

解析的な第一積分

東大 理 高野 恭一

この講演の目的は、非線型（解析的）常微分方程式の大域的性質について、W. Kaplan の研究の一部 ([4], [5]) を紹介することである。

§1. 序.

考える方程式は

$$(1) \quad \frac{dw}{dz} = f(z, w)$$

で、 z は complex variable, w , f は complex n -vectors, $f(z, w)$ は entire あるいは meromorphic としておく。

よく知られているように、Bruns ([2], [8]) は 3 体問題において、6 個の重心積分、3 個の角運動量積分、1 個のエネルギー積分以外には、代数的な積分が存在しないこと、また Poincaré ([6], [8]), Siegel ([9]) は制限 3 体問題において、Jacobi の積分以外には、一価 正則な、あるいは代数的な積分が存在しないことをそれぞれ証明している。（解の存在定

理と一意性定理より, local に積分が存在するのは, 自明で、
 ここで問題にしているのは, global な積分である。)

Bruno, Poincaré, Siegel の結果は, 一般の多価正則な
 積分の存在を排除している訳ではない。Kaplan は, 積分の
 定義を拡張して, その存在を考察している。Kaplan のいう積分
 とは 『 $\mathbb{C}^{n+1}$ 上で, measure の なる点を除いたところで定
義され, そゝで多価正則な定数でない関数で, 解の上で定数
となるもの』である。

積分の存在を示すためには, 初期条件 (z^0, w^0) なる (1) の解
 $w = g(z; z^0, w^0)$ がどこまで解析接続できるか, 考察する必要が
 ある。そこで, 次の定義をあらかじめしておく。

$$E(z^0) \equiv \bigcup_{w^0 \in \mathbb{C}^n} \{ (z, w) \in \mathbb{C}^{n+1} ; w = g(z; z^0, w^0) \}$$

としたとき,

Def. ほとんどすべての z^0 に対して, $\mu(\mathbb{C}^{n+1} - E(z^0)) = 0$
(μ : Lebesgue measure) なるとき, (1) は Property A をもつ
という。

以下, $n=1$ の場合と $n \geq 2$ の場合と, 別々に扱うが, 使
 う道具は, Painlevé の定理, unit disk 上での bounded type
 は meromorphic function に関する諸定理, Fubini の定理な
 どである。

§ 2. $n=1$ の場合

Th.1 $f(z, w) \in \text{entire}$ とすると、(1) の任意の解、

$w = g(z; z^0, w^0)$ は、measure 0 の $E(\subset \mathbb{C})$ を除いて

$\mathbb{C}$ 上解析接続できる。

(証明略). $w = g(z; z^0, w^0)$ とあるべき道にそって可能なかぎり解析接続して之を open Riemann 面 $\mathcal{R}$ とし、 $\mathcal{R}$ の universal covering surface $\mathcal{R}^*$ とし、 $\mathcal{R}^* \ni$

$$z = \varphi^*(\zeta), \quad w = \psi^*(\zeta), \quad |\zeta| < \rho, \quad (\rho=1 \text{ or } \infty)$$

とあるべき。

E の capacity が positive とし矛盾を導く。まず $\rho=1$, φ^* : bounded type であることがわかる。よって、 φ^* は $|\zeta|=1$ 上の measure zero の点を除いて、nontangential な道にそって近づいたとき、finite limit をもつ。この道にそって ζ を境界に近づけたとき、Painlevé の定理から、 $\psi^*(\zeta) \rightarrow \infty$ i.e. $\frac{1}{\psi^*(\zeta)} \rightarrow 0$. Meier の定理を用いると、ほとんどどこか $\mathcal{R}$ の θ において、 $\frac{1}{\psi^*(\zeta)}$ (従って $\psi^*(\zeta)$) は任意の Stolz 領域 $S(\theta)$ 内で、0 を除いた (従って ∞ を除いた) あるべき道に無限回とる。再び Painlevé の定理を用いると、矛盾 (Q.E.D.)

Th.1 と Fubini の定理を用いると、たゞちに、

Th.2 $f(z, w) \in \text{entire}$ とすれば、(1) は Property A をもつ

Th.2 より、ある z^0 を適当にとると、 $\mu(\mathbb{C}^2 - E(z^0)) = 0$ であるから、ほとんどすべての (z, w) に対して、 z^0 と z を結ぶ道 $\gamma(z, w, z^0)$ とある (但し w^0 が存在して、 $g(z; z^0, w^0)$ は $\gamma(z, w, z^0)$ にそって、 (z, w) まで接続可能。 (z, w) に対して、この w^0 を対応させる関数を $g(z, w)$ とおくと、 $g(z, w)$ は明らかに、Kaplan の def. による積分である。よって、

Th.3 $f(z, w)$ は entire と可換は (1) は積分をもつ。

§3. $n=1$ と $n \geq 2$ の相違、Iversen property など。

$n=1$ の場合、既に見したように、Property A をもつが、M. Turchescu ([31]) は、 $f(z, w)$ が meromorphic である、とも (1) は Iversen property をもつことを示した。Iversen property とは

「(1) の任意の解 $g(z; z^0, w^0)$ は、 z^0 から出発する道 γ を任意にとったとき、 γ に $11 < \epsilon$ とも近い道にそって解析接続できる」

ことである。

この節では、Bieberbach-Fatou の定理を用いて、 $n \geq 2$ の場合には、Property A も、Iversen property ももたない例を示す。

す。Bieberbach-Fatou の写像とは、 $\mathbb{C}^2$ から $\mathbb{C}^2$ の中への bi-holomorphic な写像で、その像写像 I が外点をもつものである。 $(\square 1)$ 。この写像を次のようにかく。

$$\begin{aligned} \phi_1(w_1, w_2) &= z_1 \\ \phi_2(w_1, w_2) &= z_2 \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{l} f_1(z_1, z_2) = w_1 \\ f_2(z_1, z_2) = w_2 \end{array} \right)$$

$$(w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2, \quad (z_1, z_2) \in I.$$

z_2 を fix すると。

$$\frac{dw_k}{dz_1} = \frac{\partial f_k}{\partial z_1}(\phi_1(w_1, w_2), \phi_2(w_1, w_2)) \quad k=1, 2$$

であるから、

$$F_k(w_1, w_2) \equiv \frac{\partial f_k}{\partial z_1}(\phi_1(w_1, w_2), \phi_2(w_1, w_2)) \quad k=1, 2$$

と置く。 F_k は entire である。 $z = z^0$

$$(2) \quad \frac{dw_k}{dz_1} = F_k(w_1, w_2) \quad k=1, 2$$

上の方程式を解く。 $\mathbb{C}^2 - I \supset U$ nonempty, open
ととり、 $V \equiv \{(z_1, w_1, w_2); (z_1^0 - z_1 + \phi_1(w_1, w_2), \phi_2(w_1, w_2)) \in U\}$ とする。
 V は $\mathbb{C}^3$ の中での nonempty open set である。

$$E(z_1^0) \cap V = \emptyset.$$

であることは明らかである。 i.e. 方程式 (2) に ∂ しては、

$$\left[\forall z_1^0 \text{ に } \partial \text{ して } \mu(\mathbb{C}^3 - E(z_1^0)) > 0 \right]$$

であるより明らか。 (2) に ∂ しては、Property A と Inverse Property が成立しない。

§4. $n \geq 2$ の場合の結果.

Th.4 $f(z, w)$ は $\mathbb{C}^{n+1}$ で meromorphic とする. ほとんど必ず
 $\forall z$ の (z^0, w^0) に対して, (1) の解 $w = g(z; z^0, w^0)$ は, ほと
 んど必ず $\forall z$ の z へ解析接続できる. であるとする.
 (1) は n 個の独立な積分 $g_k(z, w)$ $k=1, \dots, n$ をもつ.

(証明). Fubini の定理より, ほとんど必ず $\forall z^0$ にお
 して, $\mu(\mathbb{C}^n - E(z^0)) = 0$. あとは Th.3 と同様. (Q.E.D.)

次に, autonomous system

$$(3) \quad \frac{dw}{dz} = f(w)$$

を考える. $f(w)$ は $\mathbb{C}^n$ 上で analytic とする. 次の Lemma
 は, かんたんに証明できる.

Lemma. $\mathbb{C}$ 上の道 : $z = z(t)$, $0 \leq t < 1$ をとる. 初期は
 (z^0, w^0) ($z^0 = z(0)$, $w^0 = w(z(0))$), なる解 $z, w(z(t))$ とし
 たとき, $t \rightarrow 1-$ のとき, $w(z(t))$ が finite limit w^1 に
 もつとする. もし $z(t)$ が $t \rightarrow 1-$ のとき finite limit に
 いたらず w^1 は f の zero 点である.

Th.4 と上の Lemma を用いると, 次の定理を得る.

Th.5 $f(w)$ は entire $\mathbb{C}^n$ かつその zero 点は高々可算
 個とすると, (3) は $n-1$ 個の積分 $g_k(w)$, $k=1, \dots, n-1$ をもつ.

(証明概略). 設 $w = g(z; z^0, w^0)$ ($f(w^0) \neq 0$) に對して、Riemann 面 R , その上の universal covering surface R^* が与えられる。 R^* は次のように表わせる。

$$z = \varphi^*(\zeta), \quad w = \psi^*(\zeta), \quad |\zeta| < \rho, \quad \rho = 1, \infty.$$

少なくとも1つの $\psi_k^*(\zeta)$ は、ほとんどすべての ζ の値をとるとを示す。

(i) $\rho = 1$ の場合。

少なくとも1つの $\psi_k^*(\zeta)$ は unbounded type であることを示せば十分。すべての $\psi_k^*(\zeta)$ が bounded type とすると、ほとんどすべての ζ の $|\zeta| = 1$ に對して、 $\psi^*(\zeta)$ は、finite radial limit をもつ。また、 $\psi^*(\zeta)$ は non-constant で、 $f(w)$ の zero 点は countable であるから、ほとんどすべての ζ の $|\zeta| = 1$ に對して、 $\psi^*(\zeta)$ は、 $f(w)$ の zero 点で finite radial limit をもつ。このようにして、 $\zeta = e^{i\theta}$ に對して、 $\psi^*(\zeta)$ は、finite radial limit をもたない。(Painlevé の定理より)。

よって、Lemma より、 $\psi^*(\zeta)$ の limit は $f(w)$ の zero 点でなければならぬ。これは矛盾。

(ii) $\rho = \infty$ のときは、Picard の定理が明か。

上の $k \in n$ としよ。 $z = z^0$

$$(4) \quad \frac{dw_k}{dw_n} = \frac{g_k(w)}{g_n(w)} \quad k=1, \dots, (n-1),$$

を考へると、今示したことは、ほとんどすべての w^0 ($f(w^0) \neq 0$)

$f(w)$ を z^2 対し、(4) の解は z と w の w_n に解析接続できる。従って Th. 4 より本定理が之である。(Q.E.D.)

autonomous system には 3 Th.5 の "non-autonomous system (1) には 2 次の定理がある。

Th.6. $f(z, w)$ is entire とすれば, (1) は n 個の独立な
積分 $y_k(z, w)$, $k=1, \dots, n$ をもつ.

(2) 证明: $z = W_{n+1}$ 与 x, y, z 构成 autonomous system

$$\frac{dw_k}{dz} = f_k(w_{n+1}, w_1, \dots, w_n), \quad k=1, \dots, n, \quad \frac{dw_{n+1}}{dz} = 1$$

$$g^m \geq h, (f_1, \dots, f_m, 1) \text{ a zero point is. } (a, E, v,)$$

(3), (2) の否定は: $f(w)/g(w)$, $f(z, w)/g(z, w)$ の場合
 にも, ($g(w)$, $g(z, w)$ は scalar 関数), f, g が entire
 $g \neq 0$, かつ $f(w)$ が $z=0$ は $(f(z, w), g(z, w))$ の zero 点, かつ
 関数 f/g が $z=0$ 可算個 z あり. Th. 5, Th. 6 は正しい. 証明は後
 略.

文献

- [1] Bochner & Martin, Several complex variables,
p. 45 - p. 48, Princeton.
- [2] Bruns, Acta Math. 11 p. 25

- [3] M. Turchescu, Asupra funcțiilor analitice definite prin ecuații diferențiale nealgebrice, Bul. Ști. Sect. Ști. Mat. Fiz. 7 (1955), 347-354.
- [4] W. Kaplan, Analytic ordinary differential equations in the large, Proceedings of United States-Japan Seminar on Differential and Functional Equations, W. A. Benjamin, Inc., New York, 1969, 133-151.
- [5] W. Kaplan, Analytic first integrals of ordinary differential equations, Comment. Math. Helv. 47 (1972), 205-212.
- [6] Poincaré, Acta Math. 13 p. 259 ~
- [7] C. L. Siegel, Über die algebraischen Integrale des restringierten Dreikörperproblems, Trans. Amer. Math. Soc. 39 (1936) 225-233.
- [8] E. T. Whittaker, Analytical Dynamics, Cambridge Univ. Press.