

複数の遅れを持つ非線形差分方程式の大域的安定性

早稲田大学理工学部 室谷義昭 (Yoshiaki Muroya)

Department of Mathematical Sciences, Waseda University

東京理科大学理学部 石渡恵美子 (Emiko Ishiwata)

Department of Mathematical Information Science, Tokyo University of Science

1 はじめに

変数遅れを持つ非線形差分方程式

$$\begin{cases} x(n+1) = x(n) - \sum_{j=0}^m a_j(n)f(x(n-j)), & n = 0, 1, 2, \dots, \\ x(j) = x_j \geq 0, & -m \leq j \leq 0, \quad \text{かつ} \quad x(0) = x_0 > 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

を考える. ここで, $f(x)$ は $(-\infty, +\infty)$ での狭義単調増加関数で

$$f(0) = 0 \quad \text{かつ} \quad f(x) \neq x \quad \text{ならば}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \text{ は有限である.} \quad (1.2)$$

また, $\{a_j(n)\}_{n=0}^{\infty}$, $0 \leq j \leq m$ は次の条件を満たすとする.

$$a_j(n) \geq 0, \quad \sum_{j=0}^m a_j(n) > 0 \quad \text{かつ} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^m a_j(n) = +\infty. \quad (1.3)$$

定義 1.1 (1.1) の零解が**一様安定**とは, 任意の $\varepsilon > 0$ と非負の整数 n_0 に対して, (1.1) の解 $\{x(n)\}_{n=0}^{\infty}$ が $|x(n)| < \varepsilon$, $n = n_0, n_0 + 1, \dots$ を満たす

$$\max\{|x(n_0 - j)| \mid j = -k, -k + 1, \dots, 0\} < \delta$$

となる $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ が存在することである.

定義 1.2 (1.1) の零解が**大域的吸引性**を持つとは, (1.1) のすべての解が $n \rightarrow \infty$ に対し, 0 に収束することである.

定義 1.3 (1.1) の零解が**大域的漸近安定**であるとは, 一様安定であり, かつ大域的吸引性を持つことである.

$f(x) = e^x - 1$ かつ $a_j(n) = ra_j/(\sum_{j=0}^n a_j)$, $0 \leq j \leq m$ の場合, Gopalsamy *et al.*[1] により, $r \leq \log 2/(m+1)$ が (1.1) の零解の大域的漸近安定性の十分条件であることが示されている. この条件は So and Yu [3] によって, 次のように改良されている.

定理 A (So and Yu [3]). (1.3) を満たす (1.1) に対し, $f(x) = e^x - 1$ と $a_j(n) = r(n)a_j/(\sum_{j=0}^n a_j)$ (a_j , $0 \leq j \leq m$ は定数) と

$$\sum_{k=n-m}^n \sum_{j=0}^m a_j(k) = \sum_{k=n-m}^n r(k) \leq \frac{3}{2}, \quad n \geq m \quad (1.4)$$

を仮定する. このとき, (1.1) の零解は大域的漸近安定である.

本報告では, (1.2) と (1.3) を満たす (1.1) の零解に対し, "3/2 条件" とは違った大域的漸近安定性の条件を示す. これは $f(x) = x$ の場合の Györi and Pituk [2] の結果を拡張している (定理 1.1 参照).

$$r_1 = \limsup_{n \geq 0} \sum_{j=0}^m a_j(n), \quad r_2 = \limsup_{n \geq m} \sum_{k=n-m}^{n-1} \sum_{j=0}^m a_j(k), \quad \varphi(x) = x - r_1 f(x) \quad (1.5)$$

とおくとき, 次の主定理を得る.

定理 1.1

$$\varphi(x) < 0, \quad x < 0 \quad (1.6)$$

かつ

$$\begin{cases} \varphi(-r_2 f(L)) - r_2 f(-r_2 f(L)) > L, & L < \hat{L}, \\ -r_2 f(-r_2 f(L)) > L, & \hat{L} \leq L < 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

を仮定する. ただし, $\varphi(x) < 0, x > 0$ ならば, $\hat{L} = 0$ とし, そうでなければ, $\hat{L} < 0$ は $\varphi(-r_2 f(\hat{L})) = 0$ により, 唯一つ決まるとする. このとき, (1.2) と (1.3) を満たす (1.1) の零解は大域的漸近安定性を持つ. 特に, $f(x) = e^x - 1$ に対して, (1.7) は

$$r_1 \leq r_2 \leq 1, \quad \text{かつ} \quad r_2 < \hat{R}(r_1) + \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \quad (1.8)$$

により満たされる. ここで, $\hat{R}(1) = 0$ かつ, $r_1 < 1$ に対して, $\hat{R}(r_1) = -r_2 f(\hat{L}) > 0$ は $\varphi(\hat{R}(r_1)) = 0$ により定義される.

条件 (1.8) は (1.4) とは違い, $r_1 \leq r_2 \leq 1$ であるが $r_1 + r_2 > \frac{3}{2}$ となる場合を含んでいる (図 1 参照). それゆえに, 定理 1.1 は So and Yu [3] の結果の拡張になっている.

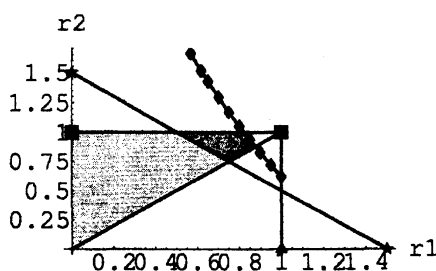


図 1: 条件 (1.8)

2 非線形差分方程式の大域的安定性

ここで, 非線形差分方程式 (1.1) の解の大域的安定性の条件を考える.

So and Yu [3] の方法を使って, 次の幾つかの補題を得る ([3] の補題 2.1, 2.2 や定理 3.1 を参照).

補題 2.1 $\{x(n)\}_{n=0}^{\infty}$ を (1.2) の条件の下で (1.1) の解とする. $x(n)$ がある時刻よりずっと 0 より大きい (小さい) ならば, $x(n)$ はある時刻よりずっと減少 (増加) し, かつ $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n)$ が存在し, $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = 0$ となる.

(証明) $x(n)$ がある時刻よりずっと 0 より大きいとする. (1.1) により,

$$x(n+1) - x(n) = - \sum_{j=0}^m a_j(n) f(x(n-j)) \leq - \sum_{j=0}^m a_j(n) f(0) = 0$$

は $x(n)$ がずっと減少することを示すので, $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n)$ が存在する. $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} x(n)$ とおき, $\alpha > 0$ を仮定すると, $x(n)$ は α にむかつてずっと減少するので, $x(n-j) \geq \alpha$, $\leq j \leq m$, $n \geq \bar{n}_1$ となる $\bar{n}_1 \geq 0$ が存在する.

これと (1.1) より,

$$x(n+1) - x(n) \leq - \sum_{j=0}^m a_j(n) f(\alpha), \quad n \geq \bar{n}_1.$$

$\bar{n}_1$ から $n-1$ までの和をとれば, $x(n) \leq x(\bar{n}_1) - (\sum_{k=\bar{n}_1}^{n-1} \sum_{j=0}^m a_j(k)) f(\alpha)$ となり, $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^m a_j(n) = +\infty$ より, $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = -\infty$ が示される. これは $\alpha > 0$ に矛盾する. よって, $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = 0$ が示される. $x(n)$ がずっと 0 より小さい場合も同様である. $\square$

補題 2.2 $f(x) \neq x$ かつ $\{x(n)\}_{n=0}^{\infty}$ を (1.2) と (1.3) を満たす (1.1) の解とする. $x(n)$ が 0 の周りで振動し, $\sup_{n \geq m} \sum_{k=n-m}^n \sum_{j=0}^m a_j(k) < +\infty$ となるならば, $x(n)$ は上にも下にも有界である.

(証明) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\beta > -\infty$ の場合を考える. (1.1)-(1.2) により,

$$x(n+1) - x(n) \leq \beta \sum_{j=0}^m a_j(n), \quad n \geq 0. \quad (2.1)$$

まず, $x(n)$ は上に有界であることを示そう. $\limsup_{n \rightarrow \infty} x(n) = +\infty$ を仮定すると, 補題 2.1 より, $x(n)$ は有界でなく振動する. よって,

$$x(\bar{n}_k) = \max_{0 \leq n \leq \bar{n}_k} x(n) > 0, \quad x(\bar{n}_k) \geq x(\bar{n}_k - 1) \quad \text{かつ} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} x(\bar{n}_k) = +\infty$$

を満たし, $\bar{n}_k \geq 0$ となる狭義単調増加整数列 $\{\bar{n}_k\}_{k=1}^{\infty}$ が存在する. このとき,

$$0 \leq x(\bar{n}_k) - x(\bar{n}_k - 1) = - \sum_{j=0}^m a_j(\bar{n}_k - 1) f(x(\bar{n}_k - 1 - j))$$

であり, $\sum_{j=0}^m a_j(\bar{n}_k - 1)f(x((\bar{n}_k - 1 - j))) \leq 0$ となる. これより, $x(\xi_k) \leq 0$ となる整数 $\xi_k \in [\bar{n}_k - 1 - m, \bar{n}_k - 1]$ が存在する. (2.1) を ξ_k から $\bar{n}_k - 1$ まで加えて, 次式を得る.

$$x(\bar{n}_k) \leq x(\xi_k) + \beta \sum_{i=\xi_k}^{\bar{n}_k-1} \sum_{j=0}^m a_j(i) \leq \beta\lambda.$$

したがって, $\limsup_{k \rightarrow \infty} x(\bar{n}_k) \leq \beta\lambda$ となる. これは $x(n)$ が上に有界であることに矛盾する. 同様な議論で, $x(n) \leq \beta\lambda, n \geq 0$ となることも示される. このように (1.1)-(1.3) より,

$$x(n+1) - x(n) \geq - \sum_{j=0}^m a_j(n)f(\beta\lambda), \quad n \geq 0. \quad (2.2)$$

次に, $x(n)$ が下に有界であることを示そう. $\liminf_{n \rightarrow \infty} x(n) = -\infty$ を仮定する. $x(n)$ が 0 の周りで振動するので, $\underline{n}_k \geq 0$ で

$$x(\underline{n}_k) = \min_{0 \leq n \leq \underline{n}_k} x(n) < 0, \quad x(\underline{n}_k) - x(\underline{n}_k - 1) \leq 0 \quad \text{かつ} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} x(\underline{n}_k) = -\infty$$

となる狭義単調増加整数列 $\{\underline{n}_k\}_{k=1}^{\infty}$ が存在する.

$$0 \geq x(\underline{n}_k) - x(\underline{n}_k - 1) = - \sum_{j=0}^m a_j(\underline{n}_k - 1)f(x(\underline{n}_k - 1 - j))$$

は $x(\eta_k) \geq 0$ となる $\eta_k \in [\underline{n}_k - 1 - m, \underline{n}_k - 1]$ が存在することを示す. (2.2) を η_k から $\underline{n}_k - 1$ まで加えることで, 次式を得る.

$$x(\underline{n}_k) \geq x(\eta_k) - \sum_{i=\eta_k}^{\underline{n}_k-1} \sum_{j=0}^m a_j(i)f(\beta\lambda) \geq -\lambda f(\beta\lambda).$$

したがって, $\liminf_{n \rightarrow \infty} x(n) \geq -\lambda f(\beta\lambda)$ となり, 矛盾する. これより, $x(n)$ は下に有界であり, 結論を得る. $\square$

注意 2.1 $f(x) \neq x$ ならば, 補題 2.2 により, (1.1) の任意の解 $x(n)$ は 0 のまわりで振動し, 上にも下にも有界である.

補題 2.3 (1.2) と (1.3) の条件の下で $\{x(n)\}_{n=0}^{\infty}$ を (1.1) の解とする. $|x(n+1)| > |x(n)|$ ならば,

$$\begin{cases} x(n+1) > 0 \text{ のとき, } x(g(n)) = \min_{0 \leq j \leq m} x(n-j) < 0, \\ x(n+1) < 0 \text{ のとき, } x(g(n)) = \max_{0 \leq j \leq m} x(n-j) > 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

となる整数 $g(n) \in [n-m, n]$ が存在する.

(証明) $x(n+1), x(n-j) \geq 0, 0 \leq j \leq m$ ならば, (1.1) により, $0 \leq x(n+1) \leq x(n)$ となる. また, $x(n+1), x(n-j) \leq 0, 0 \leq j \leq m$ ならば, (1.1) により, $0 \geq x(n+1) \geq x(n)$ となる. したがって, $|x(n+1)| > |x(n)|$ より (2.3) が成り立つ. $\square$

g の性質より, $n \geq m$ に対して $g(n) \geq 0$ となる.

補題 2.4 (1.6) を仮定し, (1.2) と (1.3) の条件の下で (1.1) の解 $x(n)$ が 0 の周りで振動するとする. ある実数 $L < 0$ に対して, $x(n) \geq L, n \geq n_L - m$ を満たす整数 $n_L \geq m$ が存在するならば, 十分大きな整数 $n \geq n_L$ に対して,

$$x(n+1) < R_L \quad \text{かつ} \quad x(n+1) \geq S_L \quad (2.4)$$

となる. ただし, R_L, S_L は

$$\begin{cases} R_L = -(\sup_{n \geq m} \sum_{k=n-m}^{n-1} \sum_{j=0}^m a_j(k)) f(L), \\ S_L = \min(R_L - (\sup_{n \geq m} \sum_{j=0}^m a_j(n)) f(R_L), 0) - (\sup_{n \geq m} \sum_{k=n-m}^{n-1} \sum_{j=0}^m a_j(k)) f(R_L). \end{cases} \quad (2.5)$$

特に, 十分大きな $n \geq m$ に対して,

$$x(n+1) < R_{-\infty} \quad \text{かつ} \quad x(n+1) > S_{-\infty} \quad (2.6)$$

となる. ただし,

$$\begin{cases} R_{-\infty} = -(\limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n-m}^{n-1} \sum_{j=0}^m a_j(k)) (\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)) < +\infty, \\ S_{-\infty} = \min(R_{-\infty} - (\limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^m a_j(n)) f(R_{-\infty}), 0) \\ \quad - (\limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n-m}^{n-1} \sum_{j=0}^m a_j(k)) f(R_{-\infty}) > -\infty. \end{cases} \quad (2.7)$$

(証明) 仮定より, $x(n+1) > 0$ と $|x(n+1)| > |x(n)|$ を満たす十分大きな整数 $n \geq n_L$ が存在し, 補題 2.3 より, $L \leq x(g(n)) = \min_{0 \leq j \leq m} x(n-j) < 0$ となる整数 $g(n) \in [n-m, n]$ が存在する. このとき, (1.1) より,

$$\begin{cases} x(n+1) \leq x(n) - (\sum_{j=0}^m a_j(n)) f(x(g(n))), \\ x(n) = x(n-1) - \sum_{j=0}^m a_j(n-1) f(x(n-1-j)), \\ \vdots \\ x(g(n)+1) = x(g(n)) - \sum_{j=0}^m a_j(g(n)) f(x(g(n)-j)). \end{cases}$$

このとき,

$$x(n+1) \leq x(g(n)) - \left(\sum_{j=0}^m a_j(n) \right) f(x(g(n))) - \sum_{k=g(n)}^{n-1} \sum_{j=0}^m a_j(k) f(x(k-j))$$

が成り立ち, (1.6) と $x(g(n)) < 0$ により, 次を仮定できる.

$$x(g(n)) - \left(\sum_{j=0}^m a_j(n) \right) f(x(g(n))) < 0.$$

それゆえに, 十分大きな整数 $n \geq n_L$ に対して,

$$x(n+1) < -\sup_{n \geq m} \left(\sum_{k=g(n)}^{n-1} \sum_{j=0}^m a_j(k) \right) f(L) \leq R_L.$$

同様に, $x(n+1) < 0$ と $|x(n+1)| > |x(n)|$ を満たす十分大きな整数 $n \geq n_L$ に対して, 補題 2.3 より, $0 < x(g(n)) = \max_{0 \leq j \leq n} x(n-j) \leq R_L$ となる整数 $g(n) \in [n-m, n]$ が存在し,

$$x(n+1) \geq x(g(n)) - \left(\sum_{j=0}^m a_j(n) \right) f(x(g(n))) - \sum_{k=g(n)}^{n-1} \sum_{j=0}^m a_j(k) f(x(k-j)).$$

ゆえに, 十分大きな整数 $n \geq n_L$ に対し,

$$x(n+1) \geq \min(R_L - \left(\sup_{n \geq m} \sum_{j=0}^m a_j(n) \right) f(R_L), 0) - \left(\sup_{n \geq m} \sum_{k=n-m}^{n-1} \sum_{j=0}^m a_j(k) \right) f(R_L) = S_L.$$

よって, (2.4) を得る. 同様に (2.6) も示される. $\square$

(定理 1.1 の証明) ある実数 $L < 0$ に対して, $x(n) \geq L$, $n \geq n_L - m$ となる整数 $n_L \geq m$ が存在するならば, 補題 2.4 より, (2.4) が成り立つ. 一方で,

$$S(x) = \min(\varphi(-r_2 f(x)), 0) - r_2 f(-r_2 f(x))$$

について, 任意の $x < 0$ に対して $S(x) > x$ が成り立つので, (1.7) が成り立つ. 単調反復法を適用することにより, $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = 0$, 及び, (1.1) の零解が大域的漸近安定性を持つ.

特に, $f(x) = e^x - 1$ の場合を考えよう. $\hat{L} \leq 0$ より, $\hat{R}(r_1) = -r_2 f(\hat{L}) = r_2(1 - e^{\hat{L}}) \leq r_2$ であり, $0 \leq x < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $x^2 + x - 1 < 0$ となるので, (1.8) は

$$x(x+1) \leq (r_2 - \hat{R}(r_1))\{(r_2 - \hat{R}(r_1)) + 1\} < 1, \quad 0 \leq x \leq r_2 - \hat{R}(r_1) = r_2 e^{\hat{L}}$$

を満たす.

$$h(x) = \{1 - (r_1 + r_2)e^{r_2 - x}\}(-x) - 1, \quad h(0) < 0$$

かつ $h(r_2) = \{1 - (r_1 + r_2)\}(-r_2) - 1 \leq 0$ と $h'(x) = -\{1 - (1+x)(r_1 + r_2)e^{r_2 - x}\} = 0$ となる $0 \leq x \leq r_2 - \hat{R}(r_1) = r_2 e^{\hat{L}}$ に対して,

$$h(x) = \left(1 - \frac{1}{1-x}\right)(-x) - 1 = \frac{x(x+1) - 1}{1-x} < 0.$$

それゆえに, $L < \hat{L}$ と $x = r_2 e^L < r_2 e^{\hat{L}}$ に対して,

$$\{1 - (r_1 + r_2)e^{-r_2 f(L)}\}(-r_2 e^L) - 1 \leq 0$$

すなわち,

$$\{1 - (r_1 + r_2)f'(-r_2 f(L))\}(-r_2 f'(L)) - 1 \leq 0, \quad L < \hat{L}. \quad (2.8)$$

一方で, $r_1, r_2 \leq 1$ より, $\hat{L} \leq L < 0$ に対して $\varphi(-r_2 f(L)) \geq 0$ ならば, $q(L) = -f(-f(L)) - L$ に対して,

$$-r_2 f(-r_2 f(L)) \geq -f(-f(L)) > L, \quad L < 0$$

となる. これは $L < 0$ について, $q'(L) = e^{L-f(L)} - 1 < 0$ かつ $q(L) > q(0) = 0$ となるためである. したがって, (1.7) の第 2 項が成り立つ. さらに (2.8) より,

$$\begin{aligned} \varphi(-r_2 f(L)) - r_2 f(-r_2 f(L)) - L &> \varphi(-r_2 f(\hat{L})) - r_2 f(-r_2 f(\hat{L})) - \hat{L} \\ &= -r_2 f(-r_2 f(\hat{L})) - \hat{L} > 0, \quad L < \hat{L}. \end{aligned}$$

よって, $f(x) = e^x - 1$ に対して, (1.8) は (1.7) を示している. $\square$

系 2.1 (cf. Györi and Pituk [2]) $f(x) = x$ に対して, (1.5) の $r_1, r_2 < 1$ ならば, $f(x) = x$ と (1.3) の条件の下で (1.1) の零解は大域的漸近安定である.

定理 1.1 の応用例として, 次の一つの変数遅れを持つ非線形差分方程式を考える.

$$\begin{cases} x(n+1) = x(n) - p(n)f(x(g(n))), & n = 0, 1, 2, \dots, \\ x(j) = x_j \geq 0, & g(0) \leq j \leq 0, \quad \text{かつ} \quad x(0) = x_0 > 0. \end{cases} \quad (2.9)$$

ただし, (1.2), $p(n) > 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} p(n) = +\infty$ と $\{g(n)\}_{n=0}^{\infty}$ は非減少整数列で $g(n) \leq n$, $n \geq 0$ かつ $\lim_{n \rightarrow \infty} g(n) = +\infty$ を仮定する.

系 2.2 (2.9) に対し, 定理 1.1 が成り立つ. ただし,

$$r_1 = \limsup_{n \geq 0} p(n), \quad r_2 = \limsup_{g(n) \geq 0} \sum_{j=g(n)}^{n-1} p(j). \quad (2.10)$$

参考文献

- [1] K. Gopalsamy, M. R. S. Kulenovic and G. Ladas, On a logistic equation with piecewise constant arguments, *Differential Integral Equations* 4 (1991), 215-223.
- [2] I. Györi and M. Pituk, Asymptotic stability in a linear delay difference equation, In *Proceedings of SICDEA*, Hungary, August 6-11, 1995, Gordon and Breach Science, Langhorne, PA, (1997).
- [3] J. W.-H. So and J. S. Yu, Global stability in a logistic equation with piecewise constant arguments, *Hokkaido Math. J.* 24 (1995), 269-286.