

有限連結領域上の Shapiro-Shields 型定理

新潟大学大学院 自然科学研究科 羽鳥 理 (Osamu Hatori)

序. ここでは単位開円板 D 上の補間列に関する Shapiro-Shields [3] による結果について

(1) 有限連結領域上の結果に拡張する (2) weight を他のものにかえられるか考察する.

Shapiro-Shields の定理. Shapiro-Shields [3] は $H^\infty(D)$ に関する補間列と $H^p(D)$ に関する weight 付きの補間列が一致することを示した.

定理 (Shapiro-Shields) $\{z_n\}$ を D の点列とするとき以下は同値である.

(1) $\{z_n\}$ は $H^\infty(D)$ に関する補間列である.

(2) $1 \leq p < \infty$ なるある p について

$$\{\{f(z_n)(1 - |z_n|)^{1/p}\} : f \in H^p(D)\} = \ell^p$$

がなりたつ.

(3) $1 \leq p < \infty$ なる任意の p について

$$\{\{f(z_n)(1 - |z_n|)^{1/p}\} : f \in H^p(D)\} = \ell^p$$

がなりたつ.

Shapiro-Shields の定理における weight $(1 - |z_n|)^{1/p}$ は一般の領域では意味を成さないが $(1 - |z_n|)^{1/p} \sim -\log |z_n|$ であることに注意すれば weight を Green 関数の $1/p$ べきとすれば一般の領域上でも定式化できる. 以下ではこの方向での拡張を与える. また、他の weight に置き換えることの可能性も探りたい.

有限連結領域への拡張. 以下では R は finite bordered Riemann surface で境界 ∂R は有限個の解析曲線からなるものとする. また、 $a \in R$ に対して a に極を持つ R 上の Green 関数を $g_R(\cdot; a)$ により表わす.

定理 1 $a \in R$ で $\{z_n\}$ は $R \setminus \{a\}$ の点列とする. このとき以下は同値である.

(1) $\{z_n\}$ は $H^\infty(R)$ に対する補間列である. つまり、 $\{\{f(z_n)\} : f \in H^\infty(R)\} = \ell^\infty$.

(1') $\ell^1 \subset \{\{f(z_n)\} : f \in H^\infty(R)\}$.

(2) $1 \leq p < \infty$ なるある p に対して

$$\{\{f(z_n)g_R(z_n; a)^{1/p}\} : f \in H^p(R)\} = \ell^p.$$

(2') $1 \leq p < \infty$ なるある p に対して

$$\ell^1 \subset \{\{f(z_n)g_R(z_n; a)^{1/p}\} : f \in H^p(R)\}.$$

(3) $1 \leq p < \infty$ なる任意の p に対して

$$\{\{f(z_n)g_R(z_n; a)^{1/p}\} : f \in H^p(R)\} = \ell^p.$$

(3') $1 \leq p < \infty$ なる任意の p に対して

$$\ell^1 \subset \{\{f(z_n)g_R(z_n; a)^{1/p}\} : f \in H^p(R)\}.$$

この定理を証明するのに次の補題を用いる.

補題 2 $1 \leq q \leq \infty$ とする. $\{z_n\}$ を R の点列とする. $\{c_n\}$ を 0 でない複素数の点列とする. $\{f_n\}$ は $H^q(R)$ の関数列とする. $\sum |a_n c_n| < \infty$ なる任意の複素数列 $\{a_n\}$ に対して

$f \in H^q(R)$ が存在して $\sum a_n f_n$ が $\{z_n\}$ 上 f に各点収束したとする. このとき正数 M と $H^q(R)$ の関数列 $\{\tilde{f}_n\}$ で各 k, n について

$$f_n(z_k) = \tilde{f}_n(z_k)$$

$$\|\tilde{f}_k\|_q \leq M|c_k|$$

をみたすものが存在する.

証明. $S = \{z_n\}$ とおくと $H^q(R)|_S$ は商ノルムに関して Banach 空間である.

まず、 $c_n = 1$ の場合を考える. 各 $\{a_n\} \in \ell^1$ に対して $\sum a_n f_n$ が S 上各点収束する $f \in H^q(R)$ の S への制限を対応させる写像を

$$T: \ell^1 \rightarrow H^q(R)|_S$$

とすると、閉グラフ定理により T は有界線形作用素であることが分かる. よって各 k に対して

$$\|T(\{\delta_{nk}\}_{n=1}^\infty)\|_{H^q(R)|_S} \leq \|T\|$$

となるが、 $T(\{\delta_{nk}\}) = f_k|_S$ なので商ノルムの定義より

$$\|\tilde{f}_k\|_q \leq \|T\|$$

$$\tilde{f}_k = f \quad \text{on } S$$

となる $\tilde{f}_k \in H^q(R)$ が存在する. そこで $M = \|T\|$ とおけばよい.

次に、一般の c_n に対する証明を与える. $g_n = f_n/c_n$ とおく. 任意の $\{a_n\} \in \ell^1$ に対して条件より $f \in H^q(R)$ が存在して $\sum a_n g_n$ は $\{z_n\}$ 上 f に各点収束する. よって前半の結果よ

り正数 M と $\tilde{g}_n \in H^q(R)$ が存在して

$$\|\tilde{g}_n\|_q \leq M$$

$$\tilde{g}_n = g_n \quad \text{on } S$$

が成立する. $\tilde{f}_n = c_n \tilde{g}_n$ が求める関数である.

定理 1 の証明. (1') または (2') $\Rightarrow$ (1) について. Stout の定理 [4, Theorem 5.6] と Narita の定理 [2, Theorem 1] により $\{z_n\}$ が局所的に補間列 ($\tilde{R}$ を $R \cup \partial R$ を含む Riemann surface としたとき、任意の $z \in \partial R$ に対して $\tilde{R}$ における近傍 U が存在し、 $U \cap \{z_n\}$ が $H^\infty(R \cap U)$ に関する補間列である) であることを示せば十分である. さらに、 $U \cap R$ は D と等角同値で $\{z_n\} \subset U$ で $\{z_n\}$ の集積点が $U \cap \partial R$ にのみあると仮定して一般性を失わないのでそうする. $a' \in U \cap R \setminus \{z_n\}$ をひとつとり固定すると

$$g_{U \cap R}(z_n; a') \sim g_R(z_n; a)$$

である. つまり、正数 M が存在して

$$1/M < g_{U \cap R}(z_n; a')/g_R(z_n; a) < M$$

が成立する. また、 $H^p(R)|_{U \cap R} \subset H^p(U \cap R)$ なので (2') より

$$\ell^1 \subset \{ \{f(z_n) g_{U \cap R}(z_n; a')^{1/p}\} : f \in H^p(U \cap R) \}$$

である. $U \cap R$ は D と等角同値なので (2') $\Rightarrow$ (1) は $R = D$ の場合に示せばよいことになる.

(1') $\Rightarrow$ (1) についても同様である. よって以下では $R = D$ とする. また、 $p = \infty$ のとき

$g_D(z_n; a)^{1/p}$ は1を表わすことにする. 各自然数 k に対して $\{g_D(z_n; a)^{1/p} \delta_{kn}\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^1$ なので条件より $f_k(z_n) = \delta_{kn}$ をみたす $f_k \in H^p(D)$ が存在する.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| g_D(z_n; a)^{1/p} < \infty$$

なる任意の複素数列 $\{a_n\}$ に対して $f(z_n) = a_n$ なる $f \in H^p(D)$ が存在する. $\sum a_n f_n$ は $\{z_k\}$ 上 f に各点収束するので補題2より正数 M と $H^p(D)$ の関数列 $\{\tilde{f}_n\}$ で

$$f_n(z_k) = \tilde{f}_n(z_k), \quad \|\tilde{f}_n\|_p \leq M g_D(z_n; a)^{1/p}$$

なるものが存在する. $p = \infty$ の場合このことは $\{z_n\}$ が uniformly separated であることを示しているので Carleson の補間列に関する定理 [1] より (1) がわかる. $p < \infty$ の場合は以下のようなものである. 正数 K が存在して不等式

$$|f(z) g_D(z; a)^{1/p}| \leq K \|f\|_p$$

が任意の $f \in H^p(D)$ と $z \in D \setminus \{a\}$ に対して成立するので $\tilde{f}_n$ の Blaschke part を $\tilde{B}_n$ とすると

$$\left| \frac{g_D(z_n; a)^{1/p}}{\tilde{B}_n(z_n)} \right| = \left| \frac{\tilde{f}_n(z_n)}{\tilde{B}_n(z_n)} g_D(z_n; a)^{1/p} \right| \leq K \|\tilde{f}_n / \tilde{B}_n\|_p = K \|\tilde{f}_n\|_p \leq K M g_D(z_n; a)^{1/p}$$

が、したがって

$$|\tilde{B}_n(z_n)| \geq 1/(KM)$$

が各 n に対して成立する. $\|\tilde{B}_n\|_{\infty} = 1$ なので $\{z_n\}$ は uniformly separated である事が分かり、(1) が成立する.

(1) $\Rightarrow$ (3) について. 前と同様 $U \cap R$ は D と等角同値、 $\{z_n\} \subset U \cap R$ 、 $\{z_n\}$ の集積点 $\subset U \cap \partial R$ としてよいのでそうする. すると Shapiro-Shields の定理より

$$\{\{f(z_n)g_{U \cap R}(z_n; a)^{1/p}\} : f \in H^p(U \cap R)\} = \ell^p$$

であり、 $g_{U \cap R}(z_n; a) \sim g_R(z_n; a)$ 、 $H^p(R)|_{U \cap R} \subset H^p(U \cap R)$ なので

$$\{\{f(z_n)g_R(z_n; a)^{1/p}\} : f \in H^p(R)\} \subset \ell^p$$

である. h を R 上の Ahlfors 関数とする. U を小さくとることにより h は $U \cap R$ で単射であるとしてよいのでそうする. $\{z_n\}$ は $H^\infty(R)$ に対する補間列なので $H^\infty(U \cap R)$ に対するそれでもある. h は $R \cup \partial R$ で正則に拡張できるので以上より $\{h(z_n)\}$ は $H^\infty(D)$ に対する補間列となる. ふたたび Shapiro-Shields の定理より

$$\{\{f(h(z_n))g_D(h(z_n); h(a))^{1/p}\} : f \in H^p(D)\} = \ell^p$$

となり

$$g_D(h(z_n); h(a)) \sim g_{h(U \cap R)}(h(z_n); h(a)) = g_{U \cap R}(z_n; a) \sim g_R(z_n; a)$$

で

$$\{f \circ h : f \in H^p(D)\} \subset H^p(R)$$

だから

$$\ell^p \subset \{\{f(z_n)g_R(z_n; a)^{1/p}\} : f \in H^p(R)\}$$

となるので (3) がわかる.

(3) $\Rightarrow$ (3') $\Rightarrow$ (2'), (1) $\Rightarrow$ (1'), (3) $\Rightarrow$ (2) は自明なので以上で定理 1 の証明ができた.

weight $g_r(\cdot; a)^{1/p}$ について. 以下では定理 1 などに現れる weight $g_r(\cdot; a)^{1/p}$ についての結果を紹介する. 任意の $f \in H^p(R)$ に対して $\{f(z_n)g_R(z_n; a)^{1/p}\} \in \ell^\infty$ であるがこの条件をみたし Shapiro-Shields 型定理の成立する weight の境界挙動は $g_R(\cdot; a)^{1/p}$ と同値であることがわかった.

定理 3 $\{c_n\}$ を複素数列とする. このとき次が成立する.

(i) $\ell^1 \subset \{\{f(z_n)c_n\} : f \in H^\infty(R)\} \subset \ell^\infty$ とすると $c_n \sim 1$ である. さらに $\{\{f(z_n)c_n\} : f \in H^\infty(R)\} = \ell^\infty$ である.

(ii) $1 \leq p < \infty$ とする. $\ell^1 \subset \{\{f(z_n)c_n\} : f \in H^p(R)\} \subset \ell^\infty$ とすると任意の $a \in R \setminus \{z_n\}$ に対して $|c_n| \sim g_R(z_n; a)^{1/p}$ である. さらに, $\{\{f(z_n)c_n\} : f \in H^p(R)\} = \ell^p$ である.

証明. (ii) の証明を与える. (i) も同様に証明できることを注意しておく. $\ell^1 \subset \{\{f(z_n)c_n\} : f \in H^p(R)\}$ なので $c_n \neq 0$ である. つぎに正数 K が存在して

$$|c_n| \leq K g_R(z_n; a)^{1/p}$$

がなりたつ. 実際もしそうでないと仮定すると, $\{z_n\}$ の部分列 $\{z_{n(m)}\}$ で

$$m^3 g_R(z_{n(m)}; a)^{1/p} \leq |c_{n(m)}|$$

なるものが存在する. とくに $\{z_{n(m)}\}$ は H^∞ に対する補間列であるとしてもよいのでそうする. すると定理 1 より

$$\{\{f(z_{n(m)})g_R(z_{n(m)}; a)^{1/p}\} : f \in H^p(R)\} = \ell^p$$

となるが, $\{m^{-2/p}\} \in \ell^p$ なので

$$f(z_{n(m)})g_R(z_{n(m)}; a)^{1/p} = m^{-2/p}$$

なる $f \in H^p(R)$ が存在する. よって $m \rightarrow \infty$ のとき

$$|f(z_{n(m)})c_{n(m)}| \geq m^{3-2/p} \rightarrow \infty$$

となるが, これは $\{f(z_n)c_n\}$ の有界性に矛盾する.

また, 正数 K' が存在して不等式

$$g_R(z_n; a)^{1/p} \leq K'|c_n|$$

が成立することを示す. もし成り立たないとすると $\{z_n\}$ の部分列 $\{z_{n(m)}\}$ で

$$m^3|c_{n(m)}| \leq g_R(z_{n(m)}; a)^{1/p}$$

をみたすものがとれる.

$$a_n = \begin{cases} 0, & n \notin \{n(m)\}_{m=1}^{\infty}, \\ m^{-2}, & n = n(m). \end{cases}$$

とさだめると $\{a_n\} \in \ell^1$ なので条件から $a_n = f(z_n)c_n$ となる $f \in H^p(R)$ が存在する. とくに $m^{-2} = f(z_{n(m)})c_{n(m)}$ であるから

$$m \leq |f(z_{n(m)})g_R(z_{n(m)}; a)^{1/p}|$$

となり $\{f(z_n)g_R(z_n; a)^{1/p}\}$ の有界性に矛盾する. 以上より $|c_n| \sim g_R(z_n; a)^{1/p}$ が分かった.

したがって定理 1 より $\{\{f(z_n)c_n\} : f \in H^p(R)\} = \ell^p$ が成立する.

参考文献

- [1] L. Carleson, *An interpolation problem for bounded analytic functions*, Amer. J. Math. 80(1958), 921-930

- [2] J. Narita, *Interpolating sequences on planer domains*, Kodai Math. J. 13(1990), 311–316
- [3] H. S. Shapiro and A. L. Shields, *On some interpolation problems for analytic functions*, Amer. J. Math. 83(1961), 513–532
- [4] E. L. Stout, *Bounded holomorphic functions on finite Riemann surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 120(1965), 255–285