

Projective one-parameter family に対する
Deligne, Gabber, Beilinson-Bernstein の定理について

東大 理 高橋盛彦

$f: X \rightarrow Y$ を algebraic variety の間の proper morphism とする. $\underline{\underline{IC}}(X) = \underline{\underline{IC}}(X, \mathbb{C}_{X_{\text{reg}}})$ を X の Intersection cohomology の complex とすると このとき

$$Rf_* \underline{\underline{IC}}(X) = \bigoplus_{\alpha} \underline{\underline{IC}}(V_{\alpha}, L_{\alpha})[l_{\alpha}] \text{ in } D_c^b(\mathbb{C}_Y)$$

が成り立ち, さらに f が projective ならば Y に関して relative な hard Lefschetz が成り立つ. ただし, ここで V_{α} は Y の ^{closed} irreducible subvariety, L_{α} は V_{α} の Zariski open set 上の local system, l_{α} は integer である.

この結果は 著者の 4 人によつて mod p reduction を使うことでより証明された. (cf. [G-M] [B2])

ここでは 上の結果を X, Y が (nonsingular) complex manifold, f が projective, さらに $\dim Y = 1$ という条件の下で, analytically に証明する.

標数 0 の Weil Conjecture に 対応するのは Hodge Theory である。代数解析における De Rham 理論を使うことにより上の結果が base space に由る relative の Hodge filtration のみで成り立つことを示す。(ただし、同じ仮定の下で)。(cf. 2.3)

それについて少し詳しく説明すると、De Rham 理論で $H^k_f(X) \subset H^k(X)$ に 対応するのは Gauss-Manin system $\int_f \Omega_X$ であるが、 $\int_f \Omega_X$ は canonical に Hodge filtration $F^\bullet$ を持たず、 f が smooth ならば Griffiths-Schmid の variation of Hodge structure と一致する。このとき上の仮定の下で、 $F^\bullet$ は strictly compatible な filtration であることがわかり、さらに、 $F^\bullet$ は variation of Hodge structure と singular fibre の ^{cohomology の} Hodge filtration が一致する。又逆もいえることがわかる。(cf. 3.3)

次の問題は、 X が singular な時、又 $\dim Y > 1$ なる場合はどうなるかであるが、これはまだ全然わかっていない。

Singular な場合はまず、Intersection cohomology の pure Hodge structure を入れた問題としか言えなかった。又、

$\dim Y > 1$ の場合は、base space が高次元の場合の limit mixed Hodge structure に与えられたものをみつけなければならない。更に問題になるのは、generic に与えられた variation of Hodge structure をどうやって canonical に

定理(1.1) i) $Rf_* \mathbb{Q}_Y \cong \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} R^k f_* \mathbb{Q}_Y[-k] \quad \text{in } D_c^b(\mathbb{Q}_S)$

ii) $R^k f_* \mathbb{Q}_Y = i_* K^k \oplus j_* j^* R^k f_* \mathbb{Q}_Y$

iii) $L \cong f_*$ rel. ample line bundle of 1-st Chern class $c_1 \neq 0$

$$L^k : K^{n+k} \rightarrow K^{n+1+k}, \quad L^k : j_* j^* R^{n+k} f_* \mathbb{Q}_Y \cong j_* j^* R^{n+k} f_* \mathbb{Q}_Y$$

注意 1) i) の分解は $\dim S > 1$ ทั่วไป ไม่成立.

2) ii) の分解は local invariant cycle Theorem

(i.e., $\text{Im } \tau = \text{Ker}(M - \text{id})$) による.

3) 定理(1.1)は $\dim S = 1$ かつ 同位 $\cong$ 成立 (Y, S : nonsing)

4) K^k は weight k の pure Hodge structure が入る.

定理(1.1)を証明するには、代数幾何、つまり $\mathbb{Q}$ -module の理論
を用いた。Steenbrink の limit mixed Hodge structure
の理論が適用可能であることが示された。

§ 2. Gauss-Manin system と Hodge filtration

$f: Y \rightarrow S \cong \mathbb{P}^1$ のようにする。 $t \in S$ の coordinate
function とする。 Gauss-Manin system $\{ \mathbb{Q}_Y \in D^b(\mathbb{Q}_Y) \}$
と f_* の $\pm$ と関係する。 (cf Pham)

定義 (2.1) $\int_+ \mathcal{O}_Y = Rf_* (R\gamma_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} [1])$

ただし, $d(\sum w_i \otimes \partial_t^i) = \sum dw_i \otimes \partial_t^i - \sum df \wedge dw_i \otimes \partial_t^i$

($df = f^* dt$).

ここで $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$ であり, $\int_+ \mathcal{O}_Y$ は 1 位の $\mathcal{D}_Y$ -Module ^{complex of} の構造をもつ. ∂_t^i は そのまま 多項式の部分にかける.

$g(t)$ は, ∂_t とは可換であるから, 一般化して

同じように $\partial(tN - t)$ が成り立つことを示して, ^{"f^*"}

$g(t) \partial_t^i = \sum_j \partial_t^j h_{ij}(t)$ と変換してから t に f を

代入する.

次に $\int_+^h \mathcal{O}_Y = \mathcal{H}^k(\int_+ \mathcal{O}_Y)$ を (k 番目の) Gauss-Manin system と いうことにする

注意. $\int_+^h \mathcal{O}_Y$ は regular holonomic (柏原, 河合)

定義 (2.2) $\int_+ \mathcal{O}_Y$ 上の Hodge filtration $F^\bullet$ を次のように定める. (A[62])

まず, $R\gamma_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ 上の filtration $F^\bullet$ を

$$F^p(R\gamma_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}) = \sum_{i \geq i+p} R\gamma_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \partial_t^i$$

で定まると, $\int_+ \mathcal{O}_Y = Rf_* (R\gamma_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}) [1]$ は induced filtration $F^\bullet$ をもつ.

定理 (2.3) i) $\int_+ \mathcal{O}_Y = \bigoplus_{h \in \mathbb{Z}} \int_+^h \mathcal{O}_Y [-h]$ in $DF(\mathcal{O}_S)$

$$ii) \int_+^h \mathcal{O}_Y = \mathcal{H}_{1,0}^0 \int_+^h \mathcal{O}_Y \oplus j_{!*} j^* \int_+^h \mathcal{O}_Y$$

$$iii) L^k : \int_+^{n-k} \mathcal{O}_Y \xrightarrow{\sim} \int_+^{n+k} \mathcal{O}_Y [k]$$

$$iv) \int_+^{n-k} \mathcal{O}_Y = (\int_+^{n+k} \mathcal{O}_Y)^* [-n]$$

注 (1). $j_{!*} m$ is m a intermediate direct image
(π is minimal extension $\pi^* m$), $j^* j_{!*} m \simeq m$,

$$\mathcal{H}_{1,0}^0(j_{!*} m) = 0, \mathcal{H}_{1,0}^0(j_{!*} m)^* = 0 \quad \pi \text{ unique}$$

又. m^* is m a dual system $\text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^{diS}(m, \mathcal{O}_S) \otimes_{\mathcal{O}_S} (\mathcal{O}_S^{diS})^*$
であり. m is Cohen-Macaulay filtration (つまり)

Gr m is Gr $\mathcal{O}_S \subset C.M.$ to be m^* is C.M. filtration
is canonical to be. 又. m is self dual of wt i
is $m \simeq m^* [-i]$ to be. (ii) iv) is $\int_+^i \mathcal{O}_Y$
is self dual of weight i - $\text{weight } i$ a variation of
polarized Hodge structure is self dual of weight i to be.

De Rham 群をいふのを保つておいて. 定理 (2.3) の
定理 (1.1) が成り立つ. このとき i) の $i)$ はでかいとこに成り
立つ. $(\mathcal{H}_{1,0}^0 \int_+^h \mathcal{O}_Y \xrightarrow{DR} \mathcal{H}_{1,0}^0 R^{h+1} \pi_* , j_{!*} \int_+^h \mathcal{O}_Y \xrightarrow{DR} j_{!*} R^h \pi_* \mathcal{O}_Y)$

§3 limit Hodge filtration との関係

$\mathcal{L}^h \subset \mathcal{O}_S \otimes \mathbb{R}^h f_* \mathbb{C}_Y$ の canonical extension である。
 であり $\mathcal{L}^h$ は S 上の free $\mathcal{O}_S$ -module であり reg. sing.
 connection $\nabla \in \mathcal{E}(S)$ により定まる。(of Deligne)

i) ∇ は regular であり $\ker \nabla = \mathbb{R}^h f_* \mathbb{C}_Y$

ii) ∇ は simple pole を持ち $\chi = \text{res}(\nabla \frac{d\lambda}{\lambda})$ の

固有値は $[-1, 0]$ に含まれる。

命題 (3.1) (Brylinski) $\hat{\mathcal{F}}^p = \mathbb{R}^h f_* \mathcal{L}^h$

$\mathbb{R}^h \mathcal{L}^h$ は $\mathbb{R}^h \int_+ \mathcal{O}_Y \subset \mathcal{O}_S$ -module であり canonical である。
 であり $\mathbb{R}^h \mathcal{F}^p$ は S 上の Griffiths-Schmid variation of
 Hodge structure を定める。

命題 (3.2) (Schmid)

$\hat{\mathcal{F}}^p := \mathbb{R}^h f_* \mathcal{F}^p \cap \mathcal{L}^h \subset \mathcal{L}^h$ であり $\hat{\mathcal{F}}^p$ は $\mathcal{L}^h$ の hol.
 subbundle. monodromy M は unipotent である。 $\hat{\mathcal{F}}^p|_{t=0}$ は
 weight filtration $W_\bullet \subset \mathcal{L}^h$ の mixed Hodge structure である。
 ($\hat{\mathcal{F}}^p|_{t=0}$ は limit Hodge filtration である)

より $F \in K^h = \ker(\gamma: H^h(Y_0, \mathbb{C}) \rightarrow H^h(Y_0, \mathbb{C}))$ 上の
 Hodge filtration である。

定理 (3.3) i) canonical inclusion $\mathcal{L}^h \subset \int_+^h \mathcal{O}_Y$ へ

存在 (2. $\text{dim} \mathcal{L}^h(\int_+^h \mathcal{O}_Y) = \dim \mathcal{L}^h \neq 0$ ならば 2.3.11

$$\mathcal{F}^p(\text{dim} \mathcal{L}^h(\int_+^h \mathcal{O}_Y)) = \sum_{i \geq 0} \partial_t^i (\hat{\mathcal{F}}^{p+i} \mathcal{L}^h), \quad \hat{\mathcal{F}}^p \mathcal{L}^h = \hat{\mathcal{F}}^p$$

$$\text{ii) } \mathcal{H}_{\text{hol}}^0(\int_+^h \mathcal{O}_Y) = i_* (K^{h+1} \otimes_c \mathbb{C}[\partial_t]) \quad \text{7.}$$

$$\mathcal{F}^p(\mathcal{H}_{\text{hol}}^0(\int_+^h \mathcal{O}_Y)) = i_* \left(\sum_{i \geq 0} F^{p+i+1} K^{h+1} \otimes_{\partial_t} \right)$$

よって 7. 7. $H^1(Y_0, \mathbb{C}) \rightarrow H^1(Y_\infty, \mathbb{C})$ の Hodge filtration が定まる。また、逆に $\mathcal{F}^p \subset F$ かつ $\mathcal{F}^p$ が定まる。

定理 (3.3) の 5.2.17. 11. 12. Scherk-Steenbrink の結果が導かれる。これは、milnor fibre の cohomology の m.H.s. の Hodge filtration が Brieskorn lattice

$$\mathcal{Q}_{\mathbb{C}^{n+1}, 0}^{n+1} / \text{Hod} \mathcal{Q}_{\mathbb{C}^{n+1}, 0}^{n+1} \text{ へ } \omega$$

の asymptotic expansion の初項をみることにより、

決定されたという結果である。

(注: [Sa'] の p.16 の $\check{F}^p$ があまり意味をもたないことは注記されている。 $\check{F}^p$ へ F^p は定まる cf [Sa, I.7])

References

- [B1] Brylinsk, J.L. : Modules holonomes à singularités régulières et filtration de Hodge II (preprint)
- [B2] — : Cohomologie d'intersection et faisceaux pervers, Bourbaki semina 585
- [D] Deligne, P. : Equations différentielles à point singuliers réguliers, Springer Lec Note 163
- [Ph] Pham, F. : Singularités des systèmes différentiels de Gauss-Mann, Progress in Math. 2. Birkhauser.
- [Sa] Saito, M. : Hodge filtrations on Gauss-Mann Systems. I. II (preprint)
- [Sa'] — : 付録解題 2 Hodge 構造. 数理論理学集
- [S-S] Scherk-Steinbrink : On the mixed Hodge structure on the cohomology of the Milnor fiber (preprint)

[Sc] : Schmid, W: Variation of Hodge structure

Invent. Math. 22

[St1] Steenbrink : Limit of Hodge structures

Invent. Math. 31.

[St2] — : Mixed Hodge structure on the vanishing
cohomology. Nordic Summer school 1976.

[K-K] Kashiwara-Kawai : On holonomic systems of
micro-differential equations III, RIMS. Publ.

[G-M] Goresky-MacPherson : On the topology of complex
algebraic maps. (preprint)