的な LMI (17) と **定理 4** の条件 (BD-IV) の LMI について考え, これらから導かれる以下の最適化問題を解くことで γ^* の上界値を求める.

$$\begin{aligned}(a) \quad & \inf_{X \in \mathbb{S}_{++}^n} \gamma \quad \text{subject to} \\ & \begin{bmatrix} A_i X A_i^T - X + B B^T & A_i X C^T + B D^T \\ C X A_i^T + D B^T & C X C^T + D D^T - \gamma^2 I \end{bmatrix} \prec 0 \\ & (i=1, \dots, N) \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned}(b) \quad & \inf_{\text{He}(M) \in \mathbb{S}_{++}^n} r \quad \text{subject to} \\ & \begin{bmatrix} \text{He}\{(A_i - I)M\} + B B^T & M^T C^T + B D^T \\ C M + D B^T & D D^T - \gamma^2 I \end{bmatrix} \prec 0 \\ & (i=1, \dots, N) \end{aligned} \quad (22)$$

ここで **補題 5** より, (21) 式の制約条件を満たす $X \in \mathbb{S}_{++}^n$ は, (22) の制約条件を ($M = X$ として) 満足する. したがって最適化問題 (a), (b) の最適値を γ_a, γ_b とすると, $\gamma_b \leq \gamma_a$ が成立する. すなわち, 条件 (BD-IV) の LMI を用いることで少なくとも悪くはない上界値が求まることを理論的に保証できる. この結果の検証のために, $N=3$ とし, 行列 A_1, A_2, A_3, B, C, D を次式で与え, 最適化問題 (a), (b) を解いた.

$$\begin{aligned}A_1 &= \begin{bmatrix} 0.1846 & 0.2661 & 0.0781 \\ 0.2580 & 0.1028 & 0.2040 \\ 0.3956 & 0.1466 & 0.1701 \end{bmatrix}, \\ A_2 &= \begin{bmatrix} 0.2127 & 0.1442 & 0.2850 \\ 0.2804 & 0.2792 & 0.1129 \\ 0.0327 & 0.0803 & 0.2696 \end{bmatrix}, \\ A_3 &= \begin{bmatrix} 0.2099 & 0.3909 & 0.1276 \\ 0.1928 & 0.1418 & 0.1707 \\ 0.2246 & 0.1667 & 0.1186 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.3941 \\ 0.5030 \\ 0.7220 \end{bmatrix}, \\ C &= [0.3062 \ 0.1122 \ 0.4433], \quad D = 0.4668\end{aligned}$$

このとき, 計算結果は $\gamma_a = 1.6395, \gamma_b = 1.6197$ となった. よって, ロバスト H_∞ 性能解析における **定理 4** の条件 (BD-IV) の有効性が確認された.

5. おわりに

本論文では, LMI を用いた離散時間非負システムの安定性と H_∞ 性能解析について考察した. 与えられた離散時間非負システムの安定性と H_∞ ノルムを保存する連続時間非負システムを構成できることを示し, 得られた連続時間非負システムに対して既存結果を適用することで, 離散時間非負システムの安定性と H_∞ 性能を特徴づける種々の有用な LMI 条件 (とくに非対称行列を解として許容する LMI 条件) を導いた. さらに H_∞ 性能解析に

においては、離散時間非負システムの H_∞ ノルムが定常ゲイン行列のノルムと一致することと、対角の Lyapunov 行列を解とする LMI によって特徴づけられることも示した。総じて、LMI に基づく連続時間非負システムの安定性、 H_∞ 性能解析に関する既存結果を、離散時間非負システムに拡張できることを明らかにした。

一方、文献 [2,3] では、 L_1 誘導ノルムを用いた連続時間非負システムの解析・設計手法が論じられている。とくに L_1 誘導ノルムを用いることで、大規模結合非負システムの安定性解析や分散安定化制御器設計に関する興味深い結果が得られている。これらの結果を離散時間システムへ拡張することは、今後の重要な研究課題である。

参考文献

- [1] C. Briat: Robust stability analysis of uncertain linear positive systems via integral linear constraints: L_1 and L_∞ -gain characterizations; *Proc. of the IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*, pp. 6337–6342 (2011)
- [2] Y. Ebihara, D. Peaucelle and D. Arzelier: L_1 gain analysis of linear positive systems and its application; *Proc. of the IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*, pp. 4029–4034 (2011)
- [3] Y. Ebihara, D. Peaucelle and D. Arzelier: Optimal L_1 -controller synthesis for positive systems and its robustness properties; *Proc. of the American Control Conference*, pp. 5992–5997 (2012)
- [4] Y. Ebihara: Dual LMI approach to linear positive system analysis; *Proc. of 12th International Conference on Control, Automation and Systems (ICCAS)*, pp. 887–891 (2012)
- [5] L. Farina and S. Rinaldi: *Positive Linear System: Theory and Applications*, John Wiley and Sons, Inc. (2000)
- [6] 岩崎：LMI と制御，昭晃堂 (1997)
- [7] T. Kaczorek: *Positive 1D and 2D Systems*, Springer (2001)
- [8] 蒲原：LMI に基づく非負システムの安定性・有界実性解析と出力フィードバック制御器設計；京都大学工学部電気電子工学科 学士論文 (2011)
- [9] 児玉，須田：システム制御のためのマトリクス理論，計測自動制御学会 (1987)
- [10] P. Lancaster and M. Tismenetsky: *The Theory of Matrices: With Applications*, Academic Press (1985)
- [11] A. Rantzer: Distributed control of positive systems; *Proc. of the IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*, pp. 6608–6611 (2011)
- [12] T. Tanaka and C. Langbort: The bounded real lemma for internally positive systems and H -infinity structured static state feedback; *IEEE Transactions*

on Automatic Control, Vol. 56, No. 9, pp. 2218–2223 (2011)

付 録

付録 1. 定理 4 の証明で用いる補題

以下では、定理 4 の証明で用いる補題を示す。

【補題 6】与えられた行列 $A \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ と $H \in \mathbb{S}_+^n$ に対して、次式が成り立つ。

$$(A^T \bar{h} \bar{h}^T A - \bar{h} \bar{h}^T)_{ii} \geq (A^T H A - H)_{ii} \quad (i=1, \dots, n)$$

ただし $\bar{h} \in \mathbb{R}_+^n$ は $H \in \mathbb{S}_+^n$ をもとに次式で定義される。

$$\bar{h}_i = \sqrt{H_{ii}}, \quad (i=1, \dots, n) \quad (\text{A1})$$

(証明) まず，明らかに $(\bar{h} \bar{h}^T)_{ii} = H_{ii}$ が成立し，さらに $H \in \mathbb{S}_+^n$ であるから $(\bar{h} \bar{h}^T)_{ij} \geq H_{ij} \quad (i \neq j)$ が成立する。とくに $\bar{h} \bar{h}^T - H \geq 0$ である。したがって次式が成り立つ。

$$(A^T \bar{h} \bar{h}^T A - \bar{h} \bar{h}^T)_{ii} - (A^T H A - H)_{ii} = (A^T (\bar{h} \bar{h}^T - H) A)_{ii} \geq 0 \quad \square$$

【補題 7】[4] 与えられた行列 $A \in \mathbb{M}^n$ と $H \in \mathbb{S}_+^n$ に対して、次式が成り立つ。

$$(\bar{h} \bar{h}^T A)_{ii} \geq (H A)_{ii} \quad (i=1, \dots, n) \quad (\text{A2})$$

ただし $\bar{h} \in \mathbb{R}_+^n$ は (A1) 式で定義される。

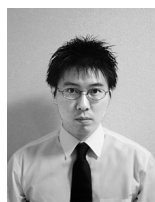
著 者 略 歴

まつむら たいき
松村 大 貴



2012 年 3 月京都大学工学部電気電子工学科卒業。同年 4 月同大学大学院工学研究科電気工学専攻修士課程に進学し，現在に至る。

えびはら よしお
蛭原 義 雄 (正会員)



2002 年 3 月京都大学大学院工学研究科電気工学専攻博士後期課程修了。同年 4 月京都大学大学院工学研究科助手，2006 年同研究科講師，2010 年同研究科准教授となり現在に至る。数値最適化手法を用いた制御系の解析，設計に関する研究に従事。京都大学博士 (工学)。計測自動制御学会，日本鉄鋼協会，IEEE などの会員。

はぎわら ともみち
萩原 朋 道 (正会員)



1986 年京都大学大学院工学研究科修士課程修了。同年京都大学工学部助手，1991 年助教授，改組に伴い，京都大学大学院工学研究科電気工学専攻助教授を経て，2001 年より教授。サンプル値制御理論，2 自由度制御系の設計法などの研究に従事。京都大学工学博士。計測自動制御学会，電気学会，IEEE などの会員。