

ある非線形熱方程式の爆発解について On blowup solutions to a nonlinear heat equation

九州工業大学・工学研究院 仙葉 隆 (Takasi Senba)
Faculty of Engineering, Kyushu Institute of Technology

1. 序

以下の方程式系の解の挙動について述べる。

$$(PE) \begin{cases} u_t = \nabla \cdot (\nabla u - u \nabla H(u)) & \text{in } \mathbf{R}^2 \times [0, \infty), \\ u(\cdot, 0) = u_0 \geq 0 & \text{in } \mathbf{R}^2. \end{cases}$$

ここで u_0 は $\mathbf{R}^2$ 上の滑らかな非負関数とし、 $\mathbf{R}^2$ 上の関数 w に対して $H(w)$ を以下の様に定義する。

$$H(w)(x) = \begin{cases} \int_{\mathbf{R}^2} \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{|x-y|} w(y) dx \\ \quad ((1 + |\log(1 + |x|)|)w \in L^1(\mathbf{R}^2) \cap L^\infty(\mathbf{R}^2) \text{ の場合}), \\ - \int_0^{|x|} \frac{1}{2\pi \tilde{r}} \int_{|\tilde{x}| < \tilde{r}} v(\tilde{x}) d\tilde{x} \quad (w \text{ が球対称の場合}). \end{cases}$$

このとき $H(u)$ は $\mathbf{R}^2$ 上の楕円型方程式 $-\Delta H(v) = v$ の解となる。 u_0 に適当な条件を付けると (PE) は一意的に時間局所的な古典解を持つ。 T はその最大存在時刻とする。従って $T \in (0, \infty)$ 、または $T = \infty$ である。

(PE) は Keller-Segel 方程式を単純化した方程式として知られている。Keller-Segel 方程式は細胞性粘菌の集中現象を記述するモデル方程式であり、そのモデルにおいて u は粘菌の密度を表している。また、次節で述べる様に u_0 が無限遠方で十分速く 0 に減衰しているとき (PE) の解の L^1 は時刻 t に対して不変であり、その L^1 が十分に大きいとき解が爆発する事が知られている。つまり、解 u の積分量が集中する形で爆発する事がわかる。この事と粘菌の集中現象とが対応すると考えられる。

本稿では解の爆発と時間大域的存在、そして詳しい解の挙動について述べる。

2. 解の定義と基本的な性質

本稿では (PE) の古典解について述べるが、特に以下の性質を持つ解を対象とする。

$$u(x, t) \geq 0 \quad \text{in } \mathbf{R}^2 \times (0, T). \quad (1)$$

$$\|u(\cdot, t)\|_\infty = \sup_{x \in \mathbf{R}^2} |u(x, t)| < \infty \quad \text{for } t \in (0, T). \quad (2)$$

$$\int_{\mathbf{R}^2} u(x, t) dx = \int_{\mathbf{R}^2} u_0(x) dx \quad \text{for } t \in (0, T). \quad (3)$$

$\mathbf{R}^2$ 上の非負関数 u_0 が適当な条件を満たせば、対応する解が性質 (1)、(2)、(3) を満たす。たとえば、 u_0 が

$$(1 + |x|^2)u_0(x) \in L^1(\mathbf{R}^2) \cap L^\infty(\mathbf{R}^2) \quad (4)$$

を満たせば対応する解は性質 (1)、(2)、(3) を満たす。本稿では性質 (1)、(2)、(3) を満たす古典解を対象とし単に解と呼ぶ。従って、 T はその意味での解の最大存在時刻とする。また、

$$\lambda = \int_{\mathbf{R}^2} u_0(x) dx$$

とおく。

初期関数 u_0 が (4) を満たすとき対応する解は以下を満たす。

$$\int_{\mathbf{R}^2} u(x, t) |x|^2 dx = \int_{\mathbf{R}^2} u_0(x) |x|^2 dx + 4\lambda \left(1 - \frac{\lambda}{8\pi}\right) t \quad (t \in [0, T)). \quad (5)$$

$$\int_{\mathbf{R}^2} x u(x, t) dx = \int_{\mathbf{R}^2} x u_0(x) dx \quad (t \in [0, T)).$$

上の性質から任意の $\mathbf{R}^2$ 上の点 x_0 に対して以下が成り立つ事がわかる。

$$\int_{\mathbf{R}^2} u(x, t) |x - x_0|^2 dx = \int_{\mathbf{R}^2} u_0(x) |x - x_0|^2 dx + 4\lambda \left(1 - \frac{\lambda}{8\pi}\right) t \quad (t \in [0, T)).$$

u_0 がさらに $u_0 \log u_0 \in L^1(\mathbf{R}^2)$ を満たすとき対応する解 u が以下を満たす。

$$F(u(\cdot, t)) = \int_{\mathbf{R}^2} (u(x, t) \log u(x, t) - \frac{1}{2} |\nabla H(u)|^2) dx \leq F(u_0) \quad (t \in [0, T)).$$

全ての $a > 0$ に対して以下で定義される関数 u_a は (PE) の定常解となる。

$$u_a(x) = \frac{8a}{(a + |x|^2)^2}.$$

そして u_a は以下を満たす。

$$\int_{\mathbf{R}^2} u_a(x) dx = 8\pi \quad \text{for } a > 0.$$

3. 先行結果

この節では先行結果について紹介する。そのために以下の様に解の爆発を定義する。

定義 1 定数 $T \in (0, \infty)$ に対して (PE) の解 u が

$$\limsup_{t \rightarrow T} \sup_{x \in \mathbf{R}^2} |u(x, t)| = \infty$$

を満たすとき、解 u が有限時刻爆発すると言う。

(PE) の解 u が

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbf{R}^2} |u(x, t)| = \infty$$

を満たすとき、解 u が無限時刻爆発すると言う。

(PE) の解は解の L^1 ノルム λ の大きさによってその挙動が異なる。その閾値は 8π である。

$\lambda > 8\pi$ の場合。

この場合、解 u は有限時刻爆発する。簡単な考察によりわかるのでその概略を以下で述べる。

解が時間大域的に存在し得ない事は (5) よりわかる。つまり 解の時間大域的に存在したとすると $\lambda > 8\pi$ と (5) より

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{R}^2} |x|^2 u(x, t) dx = -\infty$$

が成り立つが、この事は (1) と矛盾する。従って、解の最大存在時刻 T は有限である事がわかる。このときもし

$$\sup_{(x, t) \in \mathbf{R}^2 \times [0, T)} |u(x, t)| < \infty$$

が成り立っていたら、放物型方程式の基本的な手法 (parabolic regularity argument) を用いて解が時刻 T を超えて延長できる事がわかる。これは解の最大存在時刻を T とした事に矛盾する。従って解は有限時刻 T で爆発する事がわかる。

$\lambda < 8\pi$ の場合。

- u_0 が球対称の場合は無限遠方に関する仮定 (4) が無くても時間大域的に唯一の解が存在し有界となる。([2])
- u_0 が球対称とは限らない場合は u_0 が (4) と

$$u_0 |\log u_0| \in L^1(\mathbf{R}^2) \quad (1)$$

を満たせば時間大域的に存在する解がある。([5])

$\lambda = 8\pi$ の場合。

- u_0 が球対称な場合は時間大域的に唯一の解が存在する。([2])
- u_0 が球対称とは限らない場合は (4), (1)) を満たせば無限時刻爆発する解が存在する。([4])
- 有界な円板 D 上における方程式 (1) に対して L^1 ノルムを保存する境界条件を課したとき

$$\sup_{x \in D} |u(x, t)| = O(e^{\sqrt{2}t}) \quad \text{as } t \rightarrow \infty$$

を満たす様な無限時刻爆発解が存在する。([8])

3. 主結果

([8]) は有界な円板上で爆発のオーダーが確定できる形で無限時刻爆発解を構成した。ここでは、 $\mathbf{R}^2$ における (1) の球対称な無限時刻爆発を爆発のオーダーを含めて構成した結果を述べる。

定理 1 正の定数 C と K に対して以下を満たす時間大域的な (PE)

の球対称解が存在する。

$$(i) \quad u(x, t) > 0 \quad ((x, t) \in \mathbf{R}^2 \times (0, \infty)).$$

$$(ii) \quad x \cdot \nabla u(x, t) \leq 0 \quad ((x, t) \in \mathbf{R}^2 \times (0, \infty)).$$

$$(iii) \quad \int_{\mathbf{R}^2} u(x, t) dx = 8\pi \quad (t \in [0, \infty)).$$

$$(vi) \quad u(x, t) \leq \frac{C}{t|x|^2} \exp\left(-\frac{|x|^2}{8t}\right) \quad (|x| \leq 1/\sqrt{t}, t \gg 0).$$

$$(v) \quad \left| u(x, t) - \frac{8(\log t)^2}{K} \left\{ 1 + \left(\frac{(\log t)^2 |x|}{K} \right)^2 \right\}^{-2} \right| \\ \leq C(\log t) \left\{ 1 + \left(\frac{(\log t)^2 |x|}{K} \right)^2 \right\}^{-2} \quad (|x| \leq 1/\sqrt{t}, t \gg 0).$$

定理 1 で述べた解は無限時刻爆発解となっており、爆発のオーダーは

$$\sup_{x \in \mathbf{R}^2} u(x, t) = u(0, t) = \frac{8(\log t)^2}{K} (1 + o(1)) \quad (t \rightarrow \infty)$$

となっている。

これに対して、高次元の場合には以下の様に無限種類の爆発のオーダーが見つかった。

定理 2 N を 11 以上の自然数、 J を 1 以上の自然数とし、 μ と a_J を以下の様に定める。

$$\nu = \frac{-(N+2) + \sqrt{(N-10)(N-2)}}{4}, \quad a_J = \frac{N+2J+6\nu+4}{-2\nu-2} > 0.$$

このとき、以下を満たす $\mathbf{R}^N$ 上の (1) の球対称な無限時刻爆発解が存在する。

$$\sup_{|x| \geq 1, t \in [0, \infty)} (1 + |x|^2) u(x, t) < \infty.$$

$$ct^{a_J} \leq \sup_{x \in \mathbf{R}^N} u(x, t) \leq Ct^{a_J} \quad (t \gg 1)$$

ただし、 c と C は正定数である。

4. 定理 1 の証明の概略

この節では定理 1 の証明の概略を述べる。

変数変換

解を構成するために以下の新たな変数と関数を導入する。

$$m(y, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{|x| < r} u(x, t) dx, \quad \psi(y, s) = \int_0^y e^{\tilde{y}^2/4} (m(\tilde{y}, s) - 4) \tilde{y} d\tilde{y}.$$

$$y = \frac{r}{\sqrt{t+1}}, \quad s = \log(t+1).$$

u が (1) 解であるとき、関数 m と ψ は以下を満たす。

$$\psi_s = \left[\psi_{yy} + \left(\frac{1}{y} - \frac{y}{2} \right) \psi_y - \psi \right] + \frac{1}{2} e^{-y^2/4} \left(\frac{\psi_y}{y} \right)^2 = \mathcal{A}\psi + F.$$

$$F(y, s) = \frac{1}{2} e^{-y^2/4} \left(\frac{\psi_y}{y} \right)^2 = \frac{1}{2} e^{-y^2/4} \left(e^{y^2/4} (m(y, s) - 4) \right)^2.$$

接合漸近展開法

u が我々が期待する解となる様に上記の関数 ψ を構成する。解を構成するために接合漸近展開法と呼ばれる方法を用いる。その概略は以下の通りである。

$\lim_{s \rightarrow \infty} \varepsilon(s) = 0, \varepsilon(s) > 0 (s > 0)$ を満たす s の正值関数 $\varepsilon(s)$ を導入する。 $\varepsilon(s)$ を用いて領域 $0 < y < \infty$ を内部領域 ($0 < y < \sqrt{\varepsilon(s)}$) と外部領域 ($\varepsilon(s) \geq \sqrt{\varepsilon(s)}$) に分ける。以下で述べる要領で内部領域、外部領域における関数 ψ を構成し、さらに境界 $y = \sqrt{\varepsilon(s)}$ でそれらが一致する様に決める事で ψ と $\varepsilon(s)$ を定める。

内部領域における解

内部領域における解を定常解を用いて構成する。定常解は

$$\bar{u}_a(x) = \frac{8a^2}{(|x|^2 + a^2)^2} \quad (a > 0)$$

で与えられ

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|x| < r} u_a(x) dx = \frac{4r^2}{r^2 + a^2} \rightarrow 4 \quad (r \rightarrow \infty)$$

を満たす。そこで関数 m を

$$m(y, s) = \frac{4y^2}{y^2 + \varepsilon(s)^2} (1 + o(1)) \quad (0 < y \leq \varepsilon(s)^{1/2})$$

と定める。このとき対応する関数 ψ は

$$\begin{aligned} \psi(y, s) &= \int_0^y e^{\tilde{y}^2/4} (m - 4) \tilde{y} d\tilde{y} = \int_0^y \frac{2\varepsilon(s)^2 \tilde{y} d\tilde{y}}{y^2 + \varepsilon(s)^2} (1 + o(1)) \\ &= -2\varepsilon(s)^2 \log \left(1 + \frac{y^2}{\varepsilon(s)^2} \right) (1 + o(1)) \quad (0 < y < \sqrt{\varepsilon(s)}) \end{aligned}$$

を満たす。

外部領域における解

外部領域において関数 m が

$$m(y, s) - 4 = O(1) \frac{\varepsilon(s)^2}{y^2 + \varepsilon(s)^2} e^{-y^2/4}$$

である様に定める。以下が成り立つ。

$$\begin{aligned} F(y, s) &= \frac{1}{2} e^{-y^2/4} \left(\frac{\psi_y}{y} \right)^2 = \frac{1}{2} e^{-y^2/4} \left\{ e^{y^2/4} (m(y, s) - 4) \right\}^2 \\ &= \begin{cases} (1 + o(1)) \frac{8\varepsilon(s)^4}{(y^2 + \varepsilon(s)^2)^2} & (\text{内部領域}), \\ O(1) \frac{8\varepsilon(s)^4}{(y^2 + \varepsilon(s)^2)^2} e^{-y^2/4} & (\text{外部領域}). \end{cases} \end{aligned}$$

この事と $\lim_{s \rightarrow \infty} \varepsilon(s) = 0$ より、任意の関数 $\rho \in C([0, \infty)) \cap L^\infty((0, \infty))$ に対して

$$\int_0^\infty F(y, s) \rho(y) y dy = 4\varepsilon(s)^2 (1 + o(1)) \rho(0) \quad (s \rightarrow \infty)$$

が成り立つ。従って、関数 ψ はほとんど

$$\psi_s - \mathcal{A}\psi = 4\varepsilon(s)^2 \mathcal{D}_0(y) \quad (y \geq \sqrt{\varepsilon(s)}, s \gg 1)$$

を満たす。ここで $\mathcal{D}_0$ は任意の関数 $\rho \in C([0, \infty)) \cap L^\infty((0, \infty))$ に対して

$$\int_0^\infty \rho(y) \mathcal{D}_0(y) y dy = \rho(0)$$

を満たす $[0, \infty)$ 上の測度であり $\mathbf{R}^2$ の原点にサポートを持つ重さ 2π のデルタ関数 $2\pi\delta_0$ に対応する。

さらに作用素 A のヒルベルト空間

$$H = \left\{ f \in L^2_{loc}((0, \infty)) : \|f\|^2 = \int_0^\infty |f(y)|^2 y e^{-y^2/4} dy < \infty \right\}.$$

における第一固有値は -1 でありヒルベルト空間 H のノルムで正規化された固有関数は $\varphi_0(y) \equiv 1/\sqrt{2}$ である事から ψ の主要部 $a_0\varphi$ である事が期待され、 a_0 と $Q = \psi - a_0\varphi_0$ はおおよそ以下を満たす事が期待される。

$$|Q(y, s)| \ll |a_0(s)\varphi_0(y)| \quad (s \rightarrow \infty).$$

$$a_0(s)' = -a_0(s) + 4\varepsilon(s)^2 \langle \varphi_0, \mathcal{D}_0 \rangle.$$

$$Q_s = \mathcal{A}Q + 4\varepsilon(s)^2 (\mathcal{D}_0 - \langle \varphi_0, \mathcal{D}_0 \rangle \varphi_0).$$

$$\langle Q(\cdot, s), \varphi_0 \rangle = 0.$$

ここで、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ はヒルベルト空間 H の内積である。さらに、関数 Q に対して $Q_s = o(1)$ を期待すると関数 Q は

$$\mathcal{A}G + (\mathcal{D}_0 - \langle \varphi_0, \mathcal{D}_0 \rangle \varphi_0) = 0,$$

を満たす関数 G をもちいて

$$Q(y, s) = 4\varepsilon(s)^2 G(y)$$

と表される。このとき関数 G は以下の様に表される。

$$\begin{aligned} G(y) &= e^{y^2/4} \int_y^\infty \frac{1}{\tilde{y}} \exp\left(-\frac{\tilde{y}^2}{4}\right) d\tilde{y} - \frac{1}{2} \\ &\sim -\log y + B + O(y^2 \log y) \quad (\sqrt{\varepsilon(s)} \leq y \ll 1). \end{aligned}$$

ここで B は定数である。さらに a_0 に対して

$$\lim_{s \rightarrow \infty} e^s a_0(s) = 0, \quad \int_0^\infty \varepsilon(s)^2 e^s ds < \infty$$

を期待すれば

$$a_0(s) = -4(1 + o(1))\varphi_0(0) \int_s^\infty \varepsilon(\tilde{s})^2 e^{-s+\tilde{s}} d\tilde{s} \quad (s \rightarrow \infty).$$

を得る。以上より外部領域、特に $\sqrt{\varepsilon(s)} \leq y \ll 1$ において ψ は以下を満たす事が期待される。

$$\begin{aligned}\psi(y, s) &= a_0(s)(1+o(1))\varphi_0(y) + 4\varepsilon(s)^2(1+o(1))G(y) \\ &= -4(1+o(1))\varphi_0(0)\varphi_0(y) \int_s^\infty \varepsilon(\tilde{s})^2 e^{-s+\tilde{s}} d\tilde{s} \\ &\quad + 4\varepsilon(s)^2(1+o(1))(-\log y + B + O(y^2 \log y)).\end{aligned}$$

内部領域と外部領域の接合

内部領域と外部領域で構成した解はその境界 $y = \sqrt{\varepsilon(s)}$ で一致する必要がある。

内部領域において構成した関数 ψ に $y = \sqrt{\varepsilon(s)}$ を代入した値は以下の様になる。

$$\begin{aligned}\psi(\sqrt{\varepsilon(s)}, s) &= \int_0^{\sqrt{\varepsilon(s)}} (m(\tilde{y}, s) - 4) \exp\left(\frac{\tilde{y}^2}{4}\right) \tilde{y} d\tilde{y} \\ &= -4(1+o(1)) \int_0^{\sqrt{\varepsilon(s)}} \frac{1}{1 + (\tilde{y}/\varepsilon(s))^2} \tilde{y} d\tilde{y} \\ &= -2(1+o(1))\varepsilon(s)^2 \log\left(1 + \frac{(\sqrt{\varepsilon(s)})^2}{\varepsilon(s)^2}\right).\end{aligned}$$

一方、外部領域において構成した関数 ψ に $y = \sqrt{\varepsilon(s)}$ を代入した値は以下の様になる。

$$\begin{aligned}\psi(\sqrt{\varepsilon(s)}, s) &= a_0(s)\varphi_0(\sqrt{\varepsilon(s)})(1+o(1)) + 4\varepsilon(s)^2(1+o(1))G(\sqrt{\varepsilon(s)}) \\ &= -4\varphi_0(0)\varphi_0(y)(1+o(1)) \int_s^\infty \varepsilon(\tilde{s})^2 e^{-s+\tilde{s}} d\tilde{s} \\ &\quad + 4\varepsilon(s)^2 \left(-\log \sqrt{\varepsilon(s)} + B + O((\sqrt{\varepsilon(s)})^2 \log \sqrt{\varepsilon(s)})\right).\end{aligned}$$

両方の値が一致するためには以下の等式が成り立つ必要がある。

$$\begin{aligned}&-2(1+o(1))\varepsilon(s)^2 \log\left(1 + \frac{1}{\varepsilon(s)}\right) \\ &= -2(1+o(1)) \int_s^\infty \varepsilon(\tilde{s})^2 e^{-s+\tilde{s}} d\tilde{s} \\ &\quad + 4(1+o(1))\varepsilon(s)^2 \log \frac{1}{\varepsilon(s)^{1/2}} + 4\varepsilon(s)^2 B + O(\varepsilon(s)^3 \log \varepsilon(s)).\end{aligned}$$

この等式の主要部は

$$-4\varepsilon(s)^2 \log \left(\frac{1}{\varepsilon(s)} \right) = -2 \int_s^\infty \varepsilon(\tilde{s})^2 e^{-s+\tilde{s}} d\tilde{s}$$

を満たすのでこれを解いて

$$\varepsilon(s)^2 = \frac{K}{s^2} e^{-s} (1 + o(1))$$

を得る。ここで、 K は正定数であり、主要部以外の項の解析から得られる定数である。

得られた解

以上の考察より $\varepsilon(s)$ と ψ が得られた。この事と parabolic regularity argument から以下の事を得る。

$$\begin{aligned} \varepsilon(s)^2 &= \frac{K}{s^2} e^{-s} (1 + o(1)). \\ m(y, s) &= \begin{cases} \frac{4y^2}{\varepsilon(s)^2 + y^2} (1 + o(1)) & \text{(内部領域),} \\ 4 + \frac{4\varepsilon(s)^2}{y} G'(y) e^{-y^2/4} (1 + o(1)) & \text{(外部領域).} \end{cases} \\ G'(y) &= -\frac{1 + o(1)}{y} \quad (\sqrt{\varepsilon(s)} < y). \end{aligned}$$

さらに m の満たす放物型方程式に対して parabolic regularity argument を用いると以下を得る。

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{r} \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dr} \int_{|\tilde{x}| < r} u(\tilde{x}, t) d\tilde{x} = \frac{1}{(t+1)} \frac{m_y(y, s)}{y} \\ &= e^{-s} \frac{8\varepsilon(s)^2}{(y^2 + \varepsilon(s)^2)^2} = \frac{8K/s^2}{(|x|^2 + K/s^2)^2} \sim 8\pi\delta_0 \quad (|x| \ll 1, s \gg 1). \end{aligned}$$

従って、我々が期待する解が得られた。

参考文献

- [1] W. W. Bell, "Special functions for scientists and engineers", Van Nostrand, London, 1968.

- [2] P. Biler, G. Karch, Ph. Laurençot and T. Nadzieja, The 8π -problem for radially symmetric solutions of a chemotaxis model in a disc, *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, Vol. 27 (2006), 133-147.
- [3] P. Biler, G. Karch, Ph. Laurençot and T. Nadzieja, The 8π -problem for radially symmetric solutions of a chemotaxis model in the plane. *Math. Methods Appl. Sci.*, Vol. 29 (2006), 1563-1583.
- [4] A. Blanchet, J. Carrillo and N. Masmoudi, Infinite time aggregation for the critical Patlak-Keller-Segel model in $\mathbf{R}^2$, *Comm. Pure Appl. Math.*, Vol. 61 (2008), 1449-1481.
- [5] A. Blanchet, J. Dolbeault and B. Perthame, Two-dimensional Keller-Segel model: optimal critical mass and qualitative properties of the solutions. *Electron. J. Differential Equations*, Vol. 44 (2006), 1-32 (electronic).
- [6] J. Dolbeault and B. Perthame, Optimal critical mass in the two-dimensional Keller-Segel model in $\mathbf{R}^2$, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, Vol. 339 (2004), 611-616.
- [7] M. A. Herrero and J. J. L. Velázquez, Singularity patterns in a chemotaxis model. *Math. Ann.*, Vol. 306 (1996), 583-623.
- [8] N. I. Kavallaris and P. Souplet, Grow-up and refined asymptotics for a two-dimensional Patlak-Keller-Segel model in a disk. *SIAM J. Math. Ana.* Vol. 40, (2009), 1852-1881.
- [9] N. Mizoguchi, Growup of solutions for a semilinear heat equation with supercritical nonlinearity, *J. Differential Equations*, Vol. 227 (2006), 652-669.