

Verlinde 公式の幾何学^{*}

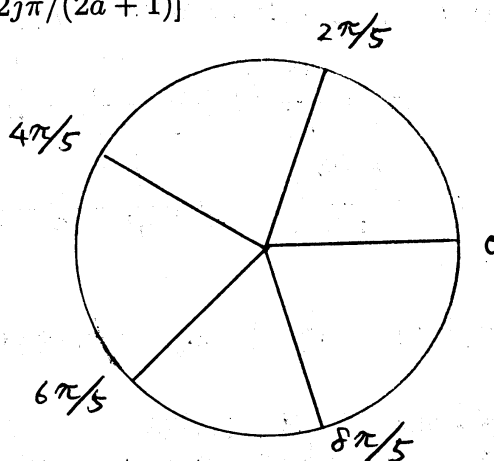
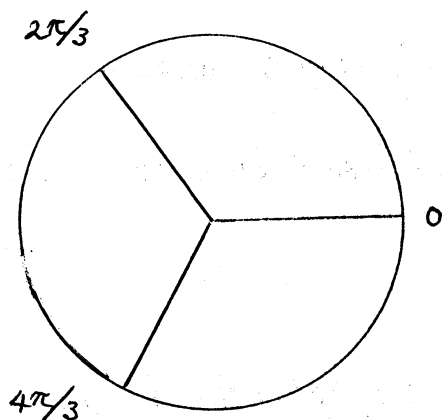
名大多元数理科学研究科 向井 茂(Shigeru Mukai)
Graduate School of Mathematics, Nagoya University

Verlinde 公式と呼ばれるものの一つに次がある.

$$\dim H^0(\mathcal{N}_{0,n}, \mathcal{O}(-aK)) = \frac{1}{2a+1} \sum_{j=0}^{2a} \frac{(-1)^{nj}}{\sin^{n-2}[(2j+1)\pi/(4a+2)]} \quad (1)$$

ただし, $a \geq 0$ は整数である.¹ 右辺は余弦を使って次のようにも表される.

$$\frac{(-1)^{an}}{2a+1} \sum_{j=0}^{2a} \frac{1}{\cos^{n-2}[2j\pi/(2a+1)]}$$



$$a=1 \quad \dim = (2^{n-1} \pm 1)/3, \quad a=2 \quad \dim = [2(1 + \sqrt{5})^{n-2} + 2(1 - \sqrt{5})^{n-2} + 1]/5$$

a, n が小さいときの値は次の通りである.²

$a \backslash n$	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	3	5	11	21	43	85	171	341
2	1	5	13	45	141	461	1485	4813	15565
3	1	7	25	119	521	2359	10569	47543	213577
4	1	9	41	249	1401	8121	46649	268857	1547833
5	1	11	61	451	3101	21923	153693	1080739	7592029

この公式に興味をもつ理由からいくつかを拾ってみる.

¹ n が偶数のとき a は半整数でもよく, 例えば, $\dim H^0(\mathcal{O}(-K/2)) = \sqrt{2}^{n-2}$ を得る.

²谷川好男氏に負う.

※短期共同研究「組合せ論的表現論をめぐる話題」(2000年10月30日~11月2日)における講演の報告. 筆者の現在の所属は京都大学数理解析研究所.

1. まず、美しい式である。左辺はベクトル空間の次元で当然ながら自然数である。右辺は Galois 理論より有理数であることはわかるが、整数性や正であることは自明ではない。
2. 左辺の $\mathcal{N}_{0,n}$ はあるモジュライ空間であるが、この公式の良い証明はモジュライ理論の発展を促すだろう。
3. モジュライ空間 $\mathcal{N}_{0,n}$ は複素 Grassmann 多様体とどことなく似ている。
4. 組合せ論的にも面白そうだ。
5. 整数論とも関係しそうだ。

実際、公式 (1) の両辺の増大度は a^{n-3} であるが、その係数を右辺において計算すると

$$\frac{2^{n-1}}{\pi^{n-2}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{nj}}{(2j+1)^{n-2}}$$

となる。これを $(n-3)!$ 倍したものは正整数である。これを E_{n-3} で表そう。³ n が奇数のとき、Euler 数と呼ばれ、無限級数は導手 4 の Dirichlet L 関数 $L(s) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j (2j+1)^{-s}$ の正整数点 $s = n-2$ における特殊値である。⁴ 例えば、

$$E_6 = \frac{6!2^8}{\pi^7} \left(1 - \frac{1}{3^7} + \frac{1}{5^7} - \frac{1}{7^7} + \frac{1}{9^7} - \dots \right) = 61.027 \times 0.9955 = 61$$

$$E_8 = \frac{8!2^{10}}{\pi^9} \left(1 - \frac{1}{3^9} + \frac{1}{5^9} - \frac{1}{7^9} + \frac{1}{9^9} - \dots \right) = 1385.07 \times 0.9999497 = 1385$$

である。⁵

§1. 公式 (1) に戻って、 $\mathcal{N}_{0,n}$ について説明しよう。

代数多様体として 詳しくは説明できないが、 $\mathcal{N}_{0,n}$ は n 点付き射影直線 $(\mathbf{P}^1 : p_1, \dots, p_n)$ 上の階数 2 の (半) 安定準放物的ベクトル束のモジュライ空間である。これは $n-3$ 次元準射影的代数多様体になる。また、 $\mathcal{O}(-K)$ はその接ベクトル束の行列式直線束で、 H^0 は直線束の大域切断全体のなす (有限次元) ベクトル空間を表す。 (最高次外積)

³Riemann-Roch 公式より、 $n-3$ 次元モジュライ $\mathcal{N}_{0,n}$ の次数である。

⁴関数等式

$$L(1-s) = \Gamma(s) \left(\frac{\pi}{2} \right)^{-s} \sin \frac{\pi s}{2} L(s)$$

より、負整数点 $s = 3-n$ での特殊値とも思える。実際、Abel の総和法でもって次が成立する。

$$E_{n-3} = (-1)^{(n-3)/2} 2(1 - 3^{n-3} + 5^{n-3} - 7^{n-3} + 9^{n-3} - \dots)$$

⁵ n が偶数のとき、 E_{n-3} は正接数 (tangent number) と呼ばれる。例えば、

$$E_5 = \frac{5!2^7}{\pi^6} \left(1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \frac{1}{9^6} + \dots \right) = 15.97688 \times 1.001447 = 16$$

で、一般に m が偶数で B_m を Bernoulli 数とすると、 $E_{m-1} = 2^m(2^m - 1)B_m/m$ である。

微分多様体として まず $n-1$ 元生成自由群 F_{n-1} の $SU(2)$ 表現の同値類全体 $\tilde{\mathcal{N}}_{0,n}$ を考える. これは 2 次特殊ユニタリ群⁶

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} \middle| a^2+b^2+c^2+d^2=1, a,b,c,d \in \mathbf{R} \right\}$$

の $n-1$ 個の直積を $SU(2)$ の共役で割ったものである. ここから $\mathbf{R}^n$ への写像

$$(A_1, \dots, A_{n-1}) \mapsto (\text{Trace } A_1, \dots, \text{Trace } A_{n-1}, \text{Trace } A_n) \in [-1, 1]^n$$

のファイバー (逆像) を $\mathcal{N}_{0,n}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ で表す. ただし,

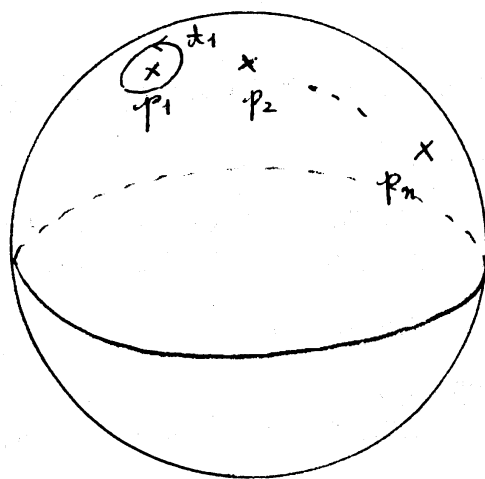
$$A_n = A_{n-1}^{-1} \cdots A_2^{-1} A_1^{-1}$$

とおいた. 特に, 原点の逆像を $\mathcal{N}_{0,n}$ で表す.

幾何的には F_{n-1} を Riemann 球面から n 点 $p_1, \dots, p_n$ を除いたものの基本群とみる. この基本群は各点をまわる閉道 $t_1, \dots, t_n$ で生成され, それらの間の関係は $\prod_{i=1}^n t_i = 1$ である. よって, $\mathcal{N}_{0,n}$ は各点での局所モノドロミーの位数が 4 であるような 2 次特殊ユニタリ表現の同値類のパラメータ空間である.

$$\dim_{\mathbf{R}} \mathcal{N}_{0,n} = \dim_{\mathbf{R}} \tilde{\mathcal{N}}_{0,n} - n = 3(n-1) - 3 - n = 2(n-3)$$

であるが, $\mathcal{N}_{0,n}$ には複素構造が入る.



基本群の表現
↓
 $SU(2)$

穴あき Riemann 球

$$\rho(t_j) \sim \begin{pmatrix} i & \\ & -i \end{pmatrix}, \quad 1 \leq \forall j \leq n$$

n が偶数のときは可約な表現, 例えば,

$$A_1 = A_3 = \cdots = A_{n-1} = \begin{pmatrix} i & \\ & -i \end{pmatrix}, \quad A_2 = A_4 = \cdots = A_n = \begin{pmatrix} -i & \\ & i \end{pmatrix}$$

⁶長さ 1 の 4 元数 $a+bi+cj+dk$ の全体とも思える.

が 2^{n-2} 個存在する。しかし、奇数のときは存在しないので、 $\mathcal{N}_{0,n}$ は非特異である。以下、 $n = 2g + 1$ とおいて、この場合を考える。

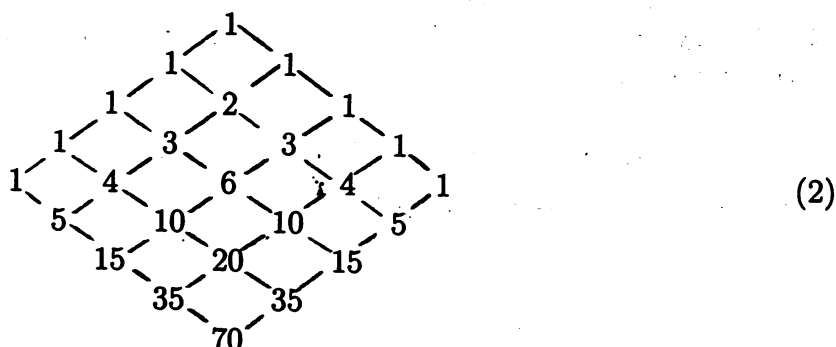
§2. $\mathcal{N}_{0,2g+1}$ は次の点で複素 Grassmann 多様体 $G(2, g+1)$ と似ている。

- 共に次元は $2g - 2$ である。
- $\mathcal{N}_{0,2g+1}$ のコホモロジー環は $G(2, g+1)$ のコホモロジー環と同じ Poincaré 級数

$$\frac{(1-t^g)(1-t^{g+1})}{(1-t)(1-t^2)}$$

をもつ部分環を含む。

この辺の状況を説明するために、Pascal 3 角形の話をしてしよう。次の図は説明するまでもないだろう。



最下段の70は $(x+y)^8$ の x^4y^4 の係数である。多項式環 $\mathbb{Z}[x, y]$ とイデアル $I = (x^5, y^5)$ を使うと

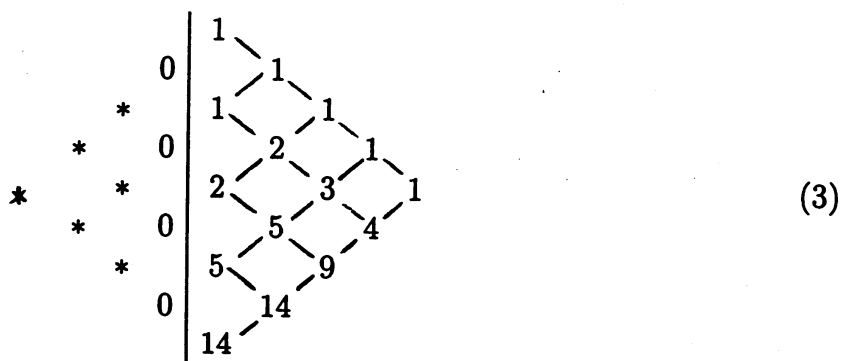
$$(x+y)^8 \equiv 70x^4y^4 \pmod{I}$$

と表される。言い換えると、剰余環 $\mathbb{Z}[x, y]/I$ の中で $(x+y)^8 = 70x^4y^4$ が成立する。この剰余環は二つの射影空間の直積 $\mathbb{P}^4 \times \mathbb{P}^4$ のコホモロジー環と同型である。よって、Segre 埋め込み

$$\mathbb{P}^4 \times \mathbb{P}^4 \subset \mathbb{P}^{24} \quad ((x_i), (y_j)) \mapsto (x_i y_j)_{1 \leq i, j \leq 5}$$

の次数が70であるというのが上の等式の一つの幾何的解釈である。

次に Pascal の規則はそのままにして、左半分を捨てた（境界を零と思う）ものを考えよう。



このときに、中心に表れる数

$$1, 1, 2 = \frac{4!}{2!3!}, 5 = \frac{6!}{3!4!}, 14 = \frac{8!}{4!5!}, \dots \quad \text{一般に } \frac{(2g-2)!}{(g-1)!g!}$$

は Catalan 数と呼ばれるもので、幾何的には Plücker 座標によって埋め込まれた Grassmann 多様体

$$G(2, g+1) \subset \mathbf{P}^{(g-1)(g+2)/2}$$

の次数に等しい。例えば、8次元の場合

$$14 = \deg[G(2, 6) \subset \mathbf{P}^{14}] \quad (4)$$

である。このことは $G(2, 6)$ のコホモロジー環が2変数多項式環の剰余環

$$H^*(G(2, 6), \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}[A, B]/(s_5(A, B), s_6(A, B))$$

であることと上の Pascal 3 角形 (3) より従う。ただし、 $s_n(A, B)$ は

$$\frac{1}{1 - At + Bt^2} = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(A, B)t^n$$

で定義される多項式で、例えば、

$$s_1 = A, s_2 = A^2 - B, s_3 = A^3 - 2AB, s_4 = A^4 - 3A^2B + B^2, \dots$$

である。漸化式

$$s_{n+1} - As_n + Bs_{n-1} = 0 \quad (5)$$

より得られる⁷ Pascal 3 角形

$$\begin{array}{ccccccc} & & B^4 & & & & \\ & & / \quad \backslash & & & & \\ & A^2B^3 & - & As_1B^3 & - & A^2s_2B^2 & \\ & / \quad \backslash & & / \quad \backslash & & / \quad \backslash & \\ A^4B^2 & - & A^3s_1B^2 & - & A^4s_2B & - & A^3s_3B \\ & / \quad \backslash & & / \quad \backslash & & / \quad \backslash & \\ A^6B & - & A^5s_1B & - & A^4s_2B & - & A^5s_3 \\ & / \quad \backslash & & / \quad \backslash & & / \quad \backslash & \\ & A^7s_1 & - & A^6s_2 & - & A^5s_3 & \\ & & & & & & A^4s_4 \end{array} \quad (6)$$

と (3) を比較して、

$$A^8 \equiv 14B^4 \pmod{(s_5(A, B), s_6(A, B))}$$

を得るが、これに少し幾何的考察を加えることにより (4) が得られる。

§3. モジュライ空間 $\mathcal{N}_{0,2g+1}$ のコホモロジー環も似た構造の部分環を含む。すなわち、

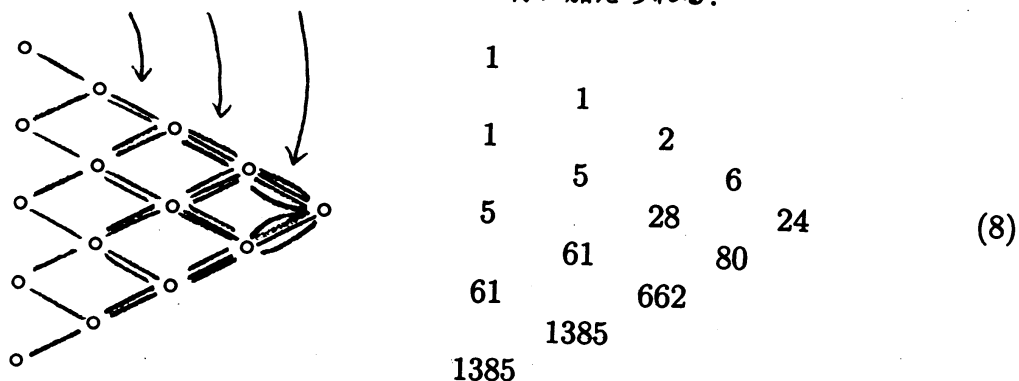
$$H^*(\mathcal{N}_{0,2g+1}, \mathbf{Q}) \supset \mathbf{Q}[A, B]/(\xi_g(A, B), \xi_{g+1}(A, B))$$

⁷例えば、 $A^5s_3 - A^6s_2 + A^5s_1B = 0$ 。

が成立する。ただし、 $\xi_n(A, B)$ は (5) の係数を少し変更した漸化式

$$(n+1)\xi_{n+1} - A\xi_n + nB\xi_{n-1} = 0, \quad \xi_n = 0 (n < 0) \quad (7)$$

より定まる $\mathbb{Q}$ 係数多項式である。この係数変更により、Pascal 3 角形の規則が変わり、中心から離れる毎に、1 倍、2 倍、3 倍、4 倍...されて下の行に加えられる。⁸

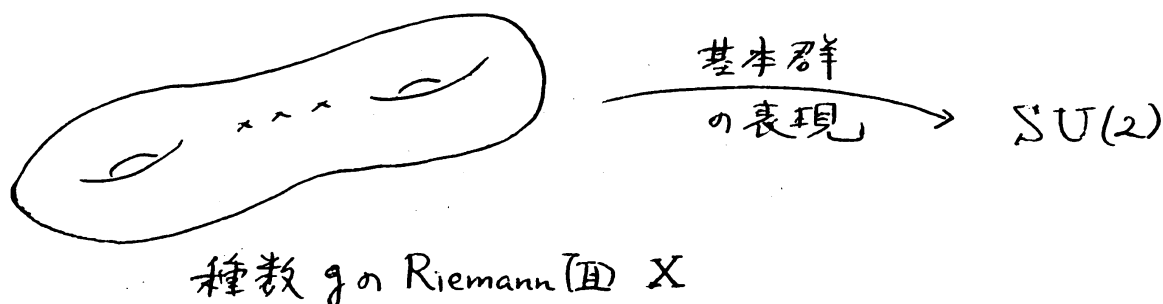


この変形 Pascal 3 角形は [1] において、Euler 数を計算するのに使っているものと一致する。よって、モジュライ空間の次数が Euler 数、例えば、8 次元の $\mathcal{N}_{0,11}$ の次数が $1385 = E_8$ であることが従う。

この状況は、種数 g のコンパクト Riemann 面 X の表現空間 $\mathcal{N}_{g,0}$ にも共通している。⁹ これは次元が $3g-3$ で、Grassmann 多様体 $G(3, g+2)$ と似ている。適当な多項式 $\xi_n(A, B, C)$ に対して

$$H^*(\mathcal{N}_{g,0}, \mathbb{Q}) \supset \mathbb{Q}[A, B, C] / (\xi_g(A, B, C), \xi_{g+1}(A, B, C), \xi_{g+2}(A, B, C))$$

が成立する ([5], 拙著 [2] 第 11 章を参照)。まだ整理ができないのでここで紹介できないが、「変形 Pascal 4 面体」を用いて、この次数が計算でき、そこに Bernoulli 数が出現する。

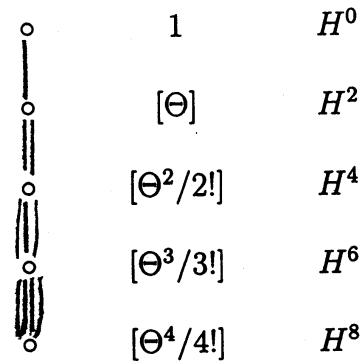


§4. 似た現象を探すと、 X の Jacobi 多様体のコホモロジー環のテータ因子 Θ で生成される部分

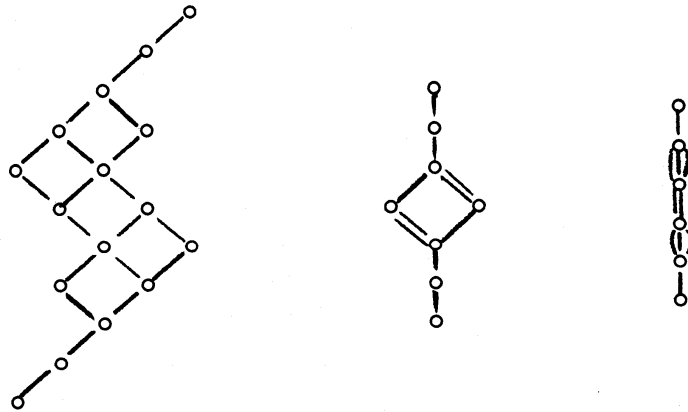
⁸例えば、3 列目の 28 は 2 列目の 5 の 2 倍と 4 列目の 6 の 3 倍を足したもの。

⁹モジュライには偶奇の 2 種類があるが、ここでは $\mathcal{N}_{g,0}^-$ の方を考えている。

は次の構造をもっていることに気付く.



Grassmann 多様体は等質空間であるが, 他の等質空間のコホモロジー環の構造もよく知られている. 例えば,



は10次元直交 Grassmann 多様体 $SO(10, \mathbf{R})/U(5)$, 6次元シンプレクティック Grassmann 多様体と G_2 多様体のコホモロジー環の Hasse 図である (例えば, [4]).¹⁰ このように2重線, 3重線, ... が現れるのはアフィンLie環の等質空間のコホモロジー環の特徴でもあることを最後に注意しておく.

参考文献

- [1] Knuth, D.E. and Buckholtz, J.: Computation of tangent, Euler, and Bernoulli numbers, Math. Comp. **21**(1967), 663-688.
- [2] 向井 茂: モジュライ理論 I, II, 岩波書店, 東京, 1998, 2000.
- [3] —: Fano 多様体論の新展開, 数学, 47巻 (1995), 125-144.
- [4] Hiller, H.: Combinatorics and intersections of Schubert varieties, Comment. Math. Helv. **57**(1982), 41-59.

¹⁰通常の Grassmann $G(2, 6)$ とこれらは3次元 Fano 多様体の分類に現れる ([3]).

- [5] Zagier, D.: On the cohomology of moduli spaces of rank two vector bundles over curves, in *The moduli space of curves*, R. Dijgraaf, et. al (eds), Birkhauser, 1995, pp. 533-563.