

ESSENTIAL COMPONENT OF THE FIXED POINT SET

について

関西学院大・理 米沢 康 (Yasushi Yonezawa)

fixed point property(f.p.p.)を持つ continuum に対し, 不動点集合の本質的成分, 及び f^* p.p. の概念を導入する([2],[6],[7],[8]).

定義 0.1 X を continuum とするとき, 連続写像 $f: X \rightarrow X$ の不動点集合の成分 C が以下の条件を満たすならば, C は f の 不動点集合の本質的成分(essential component of the fixed point set)であるという.

「任意の開集合 $U \supset C$ に対し, ある $\delta > 0$ が存在して $|f' - f| < \delta$ となる任意の連続写像 $f': X \rightarrow X$ は, U の中に不動点を持つ」

注 1). $|f' - f| = \sup_{x \in X} d(f'(x), f(x)).$

定義 0.2 X を continuum とするとき, 任意の連続写像 $f: X \rightarrow X$ が不動点集合の本質的成分を持つならば, X は f^* p.p.を持つという.

f^* p.p. は, f.p.p. を持つ continuum に対してのみ定義される概念であり, ここで扱う空間はすべて f.p.p. を持つことを仮定する.

なお, 写像はすべて連続とし, 空間は separable metric を仮定する.

I. f^* p.p. についての基本的な性質

定理 1.1 continuum X が convex²⁾ で f.p.p. を持つならば, X は f^* p.p. を持つ.

注 2). linear space を仮定する.

系 1.2 Hilbert cube I^∞ は f^* p.p. を持つ[2].

定理 1.3 continuum X が f^* p.p. を持つならば, X の retract も f^* p.p. を持つ[2].

系 1.4 absolute retract (A R) は f^* p.p. を持つ[2].

例 1.5 n 次元球体 B^n (線分, 円板 etc.) は f^* p.p. を持つ.

定理 1.6 2つの continuum X, Y が1点のみを共有し, 各々 f^* p.p. を持つならば, $X \cup Y$ も f^* p.p. を持つ([1], [6]).

問題 「f.p.p. を持つが f^* p.p. を持たない空間が存在するか?」[2]

に対して, 次の様な肯定的な解答が得られた[7].

II. f.p.p. を持つが f^* p.p. を持たない空間

1. not locally connected continuum の例

定理 2.1 Y_1 を以下に構成される continuum とする.

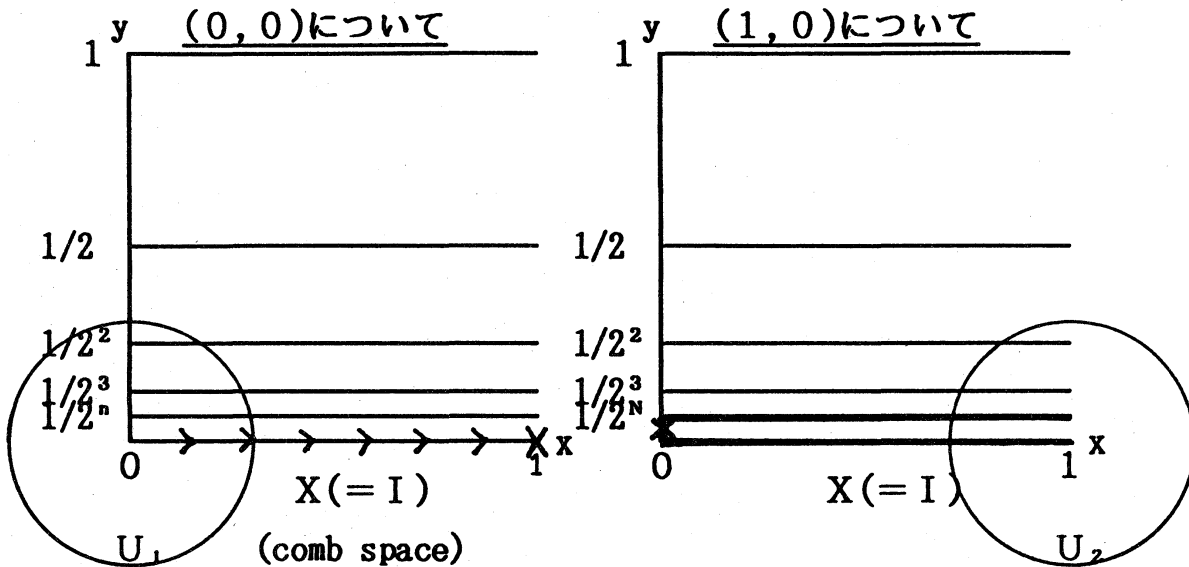
- (1) X は f.p.p. を持つ continuum.
- (2) 1点 $p \in X$ と, ある $f: X \rightarrow X$ が存在して $f(p) = p$, p を含む不動点集合の成分は本質的でないと仮定する.
- (3) I を線分 $[0, 1]$ として, $Y_1 \subset X \times I$ を次の様に定義する.

$$Y_1 = (\{p\} \times I) \cup (X \times \{0\}) \cup \bigcup_{n=0}^{\infty} (X \times \{1/2^n\}).$$

このとき, Y_1 は f.p.p. を持つが f^* p.p. を持たない.

ここでは, $X = I$ とした場合(comb space)の証明を与えるが, 一般の場合にも容易に拡張できる[7].

証明($X=I$ の場合). $f(x, y)=(\sqrt{x}, 0)$ は2つの不動点 $(0, 0)$, $(1, 0)$ を持つが, いずれも本質的でないことを示す. それぞれの不動点の $1/3$ 近傍を U_1, U_2 とする.



(0, 0)について

任意の $\delta > 0$ に対して,

$$f'(x, y) = ((1 - \delta/2)\sqrt{x} + \delta/2, 0)$$

とすれば, $|f' - f| < \delta$ かつ, f' は U_1 の中に不動点を持たない.

(1, 0)について

任意の $\delta > 0$ に対して, $1/2^N < \delta$ を満たす1つの自然数 N をとる.

$$f_N(x, y) = \begin{cases} (\sqrt{x}, 1/2^N), & y \leq 1/2^{N+1} \\ (\sqrt{x}, 0), & y \geq 1/2^N \\ (0, 1/2^{N-1} - 2y), & 1/2^{N+1} < y < 1/2^N \end{cases}$$

とすれば, $|f_N - f| < \delta$ かつ, f_N は U_2 の中に不動点を持たない (f_N は点 $(0, 1/3 \cdot 2^{N-1})$ に, ただ1つの不動点を持つ).

定理 2.2 定理 2.1 の Y_1 において, 線分 I を1点 P に縮めた空間 Y_2 も f^* p.p.を持たない[7].

次の定理は、さらに別のタイプの例を与えるものである。

定理 2.3 - Y_3 を以下に構成される continuum とする。

- (1) X は f.p.p. を持つ continuum.
- (2) 2点 $p, q \in X$ ($p \neq q$) と, ある $f: X \rightarrow X$ が存在して,
 $f(p)=p$, $f(q)=q$, p と q とは不動点集合の異なる成分に
 属すると仮定する.
- (3) I を線分 $[0,1]$ として, $Y_3 \subset X \times I$ を次の様に定義する.

$$Y_3 = (X \times \{0\}) \cup \bigcup_{n=0}^{\infty} (X \times \{1/2^n\}) \cup \bigcup_{n=0}^{\infty} (\{p\} \times [1/2^{2^n}, 1/2^{2^{n+1}}]) \\ \cup \bigcup_{n=0}^{\infty} (\{q\} \times [1/2^{2^{n+1}}, 1/2^{2^{(n+1)}}]).$$

このとき, Y_3 は f.p.p. を持つが f^* p.p. を持たない[7].

補題 2.4 (Borsuk) X を以下に構成される continuum とする。

- (1) X_n ($n=1, 2, \dots$) は f.p.p. を持つ continuum.
- (2) $X_n \subset X$ ($n=1, 2, \dots$).
- (3) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $f_n: X \rightarrow X_n$ が存在して
 $|f_n(x) - x| < \varepsilon$.

このとき, X は f.p.p. を持つ([1], [4] p. 343).

注意 2.5 Y_1, Y_2, Y_3 が f.p.p. を持つことは, Borsuk の補題によつて証明できる。このことから, Borsuk の補題は f^* p.p. には拡張できないことがわかる。

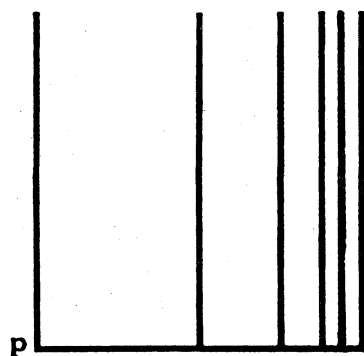
定理 2.6 Polish circle (Warsaw circle) は f.p.p. を持つが f^* p.p. を持たない[7].

f.p.p. を持つが f^* . p.p. を持たない空間

(not locally connected continuum の例)

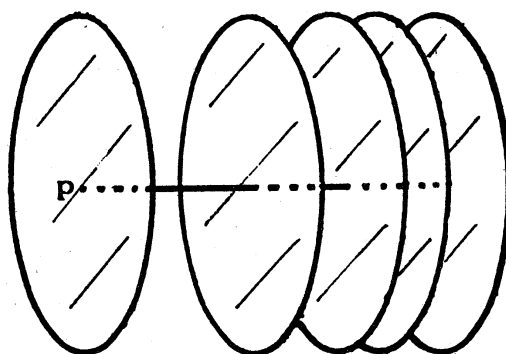
定理 2.1 の例

$X = I$



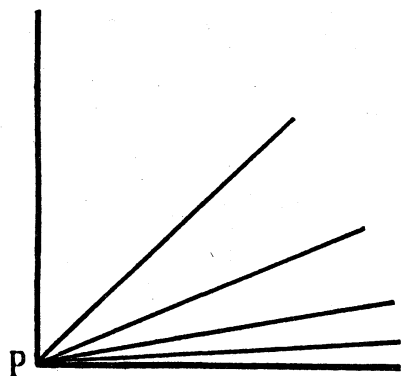
comb space

$X = D$ (2-disk)

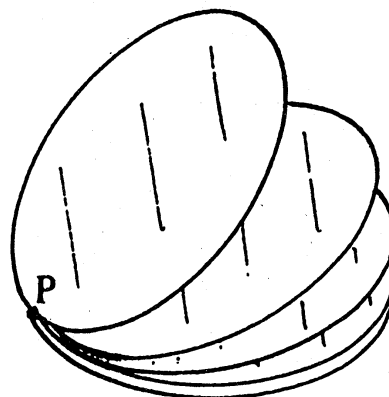


定理 2.2 の例

$X = I$

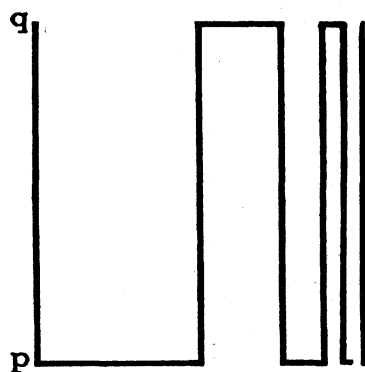


$X = D$

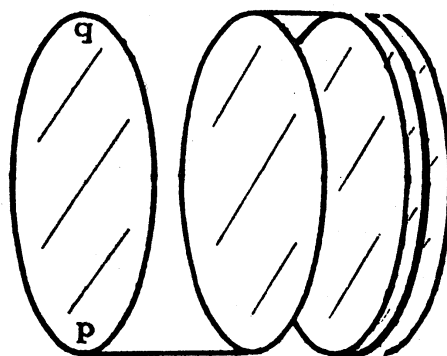


定理 2.3 の例

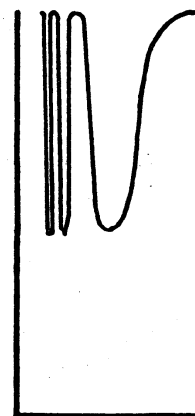
$X = I$



$X = D$



定理 2.6



Polish circle

2. locally connected continuum の例

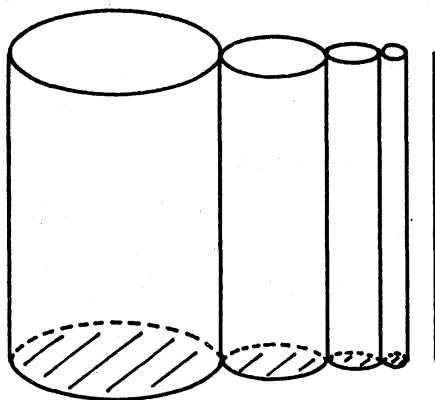
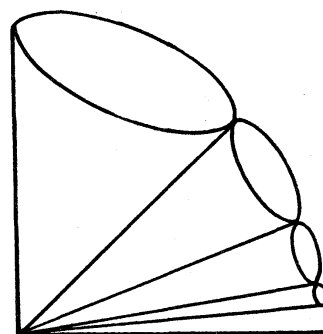
定理 2.7 Y_4 を以下に定義される R^3 内の continuum とする.

円板 $B_n = \{x \mid (x - 1/2^n)^2 + y^2 \leq (1/3 \cdot 2^n)^2\}$ とし,

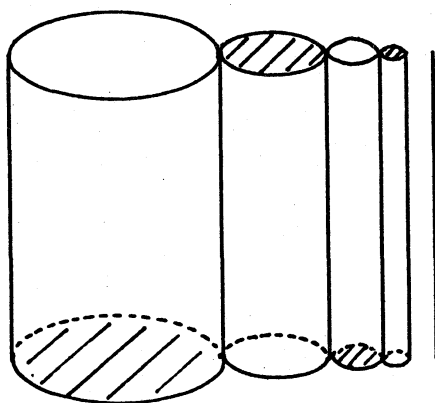
$$Y_4 = (\{(0,0)\} \times I) \cup \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \partial B_n \times I \right) \cup \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n \times \{0\} \right).$$

このとき, Y_4 は f. p. p. を持つが f^* . p. p. を持たない.

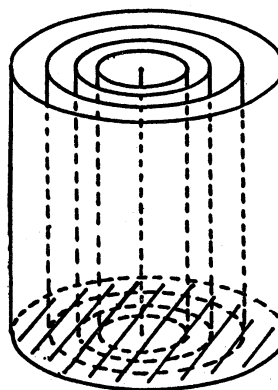
これは, 定理 2.1 に対応する locally connected continuum の例[a]となっている. また, 定理 2.2, 定理 2.3 に対応する同様の例[b], [c]も構成することができる. 他にも, 下に示すような例[d]が存在する.

[a] Y_4 

[b]



[c]



[d]

Ⅲ. f^* p.p. を持つ空間(1)

not locally connected continuum で f^* p.p. を持つ空間の例をあげる.

定理 3.1 Z を以下に定義される R^2 内の continuum とする.

極座標を用いて,

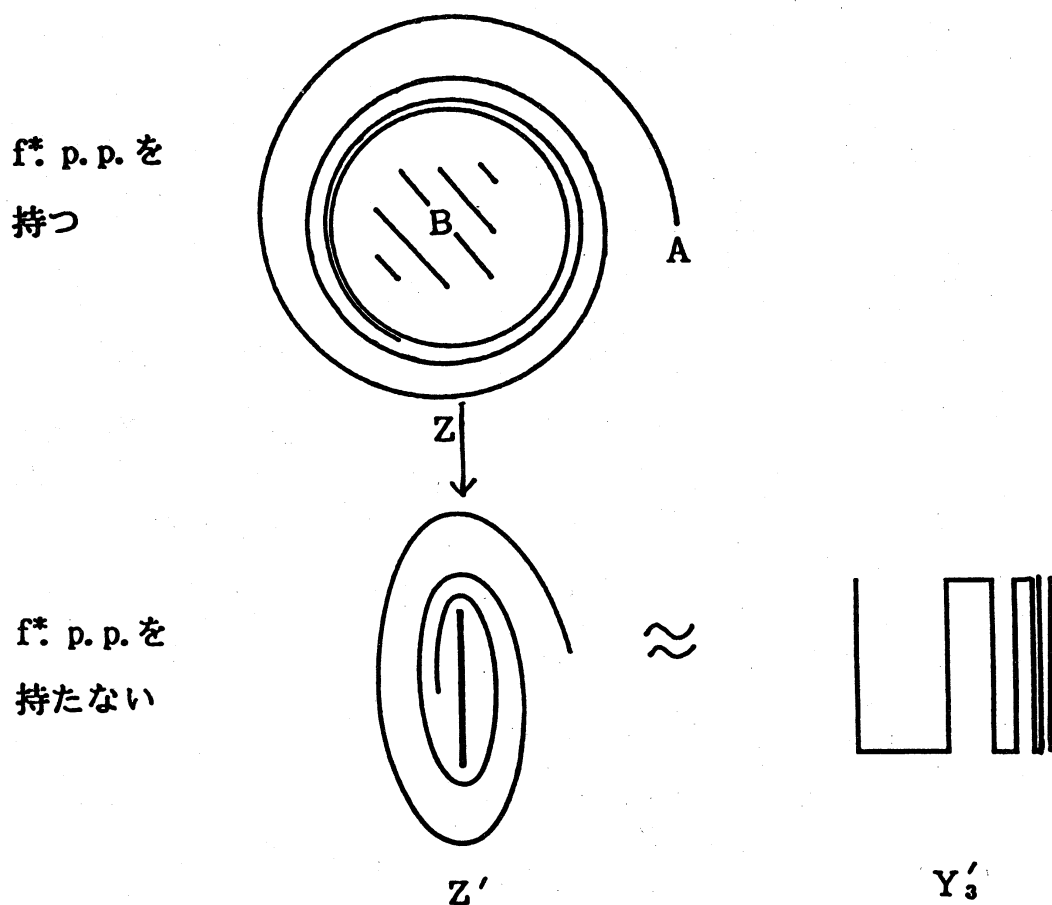
$$A = \{(r, \theta) \mid r = 2\pi/\theta + 1, \theta \geq 2\pi\},$$

$$B = \{(r, \theta) \mid r \leq 1\} \text{ とする.}$$

$Z = A \cup B$ は f^* p.p. を持つ [7].

注意 3.2 Z の上に作った cone は, f p.p. を持たない [3].

注意 3.3 Z の円板の部分 B を線分 I に縮めた空間 Z' は, 定理 2.3 において $X = I$ とした空間 Y'_3 に homeomorphic であるから, f^* p.p. を持たないことがわかる.



IV. f^* p.p.を持つ空間(2)

この章では、定理 1.6 の空間の個数を可算無限個に拡張した場合の定理について述べる。この定理によって、 f^* p.p.を持つ空間について fractal を含む興味ある新しい例が得られる。一般に、空間が locally connected の場合、ある性質のこのような拡張性は cyclic extensibility と呼ばれる。

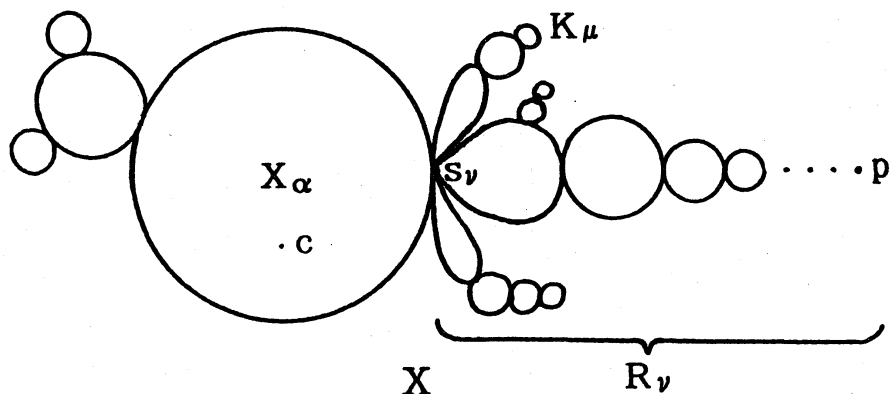
注) 以下、 $\text{Bdry } X$, $\text{Int } X$, $\text{diam}(X)$ は、それぞれ X の境界、 X の内部、 X の diameter を表す。

定義 4.1 separable metric space X の部分集合 A が A -set であるとは、 $X - A = \bigcup_i G_i$ として、 G_i が以下の条件を満たすときにいう[5].

- (1) G_i は open.
- (2) $G_i \cap G_j = \emptyset$ ($i \neq j$).
- (3) $\text{Bdry } G_i$ はたかだか 1 点.
- (4) $\lim_{i \rightarrow \infty} \text{diam}(G_i) = 0$.

定義 4.2 continuum X のある点 s と subcontinua A, B が、次の条件を満たすならば、 s は X を A と B に separate するといい、 s を X の separating point という。

- (1) $A \cup B = X$.
- (2) $A \cap B = \{s\}$.



主定理 4.3 X を continuum, $\{X_\alpha\}$ を次の条件を満たす X の subcontinuum の族とする. 但し, s_ν は X の separating point とする.

- (1) $X = \bigcup_{\alpha} X_{\alpha}$.
- (2) $\alpha \neq \beta$ のとき $X_{\alpha} \cap X_{\beta} = \phi$ または s_ν .
- (3) X_{α} は X の A-set.

このとき, 各々の X_{α} が f*. p.p. を持てば, X も f*. p.p. を持つ.

定義 4.4 Y を locally connected continuum, $\{Y_{\alpha}\}$ を次の条件を満たす Y の subcontinuum の族とする. 但し, s_ν は Y の separating point とする.

- (1) $Y = \bigcup_{\alpha} Y_{\alpha}$.
- (2) $\alpha \neq \beta$ のとき $Y_{\alpha} \cap Y_{\beta} = \phi$ または s_ν .
- (3) Y_{α} は Y の A-set.
- (4) 各々の Y_{α} の内部に separating point は含まれない.

このとき「各々の Y_{α} が 性質 P を持てば Y も性質 P を持つ」ならば, 性質 P は cyclic extensible であるといい, Y_{α} を Y の cyclic element という([4], [5]).

定理 4.5 (Borsuk) f.p.p. は cyclic extensible である([1], [5]).

主定理 4.3 より, ただちに次の系が得られる.

系 4.6 f*. p.p. は cyclic extensible である.

以下, 主定理の証明に必要な定義と補題を述べる(証明の詳細については, [8]を見よ). まず, 定理 4.5 は X に対して容易に拡張できて, 次の補題を得る.

補題 4.7 X は f.p.p. を持つ.

定義 4.8 X の点 p が endpoint であるとは, boundary が 1 点である様な十分小さい p の近傍が存在することである [5].

定義 4.9 X の 2 点 x, y について, 点 $c \in X$ に関する partial order (半順序) を次の様に定義する.

1. $x, y \in X$ が, 次の 2 つの条件のいずれかを満たすとき, $x \underset{c}{=} y$ とする.

(1) x, y は, 同じ X_α の内部に含まれる.

(2) x, y は, 同じ separating point, または endpoint である.

2. $x, y \in X$ が, $x \neq y$ かつ 次の 2 つの条件を満たすとき, $x \underset{c}{>} y$ とする.

(1) X は, x を含む subcontinuum A , y と c を含む subcontinuum B に separate される.

(2) $y \underset{c}{=} c$ または, X は, x と c を含む subcontinuum A' , y を含む subcontinuum B' に separate されない.

定義 4.10 X の異なる 2 点 a, b を含む, X のすべての A -set の交わりを a から b への cyclic chain といい, $C(a, b)$ で表す [5].

定義 4.11 subspace 及び retraction を次の様に定義する.

$$R_{\nu(c)} : \{x \mid x \underset{c}{\geq} s_\nu\}$$

$$K_{\mu(\nu)} : X - s_\nu \text{ の 1 つの成分の閉包}$$

$$r_{\nu(c)}(x) = \begin{cases} x, & x \in R_{\nu(c)} \\ s_\nu, & x \in X - R_{\nu(c)} \end{cases}$$

$$r_{\mu(\nu)}(x) = \begin{cases} x, & x \in K_{\mu(\nu)} \\ s_\nu, & x \in X - K_{\mu(\nu)} \end{cases}$$

$$r_\alpha(x) = \begin{cases} x, & x \in X_\alpha \\ s_\nu, & x \in R_{\nu(c)} \end{cases} \quad \left(\text{但し, } s_\nu \in X_\alpha, c \in \text{Int } X_\alpha \text{ とし} \right. \\ \left. \overline{X - X_\alpha} = \bigcup_\nu R_{\nu(c)} \text{ に注意せよ.} \right)$$

注意. $(c), (\nu)$ は, 前後関係から明らかな場合は省略する.

補題 4.12 $K_{\mu(v)}$ の boundary s_v が, いかなる $X_\beta \subset K_{\mu(v)}$ にも含まれないならば, s_v は $K_{\mu(v)}$ の endpoint である[5].

補題 4.13 $f: X \rightarrow X$ の不動点集合の成分のうち $C_\gamma \subset \text{Int } X_\alpha$ となるものを C_γ とする. C_γ が $f: X \rightarrow X$ の本質的成分でないならば, C_γ は $r_\alpha f|_{X_\alpha}: X_\alpha \rightarrow X_\alpha$ の本質的成分でない.

補題 4.14 $f: X \rightarrow X$ の不動点集合の成分のうち $C_\gamma \cap \text{Bdry } X_\alpha \neq \emptyset$ となるものを C_γ とする. C_γ に対し開集合 $U_\gamma \supset C_\gamma$ が存在して, 任意の n に対し次の条件を満たす $f_n: X \rightarrow X$ が存在するならば, $C_\gamma \cap X_\alpha$ は $r_\alpha f|_{X_\alpha}: X_\alpha \rightarrow X_\alpha$ の本質的成分でない.

(i) $|f_n - f| < 1/n$.

(ii) f_n は U_γ の中に不動点を持たない.

(iii) $x \in \text{Int } X_\alpha$ として, 任意の $s_v \in U_\gamma$ に対し $f_n(s_v) \underset{X}{\succ} s_v$.

補題 4.15 p を X の endpoint とし, $f(p) = p$ とする. X の 1 点を $c (\neq p)$ とし, cyclic chain $C(p, c)$ 上の separating point を s_v とするとき, 任意の $U(p)$ の中に $f(s_v) \underset{C}{\succ} s_v$ となる s_v が存在するならば, 不動点集合の, p を含む成分 C は本質的である.

証明 p を含む成分 C が本質的でないと仮定する. C に対し開集合 $U \supset C$ が存在して, 任意の δ に対し f' が存在して,

(i) $|f' - f| < \delta$.

(ii) f' は U の中に不動点を持たない.

U の中に, その boundary が 1 点 s_v , かつ $f(s_v) \underset{C}{\succ} s_v$ となる様な $U(p)$ が存在する. $d(s_v, f(s_v)) = a$ とし, $\delta = a/2$ とおく. (i)より

$f'(s_\nu) \underset{C}{>} s_\nu$. f' は R_ν の中に不動点を持たないから, $r_\nu f'|_{R_\nu}: R_\nu \rightarrow R_\nu$ は不動点を持たない. これは R_ν が f.p.p. を持つことに反す.

補題 4.16 p を X の endpoint とし, $f(p)=p$ とする. X の 1 点を $c (\neq p)$ とし, cyclic chain $C(p, c)$ 上の separating point を s_ν とするとき, 任意の $U(p)$ の中に s_ν を含む成分 C_ν が本質的でないものが存在して次の条件を満たすとする. C_ν に対し開集合 $U_\nu \supset C_\nu$ が存在して, 任意の n に対し f_n が存在して,

$$(i) |f_n - f| < 1/n.$$

(ii) f_n は U_ν の中に不動点を持たない.

$$(iii) f_n(s_\nu) \underset{C}{>} s_\nu.$$

このとき, 不動点集合の, p を含む成分 C は本質的である.

証明 p を含む成分 C が本質的でないと仮定する. C に対し開集合 $U \supset C$ が存在して, 任意の n に対し f'_n が存在して,

$$(i) |f'_n - f| < 1/n.$$

(ii) f'_n は U の中に不動点を持たない.

p は endpoint であるから, s_ν と $X_\alpha (\ni s_\nu)$ が存在して, 次を満たす.

(i) s_ν, X_α は, cyclic chain $C(p, c)$ に含まれる.

(ii) R_ν は U に含まれる.

s_ν 以外の X_α の separating point を $s_{\nu'}$ とする. $x \in \text{Int } X_\alpha$ として $f'_n(s_{\nu'}) \underset{X}{>} s_{\nu'}$ であれば, $r_{\nu'} f'_n|_{R_{\nu'}}: R_{\nu'} \rightarrow R_{\nu'}$ は不動点を持たないが, これは $R_{\nu'}$ が f.p.p. を持つことに反すから $f'_n(s_{\nu'}) \not\underset{X}{>} s_{\nu'}$ でなければならない. 一方, 仮定(iii)より $f_n(s_\nu) \not\underset{X}{>} s_\nu$ ($x \underset{C}{>} s_\nu$ に注意). ゆえに, 補題 4.13, 補題 4.14より, X_α は f^* p.p. を持たないことになり矛盾.

注意 4.17 K_μ の endpoint s_ν に対しても, 補題 4.15, 補題 4.16 と同様のことが成り立つ.

補題 4.18 C_γ を s_ν を含む f の不動点集合の成分とする. C_γ が本質的成分でなければ, ある K_μ が存在して, $C_\gamma \cap K_\mu$ は $r_\mu f|_{K_\mu}: K_\mu \rightarrow K_\mu$ の本質的成分でない.

以上の補題を用いて, 主定理 4.3 の証明を行なう.

主定理 4.3 の証明

$f: X \rightarrow X$ が不動点集合の本質的成分を持たないと仮定する. 対応 $F: \{s_\nu\} \rightarrow X$ を次の様に定義する.

Case 1. $f(s_\nu) \neq s_\nu$. この場合には $F(s_\nu) = f(s_\nu)$ とせよ.

Case 2. $f(s_\nu) = s_\nu$. この場合には 補題 4.18 より, s_ν を含む不動点集合の成分 C_γ に対し, ある K_μ が存在して, $C_\gamma \cap K_\mu$ は, $r_\mu f|_{K_\mu}: K_\mu \rightarrow K_\mu$ の本質的成分でない. K_μ の内部に 1 点 k_μ をとり, $F(s_\nu) = k_\mu$ とせよ.

証明は次の 2 つの場合に分かれる. $x \in \text{Int } X_\alpha$ として,

Case 1. ある X_α が存在して, すべての $s_\nu \in X_\alpha$ に対して

$$F(s_\nu) \not\underset{x}{\succ} s_\nu \text{ となる場合.}$$

補題 4.13, 補題 4.14 より X_α が f^* p.p. を持たないことになり矛盾.

Case 2. 任意の X_α に対して $F(s_\nu) \underset{X}{>} s_\nu$ となる $s_\nu \in X_\alpha$ が存在する場合.

ある X_{α_0} に対する s_{μ_0} から初めて, 次の条件を満たす separating point の順序集合 $\{s_\mu\}$ ($\subset \{s_\nu\}$) を構成できる. この X_{α_0} の内部の1点を c として,

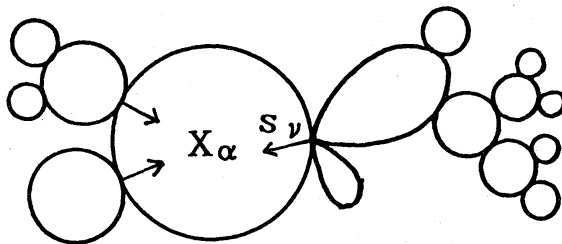
(1) すべての μ に対して $F(s_\mu) \underset{c}{>} s_\mu$.

(2) $K_\mu \supset K_{\mu'} (\mu < \mu')$.

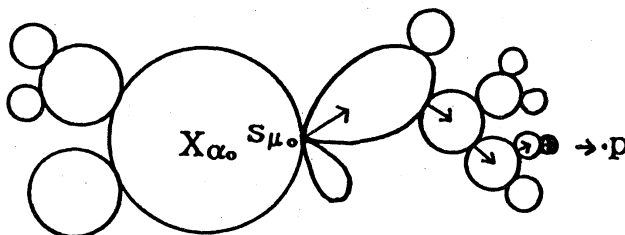
(3) $\{s_\mu\}$ は endpoint p に収束するか, または, separating point s_ν を, ただ1つしか持たないある X_* の separating point s_ν で終わる.
補題 4.15, 補題 4.16 より, endpoint p が $f: X \rightarrow X$ の不動点集合の本質的成分に属して, 背理法の仮定に矛盾, または, 補題 4.13, 補題 4.14 より, X_* が f^* p.p. を持たないことになり矛盾.

注意. separating point s_ν は, X_α の内部に含まれるものは除く.

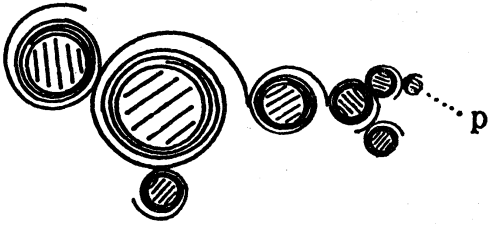
Case 1.



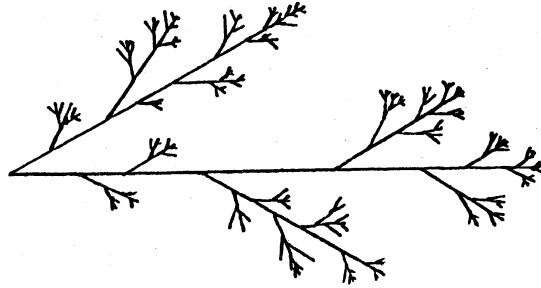
Case 2.



例.



[a]



[b]

References

- [1] Borsuk, K., "Einige Sätze über stetige Streckenbilder,"
Fund. Math., 18 (1932), 198 - 214.
- [2] Kinoshita, S., "On essential components of the set of fixed
points," Osaka Math. J., 4 (1952), 19-22.
- [3] Knill, R. J., "Cones, Product and fixed points," Fund. Math.,
60 (1967), 35 - 46.
- [4] Kuratowski, K., Topology II, Academic Press, New York, 1968.
- [5] Whyburn, G. T., Analytic Topology, Amer. Math. Soc. Coll.
Pub., 28, 1942.
- [6] Yonezawa, Y., and Kinoshita, S., "A property of essential
components of the fixed point set," Kwansei Gakuin Annual
Studies, 37 (1988), 147-151.
- [7] Yonezawa, Y., "On f.p.p. and f^* p.p. of some not locally
connected continua," (to appear in the Fundamenta Mathematicae).
- [8] Yonezawa, Y., "The cyclic extensibility of essential components
of the fixed point set," (preprint).