

変形正規分布の乱流

都立大 理学部 富山泰伸

§ 1 はじめに

Hopf 方程式は $Re=0$ と $Re=\infty$ の両極限で厳密解が得られているし、また、いくつかの近似解法：特性汎関数を *cumulant*⁽¹⁾ 展開する方法、Reynolds 数のべき級数展開、Edwards 展開、等々、が知られている。しかし、上の厳密解は粘性流体、非粘性流体の両極限における解であり現実の乱流のふるまいを良く示すものではない。一方、近似解法はすでに得られている近似解を Hopf 方程式から再導出し、組織的な高次近似への手引きに役立たせるとか、種々の近似との関連付けに役立たせることはできたが、今までのところ新しい近似解法を見出すことには、ほとんど成功していないように思われる。

ここでは、いくつかの欠点のある *cumulant* 展開による方法を改良した新しい展開法を用いて、近似解法を見い出すこと⁽²⁾を試みる。既に Burgers 乱流に対してはこの方法を試みた⁽²⁾が、ここでは Navier-Stokes 方程式に従う 3 次元の乱流に対し

て、この方法を適用する。こうして得られたスペクトル方程式と Kraichnan の DIA⁽³⁾, Test Field Model⁽⁴⁾, Generalized Edwards Model⁽⁵⁾, Herring の Self-Consistent-Field Approximation⁽⁶⁾ と比較し、更にいくつかの近似を行って得られる特性時間やエネルギー・スペクトル関数の型について論じよう。

§ 2 特性汎関数とその変関数の変換

Navier-Stokes 方程式に支配される乱流の Hopf 方程式は次のように示される。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nu \int k^2 \tilde{z}_i(k) \frac{\delta \phi}{\delta \tilde{z}_i(k)} dk \\ &= \iiint D_{ijk}(k) \Delta_{je}(k') \Delta_{km}(k'') \tilde{z}_i(k) \frac{\delta^2 \phi}{\delta \tilde{z}_i(k) \delta \tilde{z}_m(k'')} \delta(k-k'-k'') dk' dk'' \end{aligned} \quad (1)$$

ここで,

$$\begin{cases} \Delta_{ij}(k) = \delta_{ij} - R_i R_j / k^2, & D_{ijk}(k) = \{R_j \Delta_{ik}(k) + R_k \Delta_{ij}(k)\} / 2 \\ \tilde{z}_i(k) = \Delta_{ij}(k) z_j(k), & z_i^*(k) = z_i(-k) \end{cases}$$

変関数 $z_i(k)$ は新しい変関数 $\tilde{z}_i(k)$ と一対一に対応し,

$\tilde{z}_i(k)$ は $z_i(k)$ のベキ級数に展開できるとする。

$$\begin{cases} \tilde{z}_i(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \int \cdots \int a_{i:j_1, \dots, j_n}(k; k_1, \dots, k_n) \tilde{z}_{j_1}(k_1) \cdots \tilde{z}_{j_n}(k_n) dk_1 \cdots dk_n \\ \quad = \sum_{n=1}^{\infty} \int \cdots \int \tilde{a}_{i:j_1, \dots, j_n}(k; k_1, \dots, k_n) z_{j_1}(k_1) \cdots z_{j_n}(k_n) dk_1 \cdots dk_n \\ \tilde{z}_i(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \int \cdots \int \alpha_{i:j_1, \dots, j_n}(k; k_1, \dots, k_n) \zeta_{j_1}(k_1) \cdots \zeta_{j_n}(k_n) dk_1 \cdots dk_n \end{cases} \quad (2)$$

一様性乱流を考え、後には示すように $z_i(k)$ が十分に小さい

とき $\zeta_i(k) = \tilde{\zeta}_i(k)$ であるとする

$$\begin{cases} \tilde{a}_{i;j}(k; k') = \Delta_{ij}(k) \delta(k - k') \\ a_{i;j_1, \dots, j_n}(k; k_1, \dots, k_n) = a_{i;j_1, \dots, j_n}(k_1, \dots, k_n) \delta(k - k_1 - \dots - k_n) \\ \alpha_{i;j_1, \dots, j_n}(k; k_1, \dots, k_n) = \alpha_{i;j_1, \dots, j_n}(k_1, \dots, k_n) \delta(k - k_1 - \dots - k_n) \end{cases}$$

とすることが出来る。(2) のベキ級数の“係数”の間の関係が次のように得られる。

$$\begin{cases} \alpha_{i;j,k}(k_1, k_2) = -a_{i;j,k}(k_1, k_2) \\ \alpha_{i;j,k,l}(k_1, k_2, k_3) + a_{i;j,k,l}(k_1, k_2, k_3) \\ \quad = \frac{2}{3} \sum_{a.c.} a_{i;j,m}(k_1, k_2 + k_3) a_{m;k,l}(k_2, k_3) \\ \dots \end{cases} \quad (3)$$

$\sum_{a.c.}$ は全ての組合せについて和をとることを意味するが、対称性により同じものは一つだけとする。

乱流の確率変関数 $v_i(k)$ の確率分布が正規分布にく近いことは実験的に確認されているように思われる。しかし、く近いということを実易には利用できない。例えば、準正規分布近似では負のエネルギー・スペクトルの発生に伴って

realizability の条件が満たされなくなることや、Wiener-Hermite 展開による種々の困難の現われなどを考えて見ると明白である。く近さの規準はそれほど明確なものではなく、この規準は方程式の非線型的特性に関係していて重大な困難を含んでいる。正規分布にく近いという規準のあいまいさは承知

の上で，散えてこれを利用しよう。

$v_i(k)$ の確率分布が正規分布に「近い」とすると，

$\tilde{z}_i(k) \rightarrow 0$ のとき $\phi \rightarrow \exp[-\frac{1}{2} \iint I(k) \tilde{z}_i(k) \tilde{z}_i(k') \delta(k+k') dk dk']$
従って，

$$z_i(k) \rightarrow \tilde{z}_i(k) \quad (\tilde{z}_i(k) \rightarrow 0)$$

$$\phi[\tilde{z}(k)] = e^{-Q'[\tilde{z}(k)]} = e^{-Q[\tilde{z}(k)]} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} Q'[\tilde{z}(k)] &= \frac{1}{2} \iint I(k) \tilde{z}_i(k) \tilde{z}_i(k') \delta(k+k') dk dk' \\ &+ \frac{1}{3!} \iiint J_{ijk}(k, k', k'') \tilde{z}_i(k) \tilde{z}_j(k') \tilde{z}_k(k'') \delta(k+k'+k'') dk dk' dk'' \quad (5) \\ &+ \frac{1}{4!} \int \dots \int K_{ijkl}(k_1, \dots, k_4) \tilde{z}_i(k_1) \dots \tilde{z}_l(k_4) \delta(k_1 + \dots + k_4) dk_1 \dots dk_4 \\ &+ \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q[\tilde{z}(k)] &= \frac{1}{2} \iint I(k) z_i(k) z_i(k') \delta(k+k') dk dk' \\ &+ \frac{1}{3!} \iiint J'_{ijk}(k, k', k'') z_i(k) z_j(k') z_k(k'') \delta(k+k'+k'') dk dk' dk'' \quad (6) \\ &+ \frac{1}{4!} \int \dots \int K'_{ijkl}(k_1, \dots, k_4) z_i(k_1) \dots z_l(k_4) \delta(k_1 + \dots + k_4) dk_1 \dots dk_4 \\ &+ \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{J}_{ijk}(k, k', k'') &\equiv \Delta_{il}(k) \Delta_{jm}(k') \Delta_{kn}(k'') J_{lmn}(k, k', k'') \\ &= 2 \sum_{a.c.} I(k) \tilde{\alpha}_{i:j k}(k', k'') + \tilde{J}'_{ij'k}(k, k', k'') \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{ijkl}(k_1, k_2, k_3, k_4) &\equiv \Delta_{im}(k_1) \Delta_{jn}(k_2) \Delta_{kp}(k_3) \Delta_{lq}(k_4) K_{mnpq}(k_1, \dots, k_4) \\ &= \sum_{a.c.} \tilde{J}_{ijm}(k_1, k_2, k_3+k_4) \alpha_{m:kl}(k_3, k_4) \\ &- 4 \sum_{a.c.} I(k_1+k_2) \tilde{\alpha}_{m:ij}(k_1, k_2) \tilde{\alpha}_{m:kl}(k_3, k_4) \quad (8) \\ &- 6 \sum_{a.c.} I(k_1) \alpha_{i:jkl}(k_2, k_3, k_4) - \tilde{K}'_{ij'kl}(k_1, \dots, k_4) \end{aligned}$$

$\tilde{J}_{ijk}(k, k', k'')$, $\tilde{K}_{ijkl}(k_1, \dots, k_4)$ はそれぞれ 3 次, 4 次の cumulant を示す。

スペクトル・テンソルは特性汎関数を $S_i(k)$ で汎関数微分して得られる。

$$\left\{ \begin{aligned} \langle v_i(k) v_j(k') \rangle &= I(k) \Delta_{ij}(k) \delta(k+k') \\ \langle v_i(k) v_j(k') v_k(k'') \rangle &= i \tilde{J}_{ijk}(k, k', k'') \delta(k+k'+k'') \\ \langle v_i(k_1) v_j(k_2) v_k(k_3) v_l(k_4) \rangle &= \sum_{a.c.} I(k_1) I(k_3) \Delta_{ij}(k_1) \Delta_{kl}(k_3) \delta(k_1+k_3) \delta(k_2+k_4) \\ &\quad + \tilde{K}_{ijkl}(k_1, \dots, k_4) \delta(k_1+\dots+k_4) \\ &\dots \end{aligned} \right. \quad (9)$$

§3 速度相関のスペクトル方程式

Hopf 方程式 (1) に (4) を代入し, $S(k)$ のべき級数に展開して各べきの次数の両辺の“係数”を等置することによって, スペクトル・テンソルの方程式が得られる。この方法は非常に煩雑なので (9) を用いてスペクトル・テンソルの方程式を導く方が容易である。このようにして得られた方程式を次に示す。

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\nu k^2 \right) I(k) &= T(k) \\ &\equiv -D_{ijk}(k) \iint \tilde{J}_{ijk}(k, k', k'') \delta(k+k'+k'') dk' dk'' \end{aligned} \quad (10)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu \sum_{(k, k', k'')} k^2\right) \tilde{f}_{ijk}(k, k', k'') = -2 \sum_{(i, j, k)} D_{ilm}(k) \Delta_{jl}(k') \Delta_{kn}(k'') I(k') I(k'') \\ + \sum_{(i, j, k)} D_{ilm}(k) \iint \tilde{K}_{jklm}(k', k'', k_1, k_2) \delta(k+k'+k_1+k_2) dk_1 dk_2 \quad (11)$$

$\sum_{(i, j, k)}$ は (k, i) , (k', j) , (k'', k) をサイクリックに変えて和をとることを意味する。但し, $k+k'+k''=0$

この方程式系は $\tilde{f}_{ijk}(k, k', k'')$ の中に $\tilde{f}_{ijk}'(k, k', k'')$ を含み, $\tilde{K}_{ijkl}(k_1, k_2, k_3, k_4)$ の中に $\tilde{K}_{ijkl}'(k_1, \dots, k_4)$ と $\tilde{\alpha}_{ijkl}(k_2, k_3, k_4)$ が含まれているので, 閉じた方程式系をなしていない。特性関数を (4), (5), (6) のように表わすと, $\alpha_{i:j_1, \dots, j_n}(k_1, \dots, k_n)$ を適当に求めることによって $\tilde{f}_{ijk}'(k, k', k'')$ と $\tilde{K}_{ijkl}(k_1, \dots, k_4)$ は無視できる程度に小さくできるだろう。一方 $\tilde{\alpha}_{ijkl}(k_2, k_3, k_4)$ は次のようにして決定しよう。

今, 速度の確率分布が正規分布から出発して, ある別の安定した分布に変わって行くと考えよう。そのとき $\zeta_i(k) = \tilde{z}_i(k) \rightarrow \zeta_i(k) = \tilde{z}_i^{(1)}(k) \rightarrow \zeta_i(k) = \tilde{z}_i^{(2)}(k), \dots \rightarrow \zeta_i(k) = \tilde{z}_i^{(n)}(k)$, と次々において,

$$\phi = e^{-\frac{1}{2} \iint I(k) \tilde{z}_i(k) \tilde{z}_i(k') \delta(k+k') dk dk'}$$

で十分に良く近似しようとする。

$\Delta \alpha_{i:j,k}(k_1, k_2)$ を正規分布からのずれを生じさせる効果を表わす微少な値をとる関数として $\tilde{z}_i^{(m)}(k)$ ($m=1, 2, \dots, n$) を次のように仮定する。

$$\begin{cases}
 \tilde{Z}_i^{(1)}(k) = \tilde{Z}_i(k) + \iint \Delta a_{i::jk}(k_1, k_2) \tilde{Z}_j(k_1) \tilde{Z}_k(k_2) \delta(k - k_1 - k_2) dk_1 dk_2 \\
 \tilde{Z}_i^{(2)}(k) = \tilde{Z}_i^{(1)}(k) + \iint \Delta a_{i::jk}(k_1, k_2) \tilde{Z}_j^{(1)}(k_1) \tilde{Z}_k^{(1)}(k_2) \delta(k - k_1 - k_2) dk_1 dk_2 \\
 \dots \\
 \tilde{Z}_i^{(n)}(k) = \tilde{Z}_i^{(n-1)}(k) + \iint \Delta a_{i::jk}(k_1, k_2) \tilde{Z}_j^{(n-1)}(k_1) \tilde{Z}_k^{(n-1)}(k_2) \delta(k - k_1 - k_2) dk_1 dk_2
 \end{cases}$$

$n \rightarrow \infty$ の極限が求める $\zeta_i(k)$ に等しいと考える。

$$\begin{aligned}
 \zeta_i(k) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{Z}_i^{(n)}(k) \\
 &= \tilde{Z}_i(k) + \iint a_{i::jk}(k_1, k_2) \zeta_j(k_1) \zeta_k(k_2) \delta(k - k_1 - k_2) dk_1 dk_2 \quad (12)
 \end{aligned}$$

$$a_{i::jk}(k_1, k_2) = 2\beta a_{i::jk}(k_1, k_2)$$

(2) が (12) のように表わせると仮定するならば (3) から

$$a_{i::jkl}(k_1, k_2, k_3) = \frac{1}{3} \sum_{a,c} a_{i::jm}(k_1, k_2 + k_3) a_{m::kl}(k_2, k_3) \quad (13)$$

したがって $a_{i::jkl}(k_1, k_2, k_3)$, 同様に $a_{i::j_1, \dots, j_n}(k_1, \dots, k_n)$ も

$a_{i::jk}(k_1, k_2)$ で全て表わすことができる。

(8) から次のようになる。

$$\tilde{K}_{i:jkl}(k_1, k_2, k_3, k_4) = \sum \tilde{J}_{i:jm}(k_1, k_2, k_3 + k_4) \tilde{\alpha}_{m::kl}(k_3, k_4) \quad (14)$$

(14) を (11) に代入して次式が得られる。

$$\begin{aligned}
 \left[\frac{\partial}{\partial t} + \eta(k, k', k'') \right] \tilde{J}_{i::jk}(k, k', k'') &= -2 \sum_{\substack{(i::j::k) \\ (k, k', k'')}} D_{iem}(k) \Delta_{je}(k') \Delta_{kn}(k'') I(k') I(k'') \\
 &\quad + \sum_{\substack{(i::j::k) \\ (k, k', k'')}} \frac{T(k)}{2} \tilde{\alpha}_{i::jk}(k', k'') + L_{i::jk}(k, k', k'') \quad (15)
 \end{aligned}$$

$$\text{ここで, } \eta(k, k', k'') = \sum_{(k, k', k'')} \{ \nu k^2 + \gamma(k) \} \quad (16)$$

$$\gamma(k) = \frac{1}{2} D_{i::jk}(k) \iint \tilde{\alpha}_{i::jk}(k', k'') \delta(k + k' + k'') dk' dk'' \quad (17)$$

$$L_{ijk}(k, k', k'') = 2 \sum_{\substack{(i, j, k) \\ (k, k', k'')}} D_{ilm}(k) \sum_{\substack{(j, k) \\ (k, k')}} \iint \tilde{J}_{jln}(k', k_1, k'' + k_2) \tilde{\alpha}_{n:km}(k'', k_2) \cdot \delta(k - k_1 - k_2) dk_1 dk_2 \quad (18)$$

方程式 (15) の特徴は左辺が 2 項が粘性による減衰に加え、 $\gamma(k)$ を含む減衰を示すことである。 $\gamma(k)^{-1}$ は波数 k の scale の乱れのもつ特性時間と考えられる。したがって、 $\gamma(k)$ は波数 k の scale の乱れによる乱流粘性に起因すると考えられる。

準正規分布の理論においてはこのような特性時間が存在せず、その為 $\tilde{J}_{ijk}(k, k', k'')$ に一種の *secularity* が生じ、 Re が大きいとき特に、その欠陥が目立ったものになる。この欠陥を取り除く方法として、変関数の変換の方法を導入するのである。即ち、(2) の変換を施した $\phi(k)$ により ϕ を展開して $\phi(k)$ による展開よりも収束性を良くしようとするのである。

。

$$\text{さて,} \quad \tilde{J}_{ijk}(k, k', k'') = 2 \sum_{a.c.} I(k) \tilde{\alpha}_{i:j k}(k', k'') \quad (19)$$

を考慮すると、(10) と (15) は閉じたスペクトル方程式系となっている。しかし、(15) は $\tilde{\alpha}_{i:j k}(k', k'')$ に対する方程式でなく、 $\tilde{J}_{ijk}(k, k', k'')$ に対する方程式なので、 $\tilde{\alpha}_{i:j k}(k', k'')$ はある任意性を許す範囲内でしか決定できない。このことが、またこの理論の特徴である。(19) からわかるように、 $\tilde{\alpha}_{i:j k}$ から $\tilde{J}_{ijk}$ は決定できるがその逆は不可能である。これは $\tilde{\alpha}_{i:j k}$ が他の高次の *cumulant* にも含まれていることから推察される。

通り，乱流構造への深い関りを意味し， $\tilde{J}_{ijk}$ よりも豊富な情報を含んでいることを意味している。

§ 4 $a_{i,jk}(k, k')$ の決定法

(15)の中には4次の *cumulant* の効果が生じる項，右辺も2項と3項に入っている。そのうち L_{ijk} は他の項に比べて，より複雑な相互作用を表すものである。したがって， L_{ijk} は低波数に対してよりも高波数に対して，より大きな影響を及ぼすと考えられる。 L_{ijk} の効果は，少なくとも高波数において，無視できないけれど，複雑なのでこれを取り除いた方程式の性質について論じよう。そのとき，(15)は次のようになる。

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \eta(k, k', k'') \right] \tilde{J}_{ijk}(k, k', k'') = -2 \sum D_{ilm}(k) \Delta_{j,l}(k') \Delta_{km}(k'') I(k') I(k'') \\ + \sum \frac{T(k)}{2} \tilde{a}_{i,jk}(k', k'') \quad (20)$$

(19)と(20)から $a_{i,jk}$ を決定する方程式は一意的には決まらないことは§3の終りに述べた。そこで，次の4つの場合に分けて調べて見よう。

Case I :

$$a_{i,jk}(k', k'') = \tilde{J}_{ijk}(k, k', k'') / 6 I(k) \quad (21) \\ (k + k' + k'' = 0)$$

とすると， $\tau(k)$ は次のように求められる。

$$\gamma(k) = -\frac{T(k)}{12I(k)} \quad (22)$$

$k \rightarrow \infty$ のとき、 $T(k) > 0$ だから $\gamma(k) < 0$ となる。この結果は減衰率が負になることを示し、高波数領域で $\tilde{f}_{ijk}$ が異常に大きくなることを予想させる。したがって、Case I は望ましくない。

Case II :

(20) を次のように分解して、 $a_{i;jk}$ に対する方程式を作る。

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial t} + \gamma(k; k', k'') \right] I(k) \tilde{a}_{i;jk}(k', k'') \\ = - \sum_{\substack{(j, k) \\ (k', k'')}} D_{jem}(k') \Delta_{ke}(k'') \Delta_{im}(k) I(k') I(k) / 2 \end{aligned} \quad (23)$$

$$\gamma(k; k', k'') = \gamma(k, k', k'') - T(k)/4$$

(23) を積分して $\tilde{a}_{i;jk}$ 、 $\tilde{f}_{ijk}$ は次のように求められる。

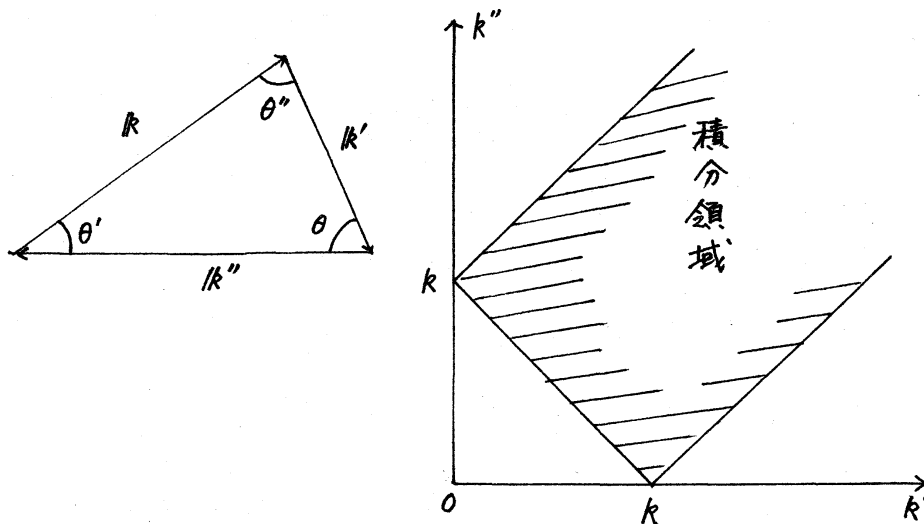
$$\begin{aligned} \tilde{a}_{i;jk}(k', k'') &= -\frac{1}{2} \sum_{\substack{(j, k) \\ (k', k'')}} D_{jem}(k') \Delta_{ke}(k'') \Delta_{im}(k) F(k'; k'', k) / I(k) \\ \tilde{f}_{ijk}(k, k', k'') &= -2 \sum_{\substack{(i, j, k) \\ (k, k', k'')}} D_{iem}(k) \Delta_{je}(k') \Delta_{km}(k'') F(k; k', k'') \\ F(k; k', k'') &= \int_0^t G(k, k', k''; t, t') I'(k') I'(k'') dt' \\ G(k, k', k''; t, t') &= e^{\int_{t'}^t \gamma(k; k', k'') d\tau} \end{aligned} \quad (24)$$

求められた $\tilde{a}_{i;jk}$ 、 $\tilde{f}_{ijk}$ を用いて $T(k)$ 、 $\gamma(k)$ を求めると、

$$\begin{aligned}
 T(k) &= 4\pi k \iint k'k'' \{ \alpha(k, k', k'') F(k; k', k'') - \beta(k, k', k'') F(k'; k'', k) \} dk' dk'' \\
 &= 4\pi k \iint k'k'' \alpha(k, k', k'') F(k; k', k'') dk' dk'' - 8\gamma(k) I(k)
 \end{aligned} \quad (25)$$

$$\gamma(k) = \frac{\pi k}{2I(k)} \iint \beta(k, k', k'') F(k'; k'', k) dk' dk'' \quad (26)$$

$$\left(\begin{aligned} \alpha(k, k', k'') &= \frac{1}{2} (1 - \cos\theta \cos\theta' \cos\theta'' - 2\cos^2\theta \cos^2\theta'') \geq 0 \\ \beta(k, k', k'') &= \frac{k'}{k} (\cos\theta \cos\theta' + \cos^2\theta'') \end{aligned} \right) \quad (27)$$



(24) の結果は Kraichnan の DIA ⁽³⁾, Edwards 理論 ⁽⁵⁾, Herring の ⁽⁶⁾ Self-consistent-field approximation と類似点をもっている。それ ⁽⁹⁾ ぞれの理論との相異点をあげると、DIA においては $F(k; k', k'')$ の被積分関数の中の $I(k'; t')$, $I(k''; t')$ が time-displaced covariance に置き換っていることと $G(k, k', k''; t, t')$ の形が異なること、Edwards 理論においては Markov 的になっていて、 $F(k; k', k'')$ がそれと同時に $I(k')$ によって表わされていること、Herring 理

論においては $G(k, k', k''; t, t')$ の形が異っていることである。

Case III :

外力の加らない乱流を扱ってきているけれど，ここで仮に波数の小さな領域に外力を加え定常な乱流を保つことができるでしょう。そのとき，小さな波数領域を除いて (23) の時間微分を落した式が成立つてあろう。すると $\tilde{a}_{ijk}$ と $\tilde{f}_{ijk}$ は (24) の $F(k; k', k'')$ を次のように表わしたものに等しい。

$$F(k; k', k'') = \frac{I(k')I(k'')}{2\gamma(k; k', k'')} \quad (28)$$

この結果を用いて Inertial subrange における $\gamma(k)$ を求めよう。
 $\gamma(k; k', k'') = \gamma(k) + \gamma(k') + \gamma(k'')$ と表わされることに注意して

$$\begin{aligned} \gamma(k) &= \frac{\pi k}{2} \int dk'' k'' I(k'') \int dk' k' \beta(k, k', k'') / \sum_{(k, k', k'')} \gamma(k) \\ &\cong \frac{\pi k^2}{3\gamma(k)} \int_0^{k_e} k''^2 I(k'') dk'' \\ &= \frac{\pi k^2 u_0^2}{3\gamma(k)} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{3}} u_0 k \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{l} k_e: \text{Energy containing region を} \\ \text{表わす 特性波数} \\ u_0: \text{乱流の特性速度} \end{array} \right) \quad (29)$$

$\gamma(k) \sim k$ は Kraichnan の DIA によって導かれる結果と同じ⁽³⁾ものであり，従って Inertial subrange におけるエネルギー・スペクトル関数は $E(k) \sim k^{-\frac{3}{2}}$ となる。

以上，見てきたように，Case I においては $\tilde{a}_{ijk}(k', k'')$ と $\tilde{f}_{ijk}(k, k', k'')/I(k)$ は同等の役を果し得ないことを示し，して

がって §3 の終りに述べたことの正しさを裏づけている。

Case II では DIA, etc と類似の表式を得た。Case III は Case II の定常的な場合に相当していて、その結果は $\sigma(k)$ が DIA と同様の表式で表わされた。したがって Case II, Case III は DIA と同じような欠点、即ち、Energy containing range の乱れが Inertial subrange の乱れに過大の影響を及ぼし、 $E(k)$ や $\sigma(k)$ の表式の中に u_0 が導かれる欠点を持っているように思われる。

Case IV :

Case II や Case III の欠点は小さな乱れが大きな乱れの対流作用を過大に受けていると評価したこと起因すると考えられる。(23) の右辺には k'' の乱れの速度による k の乱れへの対流作用が含まれ、 $k \gg k''$ のときこの対流作用を過大に評価し、 $\sigma(k)$ にそれが反映されるのである。これを取り除くために、次のような $g(k, k')$ を定義しよう。

$$\begin{cases} g(k, k') + g(k', k) = 1 \\ g(k, k') \rightarrow 0, g(k', k) \rightarrow 1 \quad \left(\frac{k}{k'} \rightarrow 0 \right) \end{cases} \quad (30)$$

(30) を用いて (20) を書き改めると、

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial}{\partial t} + \eta(k, k', k'') \right] \sum_{(k, k', k'')} I(k) \tilde{a}_{i,j,k}(k; k', k'') - \sum \frac{\eta(k)}{4} \tilde{a}_{i,j,k}(k', k'') \\ &= -\Delta_{il}(k) \Delta_{jm}(k') \Delta_{kn}(k'') \left[D_{emn}(k) I(k') I(k'') \{ g(k, k'') + g(k'', k') \} \right. \\ & \quad + D_{mne}(k') I(k'') I(k) \{ g(k', k) + g(k, k') \} \\ & \quad \left. + D_{nem}(k'') I(k) I(k') \{ g(k, k') + g(k', k) \} \right] \end{aligned} \quad (31)$$

(31) から $\tilde{\alpha}_{i;jk}$ の方程式を作る。

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial t} + \gamma(k; k', k'') \right] I(k) \tilde{\alpha}_{i;jk}(k', k'') \\ = - \sum_{\substack{(j, k) \\ (k', k'')}} D_{jem}(k') \Delta_{ke}(k'') \Delta_{im}(k) I(k'') I(k) g(k'', k) \end{aligned} \quad (32)$$

(32) を積分して $\tilde{\alpha}_{i;jk}$, $\tilde{J}_{ijk}$ は次のように求められる。

$$\tilde{\alpha}_{i;jk}(k', k'') = - \sum_{\substack{(j, k) \\ (k', k'')}} D_{jem}(k') \Delta_{ke}(k'') \Delta_{im}(k) F(k'; k'', k) / I(k) \quad (33)$$

$$\tilde{J}_{ijk}(k, k', k'') = -2 \sum_{\substack{(i, j, k) \\ (k, k', k'')}} D_{iem}(k) \Delta_{je}(k') \Delta_{km}(k'') F(k; k', k'') \quad (34)$$

$$F(k; k', k'') = \int_0^t G(k, k', k''; t, t') I(k') I(k'') g(k', k'') dt' \quad (35)$$

定常な場合を考えると

$$\tilde{\alpha}_{i;jk}(k', k'') = - \sum D_{jem}(k') \Delta_{ke}(k'') \Delta_{im}(k) I(k'') g(k'', k) / \gamma(k; k', k'') \quad (36)$$

この場合について $\gamma(k)$ を求めみよう。 $g(k, k')$ をどのような関数にしたら良いかをユニークに定められないが、簡単な関数で表わして見よう。

$$g(k'', k) = \frac{k''}{k + k''} \quad (37)$$

これは(30)の条件を確かに満足している。粗い近似を施した後 $\gamma(k)$ は次のように求まる。(Inertial subrangeで)

$$\gamma(k)^2 \sim \pi C k \int_{k_0}^{ck} k''^3 I(k'') dk'' \quad (38)$$

ここで C, C' は order 1 のある定数を示す。

Inertial subrange におけるエネルギー・スペクトル関数：

$E(k) = 4\pi k^2 I(k)$ と $\sigma(k)$ を相似則を仮定して求めてみよう。

(10), (34), (36), (38) と エネルギー・消散率

$$\epsilon = -4\pi \int_0^k k'^2 T(k') dk' \quad (39)$$

と相似則の仮定

$$\begin{cases} I(k) = S^l I(sk), & \sigma(k) = S^m \sigma(sk) \\ \tilde{J}_{ijk}(k, k', k'') = S^n \tilde{J}_{ijk}(sk, sk', sk'') \end{cases} \quad (40)$$

を用いて, l, m, n が次のように求まる。

$$l = \frac{11}{3}, \quad m = -\frac{2}{3}, \quad n = 7$$

したがって,

$$\begin{aligned} I(k) &\sim k^{-\frac{11}{3}} & E(k) &\sim k^{-\frac{5}{3}} \\ \sigma(k) &\sim k^{\frac{2}{3}} \end{aligned} \quad (41)$$

が得られる。ここで注意すべきことは $I(k) \sim k^{-\frac{11}{3}}$ を (38) に代入し, $k_e \rightarrow 0$ としても $k'' = 0$ の点で積分は収束し, DIA のような発散は起らないことである。このようにして Kolmogorov のスペクトルが得られる。

§5 おわりに

変関数の変換により特性汎関を展開して得られるスペクトル方程式は $a_{i,j,k}$ の不定性のため, その満たすべき方程式に不

定性がある。この不定性は一見やっかいなもののように見えるけれど、反対に実は有効な働きをする。Case II, Cas III の場合は DIA, Edwards 理論, Herring の Self-Consistent-Field 理論と類似したスペクトル方程式が得られた。これらの理論の欠点を取り除くよう改良を加えて Case IV のようにとると、 $k \rightarrow 0$ の点での発散の欠点は現われない。この最後の場合は Test-Field Model の理論と類似点がある。相異点は $g(k', k)$ の関数の役割を DIA では $\beta(k, k', k'')$ を変えることによって行っている点と $G(k, k', k''; t, t')$ の形が違ふ点などである。Test-Field Model との比較は今後の課題としたい。

参考文献

- 1) A.S. Monin and A.M. Yaglom (1975) *Statistical Fluid Mechanics Vol.2*
- 2) 富山 泰伸 (1979) 数理解析研究所講究録 354 239
- 3) R. Kraichnan (1959) *J. F. M.* 5 32
- 4) R. Kraichnan (1971) *J. F. M.* 47 513
- 5) S. F. Edwards (1964) *J. F. M.* 18 239
- 6) J. Herring (1966) *Phys. Fl.* 9 2106
- 7) Y. Ogura (1963) *J. F. M.* 16 33
- 8) S.C. Crow and G.H. Canavan (1970) *J. F. M.* 41 387
- 9) J. Herring and R. Kraichnan (1972) *Statistical Models and Turbulence* 149