

ネットワーク結合複素 Ginzburg-Landau 方程式の 拡散誘起不安定性と非一様ダイナミクス

京都大学大学院理学研究科・物理学教室 中尾 裕也

Department of Physics, Kyoto University, Hiroya Nakao

2010 年 3 月 17 日

1 導入

実世界には自律的なダイナミクスを持つ多数の要素が互いに相互作用する系が数多くあり、その集団ダイナミクスは各々の系において重要な機能的役割を果たしている。例えば、哺乳類の脳には視交叉上核 (SCN) と呼ばれる領域があり、目からの光刺激を受けたニューロン集団が 24 時間の日周リズムに同期して活動することにより、睡眠・覚醒を制御している [1]。相互作用する自律要素系の数理モデルのひとつとして、性質の良く似た多数のリミットサイクル振動子が各種のネットワーク構造を通じて相互作用する結合振動子モデル [1, 2, 3] が古くから研究されてきた。その種の数理モデルの解析により、古典的な例としては Belousov-Zhabotinsky 反応に代表される振動化学反応系における標的パターンやスパイラル波の形成現象などが説明されており [1, 2]、最近では、いわゆる複雑ネットワークを介して相互作用する振動子系の研究に関心が持たれている [4, 5, 6, 7, 8]。一般に、結合自律要素系においては、要素間の相互作用の結果、要素が元々持っている性質とは定性的に異なる非自明な集団ダイナミクスが新たに出現することが知られている。

さて、結合リミットサイクル振動子系の理論解析においては、個別の具体的な数理モデルをそのまま扱うのではなく、元のモデルを適当な条件の下で縮約 (簡約化) して得た方程式を詳しく解析するという手法が取られることが多い。典型的な縮約方程式としては、(i) 振動子のダイナミクスをリミットサイクルの分岐点近傍で振幅自由度のみに縮約した方程式、特に超臨界 Hopf 分岐点近傍で振動子の複素振幅の従う複素 Ginzburg-Landau 方程式 [2, 3, 9, 10, 11] と、(ii) 振動子間の結合が弱い場合にリミットサイクルの位相のみを用いて振動子のダイナミクスを記述する位相方程式 [1, 2, 3, 4, 6, 12] が挙げられる。元の数理モデルをより簡潔な縮約方程式で近似することにより、そのままの形で

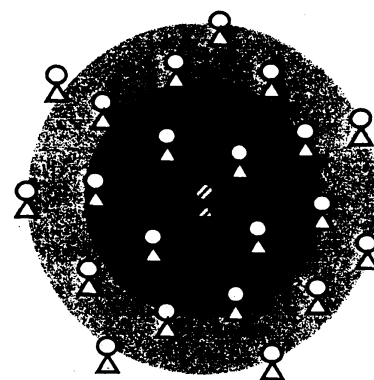


図 1 自律要素の結合系。

は難しい解析的な扱いがある程度は可能となり、また、より重要なこととして、個別のモデルの詳細によらない、結合振動子系に共通に成立する一般的性質が明らかになることがある。このような縮約理論を通じた結合振動子系へのアプローチは蔵本 [2, 9] によって推し進められ、特に後者の機能の重要性が強調された [13]。結合振動子系が持つ一般的な性質の良く知られた例として、集団同期転移、非線形波動の伝播、時空カオスの発生等が挙げられる [1, 2, 3, 9, 10, 11]。

本稿では、多数のリミットサイクル振動子がネットワークを通じて結合している状況の数理モデルを (i) の複素 Ginzburg-Landau 方程式に縮約した系について概説する。典型的な結合ネットワークとして、過去に (a) 局所結合、(b) 大域結合、(c) 非局所結合、の場合がよく研究されてきており、最近では (d) 複雑ネットワーク結合の場合も研究されはじめている。いずれも、広い意味で振動子間に拡散・平均場的な相互作用が働く状況が主に考えられてきており（そうでないことも多いが）、そのような状況に共通する興味深い現象として、直観的には系の状態を一様化するように働くことが期待される拡散の効果により、逆に系の完全同期状態が不安定化される「拡散誘起不安定性」が知られている [2]。これは拡散結合した興奮・抑制因子系におけるパターン形成機構として良く知られている Turing 不安定性 [14] の結合振動子版と呼べるものであり、完全同期状態の不安定化の結果、系は結合ネットワークの性質に応じて様々な集団ダイナミクスを示す。以下、典型的なネットワーク構造を持ついくつかの複素 Ginzburg-Landau 方程式の例を挙げ、それぞれのネットワーク上に拡散誘起不安定性によって生じる非一様ダイナミクスについて簡単に述べる。

2 結合振動子系

2.1 拡散結合した非線形振動子系

振動子の時刻 t における状態を実ベクトル $\mathbf{X}(t) \in \mathbf{R}^m$ で表す ($m \geq 2$)。 $\mathbf{X}(t)$ のダイナミクスは常微分方程式

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{X}; \mu) \quad (1)$$

で記述されるとする。ここで $\mathbf{F} \in \mathbf{R}^m$ はダイナミクスを表すベクトル場で、 $\mu \in \mathbf{R}$ は適当な分岐パラメータである。振動子は分岐点 $\mu = 0$ で単純な超臨界 Hopf 分岐を示し、 $\mu < 0$ では線形安定な固定点 $\mathbf{X}^S$ を、 $\mu > 0$ では安定なリミットサイクル軌道 $\mathbf{X}^L(t) = \mathbf{X}^L(t+T)$ を持つとする。ここで T はリミットサイクルの周期で、振動数を $\omega = 2\pi/T$ と書く。

このような振動子の N 個からなる集団が相互作用している状況の数理モデルとして、以下のネットワーク結合振動子系を考える。

$$\dot{\mathbf{X}}_j(t) = \mathbf{F}(\mathbf{X}_j; \mu) + \mathbf{D} \sum_{k=1}^N G_{jk} \mathbf{X}_k \quad (j = 1, \dots, N) \quad (2)$$

ここで j は振動子の番号で、右辺第 1 項は各振動子の固有ダイナミクス、第 2 項は振動子間の相互作用を表す。全ての振動子は同一の性質を持つとする。振動子間の相互作用は最も単純な線形なものを仮定しており、行列 $G_{jk} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ は振動子 k から振動子 j への拡散的な相互作用を表す結合行列で、重み付きの Laplacian 行列タイプのものを考える。すなわち、 G_{jk} は対称で ($G_{jk} = G_{kj}$)、非対角要素は 0 または正の値をとり、対角要素を

$$G_{jj} = - \sum_{k=1(\neq j)}^N G_{jk} \quad (j = 1, \dots, N) \quad (3)$$

で与える。 $\mathbf{D} = \text{diag}(D_1, \dots, D_m)$ は $\mathbf{X}$ の各成分の拡散定数からなる対角行列である。 $\mathbf{X}$ の異なる成分は一般には異なる拡散定数を持つ。これは拡散誘起不安定性が生じるために必要である。なお、結合ネットワークは連結で、任意のふたつの振動子をつなぐ経路があるとする。

式 (3) より $\sum_{k=1}^N G_{jk} = 0$ なので、相互作用項は

$$\sum_{k=1}^N G_{jk} \mathbf{X}_k = \sum_{k=1}^N G_{jk} \mathbf{X}_k - \left(\sum_{k=1}^N G_{jk} \right) \mathbf{X}_j = \sum_{k=1(\neq j)}^N G_{jk} (\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_j) \quad (4)$$

と表せるので (最後の和は $k = j$ を含むとしても同じ)、振動子 k と振動子 j の状態差 $\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_j$ に比例したフラックスが、 G_{jk} の大きさに応じて振動子 j に流入することが分かる。実際、化学振動子であれば、振動子の状態 $\mathbf{X}$ は各化学成分の濃度からなるベクトルなので、これは Fick の法則そのものである。全ての振動子のダイナミクスが完全に同期している時、つまり $\mathbf{X}_1(t) = \mathbf{X}_2(t) = \dots = \mathbf{X}_N(t)$ となっている時には、式 (2) の右辺の拡散結合項は消え、各振動子は結合がない場合のリミットサイクル軌道 $\mathbf{X}^L(t)$ をとる。よって、完全同期状態は常に式 (2) の解である。しかし、以下で述べるように、拡散により、完全同期解が不安定化されることもある。

2.2 振幅方程式

結合リミットサイクル振動子系の代表的な縮約記述のひとつが、Hopf 分岐点近傍における複素 Ginzburg-Landau 方程式である。この方程式は、通常は連続媒質上の振動反応拡散系の数理モデルより導出されるが [2, 9, 10, 11]、一般のネットワーク上の拡散結合振動子系についても、振動子の分岐点からの距離と拡散定数に関する適当なスケーリングのもとで、全く同様に導出される (付録参照)。

振動子の固定点 $\mathbf{X}^S$ が Hopf 分岐により不安定化した直後の系の軌道は、小さな楕円状の調和振動で近似され、

$$\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}^S \propto W(t) \exp(i\omega t) \mathbf{U}_0 + \text{c.c.} \quad (5)$$

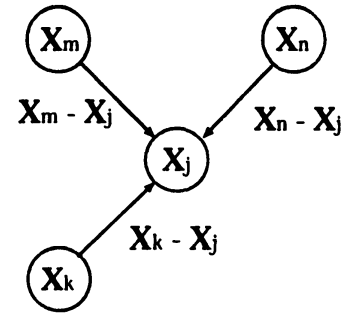


図2 ネットワークノード間の拡散。

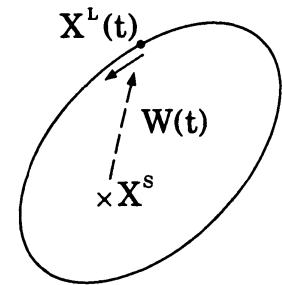


図3 Hopf 分岐直後の軌道。 $W(t)$ は実際には複素振幅。

と表せる. ここで $i\omega$ と U_0 は, Hopf 分岐点 $\mu = 0$ での固定点 X^S の Jacobi 行列の臨界固有値と固有ベクトルで, $W(t)$ はこの楕円の複素振幅である. 多重時間スケール展開等の手法により, μ が小さな正の値をとる時の複素振幅 $W(t)$ のゆっくりしたダイナミクスは, 適当なりスケールの後, 以下の常微分方程式で記述されることが知られている [2, 3, 9, 10] :

$$\dot{W}(t) = W - (1 + ic_2)|W|^2W \quad (6)$$

ここで実パラメータ c_2 は元の振動子モデルより決まる. この方程式は超臨界 Hopf 分岐点近傍の力学系の標準形であり, 複素平面上の単位円

$$W^L(t) = \exp(-ic_2t) \quad (7)$$

をリミットサイクル軌道として持ち, 最も単純なりミットサイクル振動子と言える. そこで, これを再び振動子と見なして, Stuart-Landau(SL) 振動子と呼ぶ.

多数のリミットサイクル振動子の結合系 (2) についても, 振動子の状態が Hopf 分岐点に近くて複素振幅が小さく, それらに釣り合う程度に振動子間の結合強度 D も小さい状況において, 各振動子の複素振幅を $W_j(t)$ として同様の解析を行うと (付録参照),

$$\dot{W}_j(t) = W_j - (1 + ic_2)|W_j|^2W_j + K(1 + ic_1) \sum_{k=1}^N G_{jk}W_k \quad (j = 1, \dots, N) \quad (8)$$

という方程式が導出できる. ここで $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$ は元の振動子や結合関数の性質より決まる実パラメータで, $K \in \mathbf{R}$ は変換された結合強度である. 右辺の第 1,2 項は SL 振動子 (6) を表すので, N 個の一般のリミットサイクルの結合力学系が, N 個の SL 振動子の結合力学系に縮約されたことになる. 今後, 式 (8) をネットワーク結合複素 Ginzburg-Landau(CGL) 方程式と呼ぶことにする.

なお, 式 (8) の連続媒質版である偏微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} W(x, t) = W - (1 + ic_2)|W|^2W + (1 + ic_1)\nabla^2 W \quad (9)$$

が, 本来の古典的な複素 Ginzburg-Landau 方程式で (あるいは, これを実際に反応拡散系の数理モデルから導出したのは蔵本と都筑なので, 蔵本-都筑方程式 [15]), 化学反応系などの振動性媒質を記述する標準的な偏微分方程式として, 非常に多くの研究がなされてきている [2, 3, 9, 10, 11].

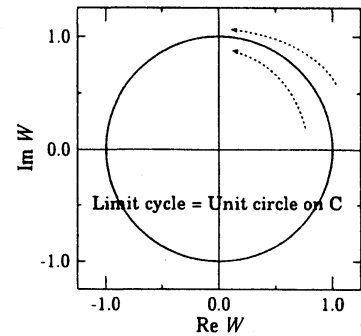


図4 Stuart-Landau 振動子.

2.3 位相方程式

本稿では扱わないが, もうひとつの代表的な縮約法は, 位相記述である. 振動子の安定なりミットサイクル軌道に沿って適当な位相座標を定義することにより, 振動子の状態 $X \in \mathbf{R}^m$ を, 一定の振動数で増加する位相 $\phi \in [0, 1]$ のみで記述することができる [2, 3] :

$$\dot{\phi}(t) = \omega \quad (10)$$

ここで ω は振動数で、これを位相振動子と呼ぶ。同一の性質を持つリミットサイクル振動子同士が弱く相互作用しており、各々の振動子の状態が非摂動リミットサイクル軌道からあまり外れない場合には、元の拡散結合振動子系 (2) より、以下の結合位相方程式が導出される [2, 3, 12].

$$\dot{\phi}_j(t) = \omega - C \sum_{k=1}^N G_{jk} \Gamma(\phi_j - \phi_k) \quad (j = 1, \dots, N) \quad (11)$$

ここで ω は振動数で、 $\Gamma(\phi_j - \phi_k)$ は振動子 j と振動子 k の相互作用を表す位相結合関数、 C は適当に変換された結合強度である。

一般の拡散結合振動子系 (2) を縮約した CGL 方程式 (8) もまた SL 振動子の拡散結合系であるので、振動子間の結合が弱いという条件で、さらに位相縮約できる。SL 振動子のリミットサイクルは解析的に扱うことができ、変数 X から位相 ϕ を与えるアイソクロンや、位相結合関数 Γ を計算するのに必要な位相感受関数を求めることができる [2]。SL 振動子のリミットサイクルが複素平面上の単位円であることを反映して、位相結合関数は単純なサイン型となり、位相方程式は

$$\dot{\phi}_j(t) = \omega - C \sum_{k=1}^N G_{jk} \sin(\phi_j - \phi_k + \beta) \quad (j = 1, \dots, N) \quad (12)$$

で与えられる。ここで、振動数は $\omega = -c_2$ で、実パラメータ β は $\cos \beta = (1 + c_1 c_2) / \{(1 + c_1^2)(1 + c_2^2)\}^{1/2}$ より決まり、 $1 + c_1 c_2 > 0$ なら $|\beta| < \pi/2$ なので振動子間の相互作用は引力的、 $1 + c_1 c_2 < 0$ なら $|\beta| > \pi/2$ なので斥力的となる。後者の条件は、後で述べるネットワーク CGL 方程式の Benjamin-Feir 不安定条件と同じである。式 (12) のような単純な $\sin$ 型の位相結合関数を持つ位相方程式は、特に蔵本 (一篠本-坂口) モデルと呼ばれ、最近その複雑ネットワーク上におけるダイナミクスが注目されている (振動数 ω を平均値のまわりに分布させたり各振動子に独立ノイズを加えたりすることが多い) [4, 5, 6, 7, 8, 12].

2.4 各種の拡散結合振動子モデル

振動子間の結合ネットワークとしては以下に挙げるようなものが典型的に扱われてきた (図 5)。いずれの場合も各振動子は他の振動子群と拡散的に結合しており、これを各振動子の状態と他の振動子群の何らかの平均状態の差に応じた相互作用とみることもできる。このような拡散・平均場の相互作用する結合力学系という観点は、例えば 1983 年の藤坂 & 山田 [16] による結合カオス振動子系の同期状態の安定性に関する議論で既に導入されている。

2.4.1 局所結合

規則的に配置された格子点上に振動子が置かれており、最近接の振動子とだけ拡散的に相互作用する状況を考える。例えば 1 次元格子の場合、結合行列は

$$G_{jk} = 1 \quad (j = k \pm 1), \quad -2 \quad (j = k), \quad 0 \quad (\text{otherwise}) \quad (13)$$

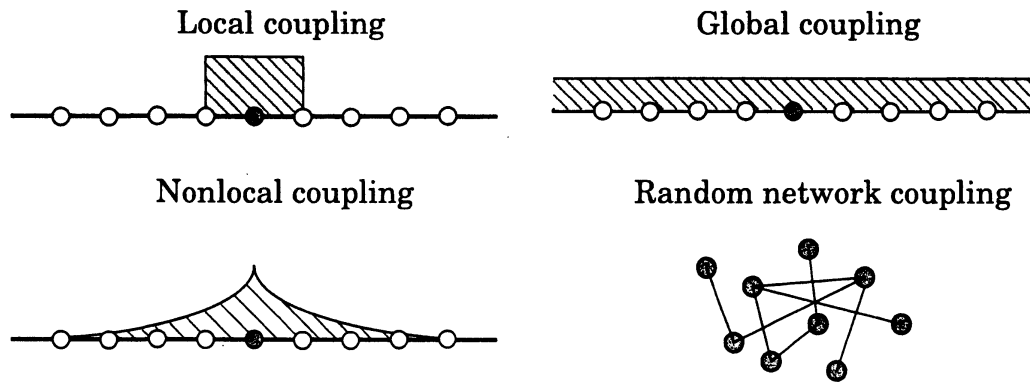


図5 典型的な結合ネットワーク.

となり (後の数値計算ではさらに周期境界条件を課す), 拡散結合項は,

$$\sum_{k=1}^N G_{jk} W_k = W_{j+1} - 2W_j + W_{j-1} \quad (14)$$

と, 連続媒質の場合の拡散項 $\partial^2 W / \partial x^2$ を離散化した形となる. これは

$$\sum_{k=1}^N G_{jk} W_k = 2(\langle W \rangle_j^L - W_j), \quad \langle W \rangle_j^L = \frac{W_{j-1} + W_{j+1}}{2} \quad (15)$$

とも書け, 振動子 j の状態 W_j と, 両隣の振動子 $j-1$ と $j+1$ の平均状態 $\langle W \rangle_j^L$ の差に依存する相互作用となっている.

2.4.2 大域結合

系の各振動子が他の全ての振動子と拡散的に相互作用しているとする. 結合行列は

$$G_{jk} = 1 \quad (j \neq k), \quad G_{jj} = -(N-1) \quad (16)$$

となり, 拡散結合項は,

$$\sum_{k=1}^N G_{jk} W_k = \sum_{k=1(\neq j)}^N W_k - (N-1)W_j = \sum_{k=1}^N (W_k - W_j) = N \{ \langle W \rangle^G - W_j \} \quad (17)$$

となる. ここで, N は全振動子数で,

$$\langle W \rangle^G = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N W_k \quad (18)$$

は全ての振動子の複素振幅 $\{W_j\}$ の平均値である. 個々の振動子は, 他の振動子の状態の大域的な平均との差を感じるので, 平均場結合とも呼ばれる.

2.4.3 非局所結合

格子点上の振動子集団において、振動子間に距離とともに減衰する相互作用が働くとする。例えば、1次元格子状において、結合が重み付きの結合行列

$$G_{jk} = g(|j - k|) \quad (j \neq k), \quad G_{jj} = - \sum_{k=1(\neq j)}^N g(|j - k|) \quad (19)$$

で与えられるような場合である (後の数値計算ではさらに周期境界条件を課す)。ここで $g(|j - k|)$ は振動子間の距離 $|j - k|$ とともに減衰する適当な関数で、 $\sum_{k=1(\neq j)}^N g(|j - k|) = A$ ($A > 0$ は定数) と規格化されているとする。拡散結合項は、

$$\sum_{k=1}^N G_{jk} W_k = \sum_{k=1(\neq j)}^N g(|j - k|) W_k - \sum_{k=1(\neq j)}^N g(|j - k|) W_j = A \{ \langle W \rangle_j^{NL} - W_j \} \quad (20)$$

という形となる。ここで

$$\langle W \rangle_j^{NL} = \frac{1}{A} \sum_{k=1(\neq j)}^N g(|j - k|) W_k \quad (21)$$

は振動子 j の感じる「局所場」であり、やはり他の振動子の状態の重み関数 $g(|j - k|)$ による非局所平均場 $\langle W \rangle_j^{NL}$ と自らの状態 W_j の差に応じた相互作用となっている。

2.4.4 ランダムネットワーク結合

ランダムネットワーク、例えば Erdős-Renyi ネットワークや Barabási-Albert のスケールフリーネットワーク [20] を通じた相互作用も考えられている。振動子 j と振動子 k の間の結合の有無に応じて結合行列 G_{jk} の非対角要素は 1 か 0 を取るので、振動子 j の次数 (結合本数) d_j は

$$d_j = \sum_{k=1(\neq j)}^N G_{jk} = -G_{jj} \quad (j = 1, \dots, N) \quad (22)$$

で与えられ、拡散結合項は、

$$\sum_{k=1}^N G_{jk} W_k = \sum_{k=1(\neq j)}^N G_{jk} W_k - d_j W_j = d_j \{ \langle W \rangle_j^{RN} - W_j \} \quad (23)$$

と書ける。ここで

$$\langle W \rangle_j^{RN} = \frac{1}{d_j} \sum_{k(\neq j)} G_{jk} W_k \quad (24)$$

は振動子 j の感じる「局所場」で、ネットワークを介して振動子 j につながっている振動子集合 $\{W_k\}$ の平均値となっている。なお、連結なネットワークを考えているので、 $d_j \geq 1$ である。

3 拡散誘起不安定性と非一様ダイナミクス

3.1 拡散誘起不安定性

拡散結合振動子系 (2) は、完全同期状態

$$\mathbf{X}_j(t) = \mathbf{X}^L(t) \quad (j = 1, \dots, N) \quad (25)$$

を常に解として持つ。ここで、 $\mathbf{X}^L(t)$ は結合がない場合の個々の振動子のリミットサイクル解である。この完全同期解の線形安定性を調べよう。空間的に広がった振動性媒質の反応拡散モデルより導出される連続媒質版の CGL 方程式 (9) においては、拡散誘起不安定性により長波長の位相モードが自発的に乱れて時空カオス状態に至る事が知られており [2], 実験的にも白金触媒表面上で生じる $\text{CO} \leftrightarrow \text{CO}_2$ の振動化学反応系などにおいて観察されている [17].

一般の拡散結合振動子系 (2) の完全同期解は通常は解析的には求められないが、Hopf 分岐点近傍では縮約した CGL 方程式 (8) が有効である。よって、CGL 方程式で不安定性が生じれば、縮約する前の元のモデルにおいても不安定性が生じることが期待される。CGL 方程式 (8) は

$$W_j(t) = W^L(t) = \exp(-ic_2 t) \quad (j = 1, \dots, N) \quad (26)$$

という完全同期解を持つ。ここで、 $W^L(t)$ は結合のない SL 振動子のリミットサイクル解である。この完全同期解の線形安定性を見るため、振幅と位相への摂動を

$$W_j(t) = W^L(t) \{1 + \rho_j(t)\} \exp\{i\theta_j(t)\} \quad (27)$$

と導入して CGL 方程式 (8) に代入して線形化すると、 $j = 1, \dots, N$ に対して

$$\begin{pmatrix} \dot{\rho}_j(t) \\ \dot{\theta}_j(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -2c_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_j \\ \theta_j \end{pmatrix} + K \sum_{k=1}^N G_{jk} \begin{pmatrix} 1 & -c_1 \\ c_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_j \\ \theta_j \end{pmatrix} \quad (28)$$

という式が得られる。ここで、

$$\sum_{k=1}^N G_{jk} \phi_k^{(\alpha)} = \Lambda^{(\alpha)} \phi_j^{(\alpha)} \quad (29)$$

を満たす結合行列の固有値 $\Lambda^{(\alpha)}$ と固有ベクトル (モード) $(\phi_1^{(\alpha)}, \dots, \phi_N^{(\alpha)})^T$ を導入する。振動子数が N ならば、固有モードの数も N 個あり、これをインデックス $\alpha = 1, \dots, N$ で表す。 G_{jk} は実対称行列なので、固有値 $\Lambda^{(\alpha)}$ は全て実数で、固有ベクトルは $\sum_k \phi_k^{(\alpha)} \phi_k^{(\beta)} = \delta_{\alpha, \beta}$ と正規直交化できる。また、連結なネットワークを考えているので、重み付き Laplacian 型の行列 G_{jk} はゼロ固有値をひとつだけ持ち、対応する固有ベクトルは一様モード $(1, \dots, 1)^T$ となる。他の固有値は全て負である [5, 7]。ゼロ固有モードのインデックスを $\alpha = 1$ としておく (よって $\Lambda^{(1)} = 0$),

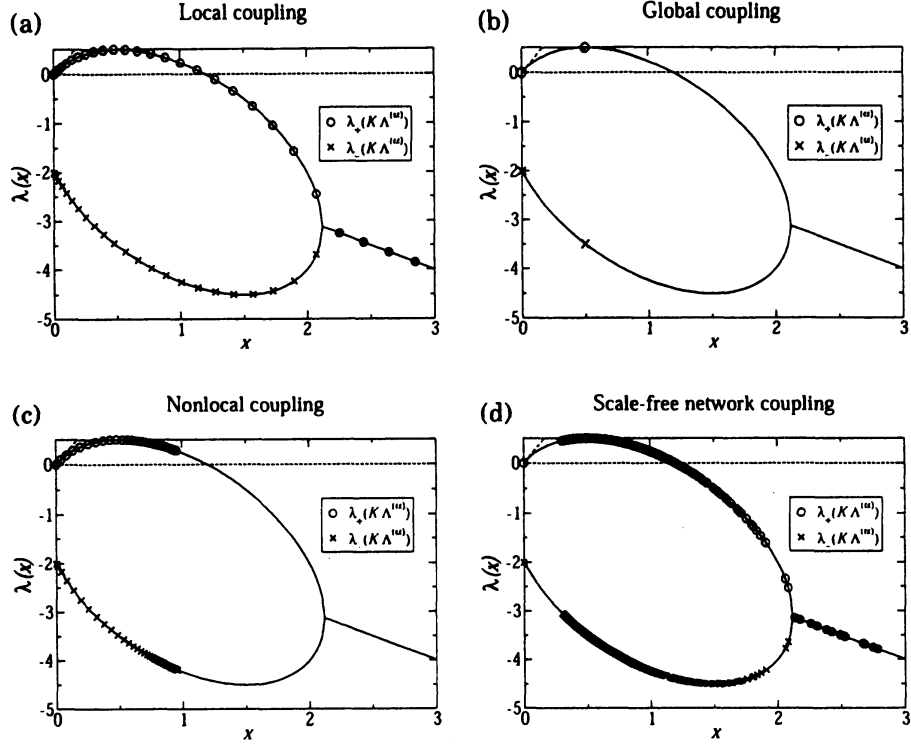


図 6 各ネットワーク上の CGL 方程式の完全同期解の線形安定性スペクトル. いずれも $c_1 = -2$, $c_2 = 2$ で Benjamin-Feir 不安定条件を満たしており, $\text{Re } \lambda_+(x)$ の $x = 0$ での勾配 $-(1 + c_1 c_2)$ は正となっている. (a) 局所結合 ($K = 25$), (b) 大域結合 ($K = 0.001$), (c) 非局所結合 ($K = 0.06$), (d) スケールフリーネットワーク結合 ($K = 0.04$).

振幅と位相への摂動を結合行列の固有モードを用いて

$$\begin{pmatrix} \rho_j \\ \theta_j \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^N \begin{pmatrix} \rho^{(\alpha)} \\ \theta^{(\alpha)} \end{pmatrix} \exp\{\lambda^{(\alpha)} t\} \phi_j^{(\alpha)} \quad (30)$$

と展開する. ここで $\rho^{(\alpha)}$ と $\theta^{(\alpha)}$ は各固有モードの展開係数で, $\lambda^{(\alpha)}$ は線形成長率である. これを式 (28) に代入すると, 各モード毎の式に decouple され, その線形成長率 $\lambda^{(\alpha)}$ は, 特性方程式

$$\det \begin{pmatrix} \lambda^{(\alpha)} + 2 - K\Lambda^{(\alpha)} & c_1 K\Lambda^{(\alpha)} \\ 2c_2 - c_1 K\Lambda^{(\alpha)} & \lambda^{(\alpha)} - K\Lambda^{(\alpha)} \end{pmatrix} = 0 \quad (31)$$

の根として,

$$\lambda_{\pm}^{(\alpha)} = -1 + (K\Lambda^{(\alpha)}) \pm \sqrt{1 + 2c_1 c_2 (K\Lambda^{(\alpha)}) - c_1^2 (K\Lambda^{(\alpha)})^2}. \quad (32)$$

と計算される. 線形成長率 $\lambda_{\pm}^{(\alpha)}$ は $x = -K\Lambda^{(\alpha)} (\geq 0)$ の関数となっていて, x が小さいときにはふたつの実数解を持ち, x が大きくなると複素数のペアを解に持つ. 右辺の符号が + である線形成長率 $\lambda_+^{(\alpha)}$ のブランチについて, G_{jk} のゼロ固有値 $\Lambda^{(1)} = 0$ を代入すると, その線形成長率は $\lambda_+^{(1)} = 0$ となって中立安定であり, 位相モード $(\rho^{(1)}, \theta^{(1)})^T = (0, 1)^T$ に対応する. よって, 線形成長率の $\lambda_+^{(\alpha)}$ のブランチは, $x = -K\Lambda^{(\alpha)}$ が小さな値の時には主に位相の変調に対応する.

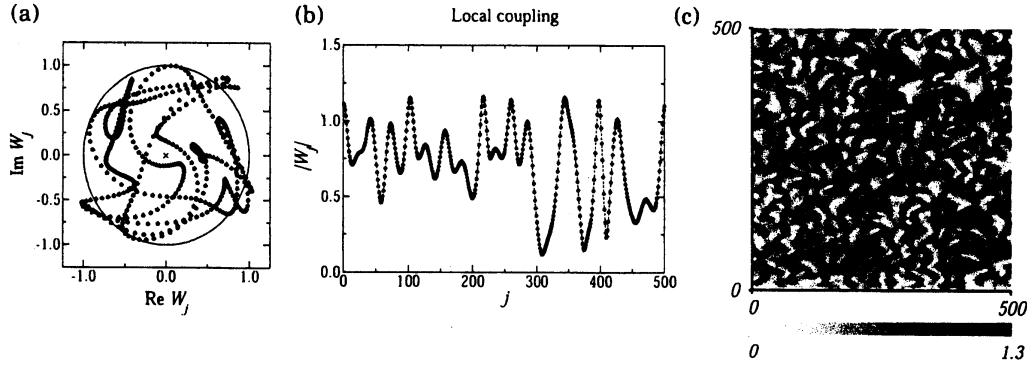


図7 局所結合 CGL 方程式. 結合強度 $K = 25$ で見られる欠陥カオス状態. (a) は複素平面上の振動子の状態 W_j のスナップショット, (b) は振幅の大きさ $|W_j|$ のスナップショットを振動子の番号 j に対してプロット, (c) は振幅パターン $|W_j|$ の時間発展の濃淡プロット (横軸は j , 縦軸が時間).

線形成長率の実部 $\text{Re } \lambda_{\pm}$ を x の関数とみてプロットすると, 図6に示したような曲線が得られる. この曲線自体は結合行列 G_{jk} の具体的な形にはよらず, 異なるネットワークに共通である. 特に x が小さいとき, $\lambda_+(x)$ は

$$\lambda_+(x) = -(1 + c_1 c_2)x + \dots \quad (33)$$

と展開されるので, $1 + c_1 c_2 < 0$ であれば, $\text{Re } \lambda_+(x)$ は $x = -K\Lambda^{(\alpha)}$ が小さい時に正の値を取る. この条件は, 連続媒質上の CGL 方程式 (9) における拡散誘起不安定性の条件として知られる Benjamin-Feir 条件 [2] と同じものである. 図6はパラメータが $c_1 = -2, c_2 = 2$ の時のもので, この条件を満たしている. ただし, 今は有限個のノードからなるネットワークを考えているので, 結合行列の固有値は離散的であり, 実際の線形成長率は, 具体的なネットワーク毎の固有値 $\Lambda^{(\alpha)}$ ($\alpha = 1, \dots, N$) に応じて, これらの曲線上に分布する. このとき, いずれかの固有値 $\Lambda^{(\alpha)}$ が, 実際に線形成長率 $\lambda_+(x = -K\Lambda^{(\alpha)})$ の実部を正とする範囲にある時のみ, 対応する固有モードが不安定化する. つまり, 拡散誘起不安定性を起こさせるためには, 結合強度 K をうまく選ぶ必要がある.

3.2 数値計算

以上述べたように, 拡散誘起不安定性自体は任意のネットワーク結合 CGL 方程式で生じ得るが, 実際に不安定化するモードの形状や, 非線形領域での時間発展は, 結合ネットワークのトポロジーに強く依存し, 系によって非常に異なる. 以下, 上で挙げた4つの結合行列の場合について, 知られている事実や数値計算結果をごく簡単に述べる. ネットワークのサイズはいずれも $N = 500$ で, 結合強度以外のパラメータは Benjamin-Feir 不安定な $c_1 = -2, c_2 = 2$ に固定する.

3.2.1 局所結合複素 CGL 方程式

一次元リング上の局所結合振動子系を考え、振動子 $j = N + 1$ と振動子 $j = 1$ を同一視する周期境界条件を課すと、 G_{jk} の固有値は

$$\Lambda^{(\alpha)} = -4 \sin^2 \frac{2\pi(\alpha-1)}{N} \quad (\alpha = 1, \dots, N) \quad (34)$$

となり、固有ベクトルは平面波 $\phi_j^{(\alpha)} \propto \exp[2\pi i(\alpha-1)j/N]$ で与えられる [16]. 結合強度を $K = 25$ とする. 線形成長率の実部 $\text{Re } \lambda_{\pm}(x = -K\Lambda^{(\alpha)})$ を図 6(a) に示す. 結合行列の固有値 $\Lambda^{(\alpha)}$ が実際に $\text{Re } \lambda_{+}$ を正とする領域に存在するので、一様解は不安定化する. 図 7 に直接数値計算の結果を示す. 結合強度がある程度強ければ、ネットワーク CGL 方程式 (8) の挙動は連続媒質版の CGL 方程式 (9) に良く似ており、図示した欠陥乱流状態などが観察される. 連続版の CGL 方程式 (9) に関しては、他にも非線形波動やソリトンのようなホール解 (野崎—戸次解), 振幅がほぼ一定のまま位相のみが乱れる位相乱流状態, 空間 2 次元の系で現れるスパイラル解や空間 3 次元の系で現れるスクロール解など、様々なことが知られている. 詳しくは文献 [1, 2, 3, 9, 10, 11]などを参照.

3.2.2 大域結合複素 CGL 方程式

この場合、 G_{jk} の固有値は、0 がひとつと、 $N - 1$ 重に縮退した $-N$ で与えられる：

$$\Lambda^{(1)} = 0, \quad \Lambda^{(\alpha)} = -N \quad (\alpha = 2, \dots, N) \quad (35)$$

図 6(b) に結合強度を $K = 0.001$ での線形成長率の実部 $\text{Re } \lambda_{\pm}(x = -K\Lambda^{(\alpha)})$ を示す. 結合行列の固有値はふたつの値しか取り得ず、うちひとつはゼロなので、 $N - 1$ 重に縮退した固有値 $\Lambda^{(\alpha)} = -N$ が $\text{Re } \lambda_{+}(x = KN)$ を正とする部分に現れるような適切な範囲の結合強度 K においてのみ、完全同期解が不安定化する.

図 8 に、 $K = 0.001$ の場合と $K = 0.002$ の場合の直接数値計算の結果を示す. いずれの場合も完全同期解は不安定化しており、 $K = 0.001$ では全振動子が不規則な回転運動を続ける集団カオス状態、 $K = 0.002$ では各振動子がふたつのグループのどちらかに分離して規則的に回転する 2 クラスター状態となっている. これらの状況は、系自身の生成するほぼ周期的に変動する平均場を周期的な外力と読み替えて解析することが可能であり、また、その周期や振幅を自己

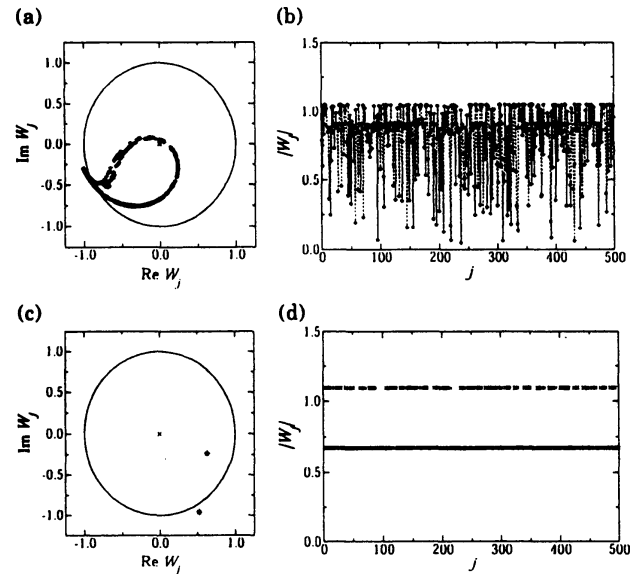


図 8 大域結合 CGL 方程式. (a), (b): 結合強度 $K = 0.001$ で見られるカオス状態, (c), (d): $K = 0.002$ で見られるクラスター状態. (a), (c) は複素平面上の振動子の状態 W_j のスナップショット, (b), (d) は振動子の番号 j に対して振幅の大きさ $|W_j|$ をプロット.

に回転する 2 クラスター状態となっている. これらの状況は、系自身の生成するほぼ周期的に変動する平均場を周期的な外力と読み替えて解析することが可能であり、また、その周期や振幅を自己

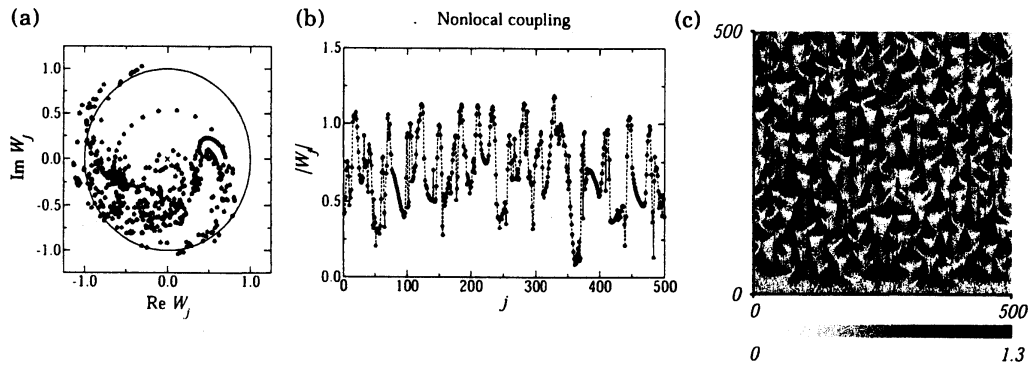


図9 非局所結合 CGL 方程式. 結合強度 $K = 0.06$ における特異な時空カオス状態. (a) は複素平面上の振動子の状態 W_j のスナップショット, (b) は振幅の大きさ $|W_j|$ のスナップショットを振動子の番号 j に対してプロット, (c) は振幅パターン $|W_j|$ の時間発展の濃淡プロット (横軸は j , 縦軸が時間).

無撞着に決める解析も行われている. 詳しくは, Hakim & Rappel, 中川 & 蔵本, Chabanol *et al.* などの文献 [18] を参照.

3.2.3 非局所結合 CGL 方程式

再び一次元リング上の振動子系を考え, 振動子 j を振動子 $j + mN$ (m は整数) と同一視する周期境界条件をとる. 重み関数として指数的に減衰する形

$$g(|j - k|) = \exp\{-\gamma|j - k|\} \quad (36)$$

を考えよう. ここで γ は結合距離の逆数を与え, $\gamma = 1/8$ とする. この場合も固有ベクトルは平面波で, 固有値も解析的に求められるが, 表式はやや複雑なので書かない. 結合強度を $K = 0.06$ とする. 図 6(c) に線形成長率の実部 $\text{Re } \lambda_{\pm}(x = -K\Lambda^{(\alpha)})$ の分布を示す. 適当に結合強度 K を選べば完全同期解が不安定化することが分かる. 図 9 に直接数値計算の結果を示す. 局所結合系の場合とは異なり, この系においては振動子の数を増やしても振幅パターンの連続性は保証されず, 所々に長時間持続する不連続な構造が残る. 詳しい解析によると, 適当な結合強度 K の範囲で振幅パターンはフラクタルとなっており, その次元が K とともに連続的に変化することなどが知られている. その機構は, 非局所平均場のカオス的な長波長揺らぎをノイズと見なした確率微分方程式の解析によって, ある程度は説明できる. 詳細は, 蔵本, Battogtokh, 中尾等の文献 [21] を参照.

3.2.4 スケールフリーネットワーク結合 CGL 方程式

ランダムなネットワーク結合の例として, スケールフリーネットワーク結合を考える (図 10). 数値計算では, Barabási-Albert のアルゴリズム [20] により, 平均次数が $\langle d \rangle = 20$ となるように生成したネットワークを使い, 最大次数 $d_{\max} = 118$, 最小次数 $d_{\min} = 10$ であった. 図 6(d) に, $K = 0.04$ での線形成長率の実部 $\text{Re } \lambda_{\pm}(x = -K\Lambda^{(\alpha)})$ の分布を示す. やはり適当に結合強度 K を選べば完全同期解を不安定化させられることが分かる.

図 11 に $K = 0.02$ と $K = 0.04$ の場合の数値計算結果を示す。ここで、ネットワーク上の振動子の振幅パターンをノード番号に対してプロットされているが、その際、ノード番号を、次数が $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_N$ と大きい順に並ぶようにソートしてある。これにより、ネットワーク上のパターンがある程度構造を保って可視化される。結合強度 $K = 0.02$ ではネットワーク上での部分振動停止状態が生じており、小さなノード番号の振動子集団 (大きな次数を持つハブ的な振動子のグループ) が振動を停止し、その他の振動子はばらばらに回転している。 $K = 0.04$ ではネットワーク上のカオス的な状況となっており、小さなノード番号 (大きな次数) と大きなノード番号 (小さな次数) の振動子はある程度落ち着いているのに対し、中間的なノード番号の値 (中間的な次数を持つミドルクラスの振動子集団) はカオティックに激しく揺らいでいる。これらの現象については、ネットワークの次数不均一性を取り入れた平均場近似と、大域結合の場合と同様な周期外力を受ける個々の振動子の分岐図を併用することにより、ある程度説明する事ができる。詳しくは中尾 & Mikhailov [21] を参照。

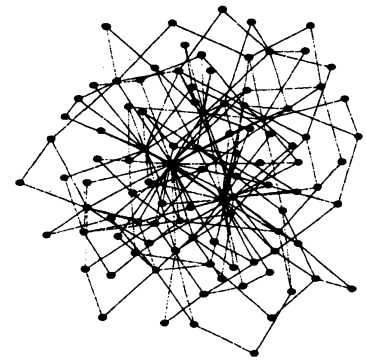


図 10 Barabási-Albert アルゴリズムで生成したスケールフリーネットワーク

4 まとめ

ネットワークを通じて拡散結合したりミットサイクル振動子モデルを、Hopf 分岐点近傍において縮約した振幅方程式である複素 Ginzburg-Landau 振動子系について述べた。ネットワークとして、(i) 局所結合、(ii) 大域結合、(iii) 非局所結合、(iv) スケールフリーネットワーク結合、の 4 つの場合を考えた。いずれの場合も、Benjamin-Feir 条件下で完全同期解が不安定化した。不安定化後のダイナミクスはネットワークの結合パターンに強く依存し、(i) の場合には欠陥乱流と呼ばれる時空カオス状態、(ii) の場合にはクラスタリングや集団カオス状態、(iii) の場合にはフラクタルで不連続な振幅パターンを持つ特異な時空カオス状態、(iv) の場合には次数不均一性に応じた非一様な部分振動停止状態やカオス状態が観察された。

なお、以上の結果のうち、(i) については 30 年近く前、(ii) については 20 年近く前、(iii) についても 10 年前には得られていた結果であ

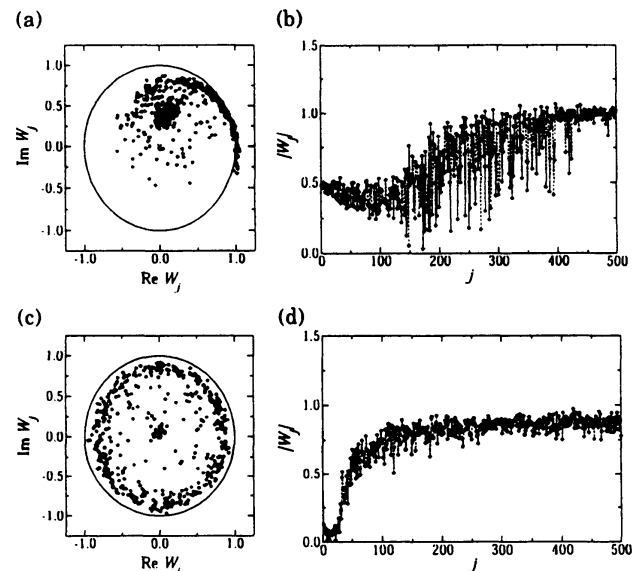


図 11 スケールフリーネットワーク結合 CGL 方程式. (a), (b): 結合強度 $K = 0.02$ で見られる部分振動停止状態, (c), (d): $K = 0.04$ で見られるカオス状態. (a), (c) は複素平面上の振動子の状態 W_j のスナップショット, (b), (d) はノードに対して振幅の大きさ $|W_j|$ のスナップショットをプロット。

り, (iv) のスケールフリーネットワーク結合に関する結果のみ, 筆者が最近得たものである. (iv) の結果自体も, 一見目新しいが, (i)-(iii) のような他の CGL 方程式に関する過去の研究を知っていれば, それほど驚くものではなく, スケールフリーネットワークの平均場理論と過去の大域結合 CGL 方程式に関する知見を併せれば, 直観的には容易に理解できるものである. 筆者が最近になって (iv) の研究を行った理由は, 近年ブームとなっている複雑ネットワーク上の自律要素系の研究に偏りを感じていたからである. これまでに複雑ネットワーク上で相互作用するカオス振動子系や位相振動子系の完全同期状態に関する非常に多くの研究が行われてきたが, ネットワーク上の一様ではないダイナミクスに関する研究は数えるほどしかない. しかしながら, 完全同期状態は, ネットワークダイナミクスの中でも最も単純なものに過ぎない. 実世界に幅広く存在することが明らかとなっている複雑ネットワーク構造 [4, 5, 7, 20] の機能的意義の理解という目標に向かう次の一歩として, ネットワーク結合自律要素系において内在的な不安定性によって自己組織的に生成される非一様なダイナミクスの理解は重要な課題だと思われる.

謝辞: 興味深い研究会を組織して頂いた斉木吉隆博士に感謝いたします.

参考文献

- [1] A. T. Winfree, *The Geometry of Biological Time* (Springer-Verlag, New York, 2001).
- [2] Y. Kuramoto, *Chemical Oscillation, Waves, and Turbulence* (republished by Dover, New York, 2003).
- [3] A. Pikovsky, M. Rosenblum, and J. Kurths, *Synchronization* (Cambridge University Press, Cambridge, 2001).
- [4] S. H. Strogatz, *Nature* **410**, 268 (2001).
- [5] S. Boccaletti *et al.*, *Phys. Rep.* **366**, 1 (2002).
- [6] A. Arenas *et al.*, *Phys. Rep.* **469**, 93 (2008).
- [7] A. Barrat, M. Barthélemy, and A. Vespignani, *Dynamical Processes on Complex Networks*, (Cambridge University Press, Cambridge, 2008).
- [8] 中尾裕也, 「複雑ネットワーク上の結合振動子系のダイナミクス」, 数理解析研究所講究録 (収録予定), <http://www.ton.scphys.kyoto-u.ac.jp/~nakao/Etc/kokyuroku-200908-nii.pdf>
- [9] 森肇・蔵本由紀, 「散逸構造とカオス」, 岩波書店 (1993).
- [10] 太田隆夫, 「非平衡系の物理学」, 裳華房 (2000).
- [11] I. S. Aranson and L. Kramer, *Rev. Mod. Phys.* **74**, 99 (2002).
- [12] 中尾裕也, 「非線形振動子の位相縮約理論とその応用」, システム/制御/情報 **53**, 316 (2009), <http://www.ton.scphys.kyoto-u.ac.jp/~nakao/papers.html>
- [13] 蔵本由紀, 「新しい自然学」, 岩波書店 (2003).
- [14] A. M. Turing, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London B* **237**, 37 (1952).

- [15] Y. Kuramoto and T. Tsuzuki, Prog. Theoret. Phys. **52**, 1399 (1974).
- [16] H. Fujisaka and T. Yamada, Prog. Theoret. Phys. **69**, 32 (1983).
- [17] M. Kim, *et. al.*, Science **202**, 1357 (2001).
- [18] V. Hakim and W. -J. Rappel, Phys. Rev. A **46**, R7347 (1992); N. Nakagawa and Y. Kuramoto, Prog. Theoret. Phys. **89**, 313 (1993); M. -L. Chabanol, V. Hakim, and W. -J. Rappel, Physica D **103**, 273 (1997).
- [19] Y. Kuramoto, Prog. Theoret. Phys. **94**, 321 (1995); Y. Kuramoto and H. Nakao, Phys. Rev. Lett. **76**, 4352 (1996); Y. Kuramoto and H. Nakao, Phys. Rev. Lett. **81**, 3543 (1998); H. Nakao, Chaos **9**, 902 (1999) ; Y. Kuramoto, H. Nakao, and D. Battogtokh, Physica A **288**, 244 (2000).
- [20] R. Albert and A. -L. Barabási, Rev. Mod. Phys. **74**, 47 (2002).
- [21] H. Nakao and A. S. Mikhailov, Phys. Rev. E **79**, 036214 (2009).

付録：ネットワーク結合 CGL 方程式の導出

蔵本のテキスト “Chemical oscillations, Waves, and Turbulence” [2] で説明されている多重時間スケール展開法に従って、ネットワーク結合振動子系 (2) を、各振動子の超臨界 Hopf 分岐点近傍で、ネットワーク CGL 方程式 (8) に縮約する。テキストでは連続媒質上の反応拡散系が扱われているが、その拡散項の部分で、連続系における微分演算子からネットワーク上の拡散結合項に変更して適当なスケールリングを仮定することだけが唯一異なる点である。

この方法は、Hopf 分岐点近傍の振動子のダイナミクスから速い調和振動成分を取り除いて、その複素振幅のみに着目し、これが分岐パラメータの臨界点からのずれや他の振動子との相互作用の効果によってゆっくり変動するダイナミクスを取り出すもので、他にも平均化法、中心多様体理論、繰り込み群の方法など、同種の方程式を導く様々な手法が存在する [2, 3, 9, 10, 11].

結合がない場合 ($\mathbf{D} = 0$)、振動子 j ($= 1, \dots, N$) は、

$$\dot{\mathbf{X}}_j(t) = \mathbf{F}(\mathbf{X}_j; \mu) \quad (37)$$

に従う。この方程式は、 $\mu < 0$ で

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}^S; \mu) = 0 \quad (38)$$

を満たす線形安定な固定点 $\mathbf{X}^S(\mu)$ を持ち、この固定点が $\mu = 0$ で Hopf 分岐を起こすとする。分岐点直上で、固定点からのずれを

$$\mathbf{u}_j(t) = \mathbf{X}_j(t) - \mathbf{X}^S(\mu = 0) \quad (39)$$

と置いて線形化する：

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}_j(t) = L_0 \mathbf{u}_j, \quad (L_0)_{ab} = \left. \frac{\partial F_a(\mathbf{X}; 0)}{\partial X_b} \right|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}^S(0)} \quad (40)$$

ここで a や b はベクトルや行列の成分を表す。Hopf 分岐なので、固定点の Jacobi 行列 L_0 は純虚数固有値のペア $\pm i\omega$ を持つ。固有値 $i\omega$ に対応する固有ベクトルを U_0 とすると、その複素共役 $\bar{U}_0$ は固有値 $-i\omega$ に対応する固有ベクトルである：

$$L_0 U_0 = i\omega U_0, \quad L_0 \bar{U}_0 = -i\omega \bar{U}_0 \quad (41)$$

これらを用いて、式 (40) の解である調和振動は

$$u_j(t) = W_j U_0 e^{i\omega t} + c.c. \quad (42)$$

と書ける。ここで、 W_j が固定点からのずれの複素振幅。また、ベクトル

$$U(t) = U_0 e^{i\omega t}, \quad \bar{U}(t) = \bar{U}_0 e^{-i\omega t} \quad (43)$$

を定義すると、線形演算子

$$\tilde{L}_0 = L_0 - \frac{\partial}{\partial t} \quad (44)$$

に対して

$$\tilde{L}_0 U(t) = 0, \quad \tilde{L}_0 \bar{U}(t) = 0, \quad (45)$$

を満たすので、どちらも $\tilde{L}_0$ のゼロ固有関数となっている。後で必要になるので、 $\tilde{L}_0$ の adjoint 演算子 $\tilde{L}_0^*$ とその固有関数も導入しておく。Hopf 周期を $T = 2\pi/\omega$ として、周期 T の関数の空間を考え（よって発散する永年項を持つような関数は含まれない）、内積を

$$\langle A(t), B(t) \rangle = \int_0^T A(t) \cdot B(t) dt \quad (46)$$

と一周期 T の積分で定義すると、

$$\int_0^T A(t) \cdot \left(L_0 - \frac{\partial}{\partial t} \right) B(t) dt = \int_0^T \left(L_0^t + \frac{\partial}{\partial t} \right) A(t) \cdot B(t) dt \quad (47)$$

なので、 $\tilde{L}_0^*$ は以下の式で与えられる：

$$\tilde{L}_0^* = L_0^t + \frac{\partial}{\partial t} \quad (48)$$

ここで L_0^t は L_0 の転置行列で、 L_0 と同じ固有値の組を持つ。うち $\pm i\omega$ に対応する固有ベクトルを

$$L_0^t U_0^* = i\omega U_0^*, \quad L_0^t \bar{U}_0^* = -i\omega \bar{U}_0^* \quad (49)$$

と定義し、

$$U_0^* \cdot U_0 = 1, \quad \bar{U}_0^* \cdot \bar{U}_0 = 1 \quad (50)$$

と規格化しておく。これらより

$$U^*(t) = U_0^* e^{-i\omega t}, \quad \bar{U}^*(t) = \bar{U}_0^* e^{i\omega t} \quad (51)$$

と定義すれば, これらは

$$\tilde{L}_0^* \mathbf{U}^*(t) = 0, \quad \tilde{L}_0^* \bar{\mathbf{U}}^*(t) = 0, \quad (52)$$

を満たすので, $\tilde{L}_0^*$ のゼロ固有関数となっている. 式 (2) を非線形項まで展開すると,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}_j(t) &= \mathbf{F}(\mathbf{X}^S + \mathbf{u}_j; \mu) + \mathbf{D} \sum_{k=1}^N G_{jk} \{\mathbf{X}^S + \mathbf{u}_k\} \\ &= \mathbf{F}(\mathbf{X}^S; \mu) + \mathbf{D} \sum_{k=1}^N G_{jk} \mathbf{X}^S + L\mathbf{u}_j + M\mathbf{u}_j\mathbf{u}_j + N\mathbf{u}_j\mathbf{u}_j\mathbf{u}_j + \cdots + \mathbf{D} \sum_{k=1}^N G_{jk} \mathbf{u}_k \\ &= L\mathbf{u}_j + M\mathbf{u}_j\mathbf{u}_j + N\mathbf{u}_j\mathbf{u}_j\mathbf{u}_j + \cdots + \mathbf{D} \sum_{k=1}^N G_{jk} \mathbf{u}_k \end{aligned} \quad (53)$$

ここで,

$$(L\mathbf{u}_j)_a = \sum_{b=1}^m \frac{\partial F_a(\mathbf{X}; \mu)}{\partial X_b} \Big|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}^S(\mu)} (\mathbf{u}_j)_b \quad (54)$$

$$(M\mathbf{u}_j\mathbf{u}_j)_a = \sum_{b=1}^m \sum_{c=1}^m \frac{\partial^2 F_a(\mathbf{X}; \mu)}{\partial X_b \partial X_c} \Big|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}^S(\mu)} (\mathbf{u}_j)_b (\mathbf{u}_j)_c \quad (55)$$

$$(N\mathbf{u}_j\mathbf{u}_j\mathbf{u}_j)_a = \sum_{b=1}^m \sum_{c=1}^m \sum_{d=1}^m \frac{\partial^3 F_a(\mathbf{X}; \mu)}{\partial X_b \partial X_c \partial X_d} \Big|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}^S(\mu)} (\mathbf{u}_j)_b (\mathbf{u}_j)_c (\mathbf{u}_j)_d \quad (56)$$

という略記法を用い, $\sum_{k=1}^N G_{jk} = 0$ を使った. μ が Hopf 分岐点 $\mu = 0$ 近傍にあることを明示するため, 小さなパラメータ ϵ を用いて,

$$\mu \rightarrow \epsilon^2 \mu \quad (57)$$

と書き直す. また, $\mathbf{u}$ と $\mathbf{F}$ を

$$\mathbf{u} = \epsilon \mathbf{u}^{(1)} + \epsilon^2 \mathbf{u}^{(2)} + \cdots \quad (58)$$

$$F_a(\mathbf{X}; \mu) = F_a(\mathbf{X}; 0) + \epsilon^2 \mu \left(\frac{\partial F_a(\mathbf{X}; \mu)}{\partial \mu} \Big|_{\mu=0} \right) + \cdots \quad (59)$$

と展開し, 係数 L_{ab} , M_{abc} , N_{abcd} も

$$\begin{aligned} L &= L_0 + \epsilon^2 \mu L_1 + \cdots, \\ M &= M_0 + \epsilon^2 \mu M_1 + \cdots, \\ N &= N_0 + \epsilon^2 \mu N_1 + \cdots, \end{aligned} \quad (60)$$

と展開する．ここで， L_0 は式 (40) で導入した Jacobi 行列で， L_1 は

$$(L_1)_{ab} = \frac{\partial}{\partial \mu} \frac{\partial F_a(\mathbf{X}; 0)}{\partial X_b} \Big|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}^S(0)} \quad (61)$$

である．さらに，重要な仮定として，振動子間の拡散結合の効果も分岐点からの距離 ϵ と同程度の大きさとなる状況に注目することにして，拡散定数の行列 $\mathbf{D}$ を

$$\mathbf{D} \rightarrow \epsilon^2 \mathbf{D} \quad (62)$$

とおく．この仮定により，Hopf 分岐により生じるリミットサイクルの振幅と他の振動子からの拡散結合による影響が $O(\epsilon^3)$ で釣り合い，ネットワーク複素 CGL 方程式はこのスケーリングのもとで導出される（蔵本のテキストの連続媒質における CGL 方程式の導出では，拡散行列の大きさは変えず，むしろ適当な空間スケールを選んでいる）．複素振幅のゆっくりした運動を取り出すため，遅い時間スケール τ を導入して多重時間スケール展開する．

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial \tau} \quad (63)$$

とにおいて，全ての展開式を式 (53) に代入すると，

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \left(\epsilon \mathbf{u}_j^{(1)} + \epsilon^2 \mathbf{u}_j^{(2)} + \dots \right) \\ &= (L_0 + \epsilon^2 \mu L_1 + \dots) \left(\epsilon \mathbf{u}_j^{(1)} + \epsilon^2 \mathbf{u}_j^{(2)} + \dots \right) + \epsilon^2 \mathbf{D} \sum_{k=1}^N G_{jk} \left(\epsilon \mathbf{u}_k^{(1)} + \epsilon^2 \mathbf{u}_k^{(2)} + \dots \right) \\ &+ (M_0 + \epsilon^2 \mu M_1 + \dots) \left(\epsilon \mathbf{u}_j^{(1)} + \epsilon^2 \mathbf{u}_j^{(2)} + \dots \right) \left(\epsilon \mathbf{u}_j^{(1)} + \epsilon^2 \mathbf{u}_j^{(2)} + \dots \right) \\ &+ (N_0 + \epsilon^2 \mu N_1 + \dots) \left(\epsilon \mathbf{u}_j^{(1)} + \epsilon^2 \mathbf{u}_j^{(2)} + \dots \right) \left(\epsilon \mathbf{u}_j^{(1)} + \epsilon^2 \mathbf{u}_j^{(2)} + \dots \right) \left(\epsilon \mathbf{u}_j^{(1)} + \epsilon^2 \mathbf{u}_j^{(2)} + \dots \right) \end{aligned} \quad (64)$$

となる．これを ϵ の次数毎に整理すると，

$$O(\epsilon) : \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}_j^{(1)}(t) = L_0 \mathbf{u}_j^{(1)} \quad (65)$$

$$O(\epsilon^2) : \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}_j^{(2)}(t) = L_0 \mathbf{u}_j^{(2)} + M_0 \mathbf{u}_j^{(1)} \mathbf{u}_j^{(1)} \quad (66)$$

$$\begin{aligned} O(\epsilon^3) : \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}_j^{(3)}(t) + \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{u}_j^{(1)}(t) &= L_0 \mathbf{u}_j^{(3)} + \mu L_1 \mathbf{u}_j^{(1)} + \mathbf{D} \sum_{k=1}^N G_{jk} \mathbf{u}_k^{(1)} \\ &+ 2M_0 \mathbf{u}_j^{(1)} \mathbf{u}_j^{(2)} + N_0 \mathbf{u}_j^{(1)} \mathbf{u}_j^{(1)} \mathbf{u}_j^{(1)} \end{aligned} \quad (67)$$

$\tilde{L}_0 = L_0 - \partial/\partial t$ を使って書き直すと

$$O(\epsilon) : \tilde{L}_0 \mathbf{u}_j^{(1)}(t) = \mathbf{B}_j^{(1)}(t), \quad \mathbf{B}_j^{(1)}(t) = \mathbf{0} \quad (68)$$

$$O(\epsilon^2) : \tilde{L}_0 \mathbf{u}_j^{(2)}(t) = \mathbf{B}_j^{(2)}(t), \quad \mathbf{B}_j^{(2)}(t) = -M_0 \mathbf{u}_j^{(1)} \mathbf{u}_j^{(1)} \quad (69)$$

$$O(\epsilon^3) : \tilde{L}_0 \mathbf{u}_j^{(3)}(t) = \mathbf{B}_j^{(3)}(t), \quad (70)$$

$$\mathbf{B}_j^{(3)}(t) = \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - \mu L_1 \right) \mathbf{u}_j^{(1)} - \mathbf{D} \sum_{k=1}^N G_{jk} \mathbf{u}_k^{(1)} - 2M_0 \mathbf{u}_j^{(1)} \mathbf{u}_j^{(2)} - N_0 \mathbf{u}_j^{(1)} \mathbf{u}_j^{(1)} \mathbf{u}_j^{(1)}$$

ここで, $\mathbf{B}_j^{(1,2,3)}(t)$ を定義した. 以上の式は, ϵ の各オーダーで,

$$\tilde{L}_0 \mathbf{u}_j^{(\nu)}(t) = \mathbf{B}_j^{(\nu)}(t) \quad (71)$$

という線形方程式の形になっている. Fredholm の定理によると, 線形方程式 $\tilde{L}_0 \mathbf{u}(t) = \mathbf{b}(t)$ が解を持つためには, $\tilde{L}_0^* \mathbf{v}^*(t) = 0$ を満たす全てのゼロ固有ベクトル $\mathbf{v}^*(t)$ に対して, $\langle \mathbf{v}^*(t), \mathbf{b}(t) \rangle = 0$ が成り立つ必要があり, 今の場合,

$$\langle \mathbf{U}^*(t), \mathbf{B}_j^{(\nu)}(t) \rangle = \int_0^T \mathbf{U}_0^* e^{-i\omega t} \cdot \mathbf{B}_j^{(\nu)} dt = 0 \quad (72)$$

が可解条件となる (これが成り立てば, 複素共役をとることにより, もう一方のゼロ固有ベクトル $\bar{\mathbf{U}}^*(t)$ と $\mathbf{B}_j^{(\nu)}(t)$ の内積もゼロとなる). まず $O(\epsilon)$ の線形方程式 (68) の可解条件は

$$\langle \mathbf{U}^*(t), \mathbf{B}_j^{(1)}(t) \rangle = \int_0^T \mathbf{U}_0^* e^{-i\omega t} \cdot \mathbf{0} dt = 0 \quad (73)$$

なので最初から満たされており, その解は既に求めた分岐点直上の調和振動

$$\mathbf{u}_j^{(1)}(t) = W_j(\tau) \mathbf{U}_0 e^{i\omega t} + c.c. \quad (74)$$

である. ここで, 分岐点からのずれや結合の影響を取り入れるため, 複素振幅 W_j を定数ではなくゆっくり変化する時間 τ の関数と見なす. $O(\epsilon^2)$ の線形方程式 (69) の可解条件は

$$\langle \mathbf{U}^*(t), \mathbf{B}_j^{(2)}(t) \rangle = \int_0^T \mathbf{U}_0^* e^{-i\omega t} \cdot \left\{ -M_0 \mathbf{u}_j^{(1)} \mathbf{u}_j^{(1)} \right\} dt = 0 \quad (75)$$

だが, 右辺に現れた $-M_0 \mathbf{u}_j^{(1)}(t) \mathbf{u}_j^{(1)}(t)$ は, $e^{2i\omega t}$, 1 , $e^{-2i\omega t}$ のいずれかの付く項しか含まないので, $e^{\pm i\omega t}$ と掛けて積分すれば消えてしまい, やはり自動的に満たされている. $O(\epsilon^2)$ の線形方程式 (69) の解 $\mathbf{u}_j^{(2)}$ を実際に求めるために, これを

$$\mathbf{u}_j^{(2)}(t) = \sum_{\ell \neq \pm 1} e^{i\ell\omega t} (\mathbf{C}_j)_\ell \quad (76)$$

と Fourier 展開する. ここで $(\mathbf{C}_j)_\ell$ は Fourier 係数で, 可解条件を考えて, $\ell \neq \pm 1$ の項は最初から除外する. これを式 (69) に代入すると, $\mathbf{B}_j^{(2)}(t)$ の Fourier 係数を $(\mathbf{B}_j^{(2)})_\ell$ として,

$$(L_0 - i\ell\omega) \mathbf{C}_\ell = (\mathbf{B}_j^{(2)})_\ell \quad (77)$$

となる。ここで、 $\mathbf{B}_j^{(2)}(t)$ は $e^{2i\omega t}$, 1 , $e^{-2i\omega t}$ のどれかの成分しか持たないことから、

$$\begin{aligned} (\mathbf{B}_j^{(2)})_{+2} &= -W_j(\tau)^2 M_0 \mathbf{U}_0 \mathbf{U}_0 \\ (\mathbf{B}_j^{(2)})_0 &= -|W_j(\tau)|^2 M_0 \mathbf{U}_0 \bar{\mathbf{U}}_0 - |\bar{W}_j(\tau)|^2 M_0 \bar{\mathbf{U}}_0 \mathbf{U}_0 = -2|W_j(\tau)|^2 M_0 \mathbf{U}_0 \bar{\mathbf{U}}_0 \\ (\mathbf{B}_j^{(2)})_{-2} &= -\bar{W}_j(\tau)^2 M_0 \bar{\mathbf{U}}_0 \bar{\mathbf{U}}_0 \end{aligned} \quad (78)$$

となり、これら以外はゼロとなる。式 (77) の左辺の行列 $L_0 - i\ell\omega$ は、 $\ell \neq \pm 1$ の場合については逆行列を求められるので、これを $(L_0 - i\ell\omega)^{-1}$ と書くと、Fourier 係数は

$$\begin{aligned} (\mathbf{C}_j^{(2)})_{+2} &= -W_j(\tau)^2 (L_0 - 2i\omega)^{-1} M_0 \mathbf{U}_0 \mathbf{U}_0 =: -W_j(\tau)^2 \mathbf{V}_+ \\ (\mathbf{C}_j^{(2)})_0 &= -2|W_j(\tau)|^2 L_0^{-1} M_0 \mathbf{U}_0 \bar{\mathbf{U}}_0 =: -2|W_j(\tau)|^2 \mathbf{V}_0 \\ (\mathbf{C}_j^{(2)})_{-2} &= -\bar{W}_j(\tau)^2 (L_0 + 2i\omega)^{-1} M_0 \bar{\mathbf{U}}_0 \bar{\mathbf{U}}_0 =: -\bar{W}_j(\tau)^2 \mathbf{V}_- \end{aligned} \quad (79)$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_+ &= (L_0 - 2i\omega)^{-1} M_0 \mathbf{U}_0 \mathbf{U}_0 \\ \mathbf{V}_0 &= L_0^{-1} M_0 \mathbf{U}_0 \bar{\mathbf{U}}_0, \\ \mathbf{V}_- &= (L_0 + 2i\omega)^{-1} M_0 \bar{\mathbf{U}}_0 \bar{\mathbf{U}}_0 \end{aligned} \quad (80)$$

を定義した。よって (69) の解は

$$\mathbf{u}_j^{(2)}(t) = -W_j(\tau)^2 \mathbf{V}_+ e^{2i\omega t} - 2|W_j(\tau)|^2 \mathbf{V}_0 - \bar{W}_j(\tau)^2 \mathbf{V}_- e^{-2i\omega t} \quad (81)$$

と書ける。これを $\mathbf{B}_j^{(3)}(t)$ に代入すると、

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_j^{(3)}(t) &= \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - \mu L_1 \right) \mathbf{u}_j^{(1)} - \mathbf{D} \sum_{k=1}^N G_{jk} \mathbf{u}_k^{(1)} - 2M_0 \mathbf{u}_j^{(1)} \mathbf{u}_j^{(2)} - N_0 \mathbf{u}_j^{(1)} \mathbf{u}_j^{(1)} \mathbf{u}_j^{(1)} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - \mu L_1 \right) \{W_j(\tau) \mathbf{U}_0 e^{i\omega t} + c.c.\} - \mathbf{D} \sum_{k=1}^N G_{jk} \{W_k(\tau) \mathbf{U}_0 e^{i\omega t} + c.c.\} \\ &\quad - N_0 \{W_j(\tau) \mathbf{U}_0 e^{i\omega t} + c.c.\}^3 \\ &\quad + 2M_0 \{W_j(\tau) \mathbf{U}_0 e^{i\omega t} + c.c.\} \{W_j(\tau)^2 \mathbf{V}_+ e^{2i\omega t} + 2|W_j(\tau)|^2 \mathbf{V}_0 + \bar{W}_j(\tau)^2 \mathbf{V}_- e^{-2i\omega t}\} \end{aligned} \quad (82)$$

となる。 $O(\epsilon^3)$ の線形方程式 (70) の可解条件は

$$\langle \mathbf{U}^*(t), \mathbf{B}_j^{(3)}(t) \rangle = \int_0^T \mathbf{U}_0^* e^{-i\omega t} \cdot \mathbf{B}_j^{(3)}(t) dt = 0 \quad (83)$$

なので、上式を代入して積分すると、結局、 $e^{i\omega t}$ を含む項のみ残り、 $\mathbf{U}_0^* \cdot \mathbf{U}_0 = 1$ より、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} W_j(\tau) - \mu (\mathbf{U}_0^* \cdot L_1 \mathbf{U}_0) W_j(\tau) - (\mathbf{U}_0^* \cdot \mathbf{D} \mathbf{U}_0) \sum_{k=1}^N G_{jk} W_k(\tau) - 3W_j(\tau)^2 \bar{W}_j(\tau) (\mathbf{U}_0^* \cdot N_0 \mathbf{U}_0 \mathbf{U}_0 \bar{\mathbf{U}}_0) \\ + 4W_j(\tau) |W_j(\tau)|^2 \{ \mathbf{U}_0^* \cdot M_0 \mathbf{U}_0 \mathbf{V}_0 + 2\bar{W}_j(\tau) W_j(\tau)^2 \mathbf{U}_0^* \cdot M_0 \bar{\mathbf{U}}_0 \mathbf{V}_+ \} = 0 \end{aligned} \quad (84)$$

これが満たされていれば、周期 T を持つ $O(\epsilon^3)$ の摂動解 $\mathbf{u}_j^{(3)}(t)$ が求められるはずだが、ここでの計算では必要ない。上記の可解条件を整理すると、

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} W_j(\tau) = \mu (\mathbf{U}_0^* \cdot L_1 \mathbf{U}_0) W_j(\tau) + (\mathbf{U}_0^* \cdot \mathbf{D} \mathbf{U}_0) \sum_{k=1}^N G_{jk} W_k(\tau) \\ - |W_j(\tau)|^2 W_j(\tau) \{ -3\mathbf{U}_0^* \cdot N_0 \mathbf{U}_0 \mathbf{U}_0 \bar{\mathbf{U}}_0 + 4\mathbf{U}_0^* \cdot M_0 \mathbf{U}_0 \mathbf{V}_0 + 2\mathbf{U}_0^* \cdot M_0 \bar{\mathbf{U}}_0 \mathbf{V}_+ \} \end{aligned} \quad (85)$$

と複素 Ginzburg-Landau 方程式の形をしている。このように、分岐点の近傍で、分岐点直上で中立安定だった調和振動解への摂動が (発散せずに) 周期的な解を持つという条件より、複素振幅 $W(\tau)$ の従う式が得られる。定数

$$\lambda_1 = \mathbf{U}_0^* \cdot L_1 \mathbf{U}_0 \quad (86)$$

$$h = \mathbf{U}_0^* \cdot \mathbf{D} \mathbf{U}_0 \quad (87)$$

$$g = -3\mathbf{U}_0^* \cdot N_0 \mathbf{U}_0 \mathbf{U}_0 \bar{\mathbf{U}}_0 + 4\mathbf{U}_0^* \cdot M_0 \mathbf{U}_0 \mathbf{V}_0 + 2\mathbf{U}_0^* \cdot M_0 \bar{\mathbf{U}}_0 \mathbf{V}_+ \quad (88)$$

を定義すると、

$$\frac{d}{d\tau} W_j(\tau) = \mu \lambda_1 W_j(\tau) - g |W_j(\tau)|^2 W_j(\tau) + h \sum_{k=1}^N G_{jk} W_k(\tau) \quad (89)$$

と表せる。 $\text{Re } g > 0$ ならば Hopf 分岐は超臨界となり、分岐点近傍では 3 次の非線形性に抑えられた小さな振幅のリミットサイクルが生じる。時間の変数を $\tau \rightarrow t$ と置き換え、他の変数等を適当にリスケールすることにより、

$$\frac{d}{dt} W_j(t) = W_j(t) - (1 + ic_2) |W_j(t)|^2 W_j(t) + K(1 + ic_1) \sum_{k=1}^N G_{jk} W_k(t) \quad (90)$$

という標準形 (8) が得られる。ここで $c_1, c_2, K \in \mathbf{R}$ は、リスケール前の CGL 方程式 (89) のパラメータ $\mu \in \mathbf{R}, g, h \in \mathbf{C}$ から決まるパラメータとリスケールした結合強度である。