

アナコンとローレンツアトラクター

東京理科大学 戸川美郎 (Yoshio TOGAWA)

アナログコンピュータは、そのいくつかのメリットにもかかわらず、デジタルコンピュータほどには普及しなかった。それはおそろしく

- (1) 汎用性を持たせにくい
- (2) 精度をあわせるのがむずかしい
- (3) 安定した信頼性が得られない。

ためと思われる。しかし逆に、これら (1), (2), (3) を要求せず、目的が限られた用途では、専用のアナコンを作ると、高速性などのメリットが活かされてくる。特に、いくつかのパラメーターを持った常微分方程式の族を集中的に調べたい時——どのような phase portrait か？ どのような bifurcation をする？ ストレンジアトラクターを持つ？ ストレンジアトラクターはどんなふるまいをする？—— などでは、最もその強みを発揮する。ただし、あくまでも

- (1) 望む用途専用のアナコン (単能アナコン) を作る

- (2) 精度は 数パーセント程度しか要求
しない。 } デジタルコンピュータ
で追試する。
- (3) 信頼性もあまり要求しない

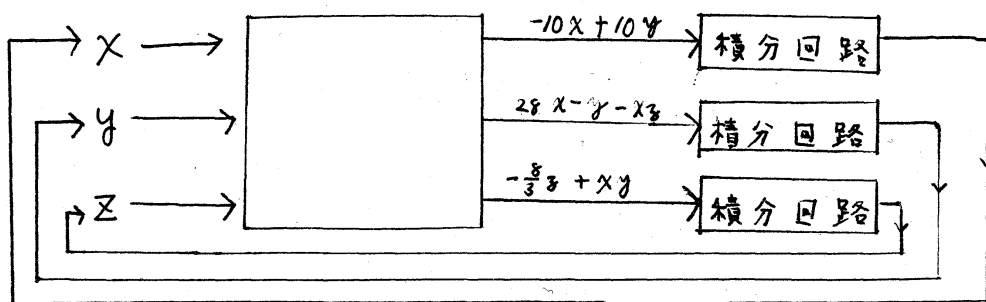
ということにしない限り コストなどで割が合わないだろう。

常微分方程式を与えられて「ほとほとα精度」と「ほとほとβ信頼性」をもってそれを実現する回路を作ることば、それほど難くない。以下では、この研究集会で発表したローレンツアトラクター用アナコンの回路について説明する。

ローレンツ方程式

$$\begin{cases} \dot{x} = -10x + 10y \\ \dot{y} = 28x - y - xz \\ \dot{z} = -\frac{8}{3}z + xy \end{cases} \quad \text{----- ①}$$

をシミュレートする回路を作りたい。回路のあるところの電圧 $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ が①に合うようにする。まず x , y , z から①の右辺を作り、それを積分して その結果を x , y , z とする。



x, y, z からの右辺を作るためには,

(i) 電圧 V をスカラー倍する $V \longrightarrow \lambda V$

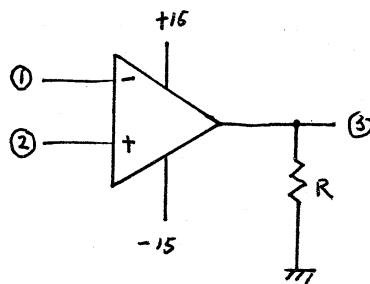
(ii) 電圧 V_1 と V_2 を加える $V_1, V_2 \longrightarrow V_1 + V_2$

(iii) 電圧 V_1 と V_2 の積を作る $V_1, V_2 \longrightarrow V_1 V_2$

ができればならない。

(i), (ii) はオペアンプを使えばすぐできる。オペアンプについて簡単にまとめておく。

オペアンプは $+15V, -15V$ の 2 電源を必要とする。



理想的なオペアンプは

(1) ③と①の電圧差 $(③ - ①)$ を ∞ 倍増幅して ③に出力する。

(2) ①, ②からオペアンプへは電流は流れ込まない (入力インピダンス無限大)

(3) 抵抗 R の値によって ③の電圧は変化しない。

しかし実際のオペアンプでは

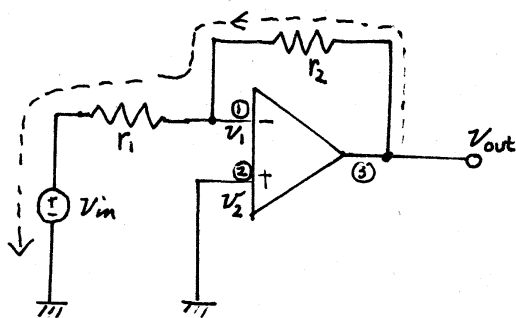
(1)' ∞ 倍ではなく (非常に大きな値) A 倍である。この

値 A は、入力電圧の、②が非常に速く変化するとき
は小さくなってしまふ。このことは回路の動作速度
に上限を与える。

(2) わずかな電流がオペアンプに流れ込む。これは、回
路の精度を制限する。

(3)' 抵抗 R の値は、あまり小さくできない ($1\text{k}\Omega$ 以下に
はしない方が無難)

オペアンプはほとんどの場合フィードバックを掛けて使用
する。下の回路は電圧のスカラ一倍する回路例である



抵抗 R_2 がフィードバック (無限大のネガティブフィードバッ
ク) を与える。これは ①と③の電圧は互いに逆向きに変化
し、しかも③の変化は大きく、③と①が抵抗で結ばれてい
るため①の電圧と③の電圧が打ち消すように働くことを意味す
る。例えば ①が負の電圧になると V_3 は $V_2 - V_1 = -V_1$ の ∞ 倍
すなわち $+\infty$ volt となり、上図の矢印のような大きな電流
が流れ、抵抗 R_1 での電圧降下により①の電圧は上昇し 結局

0 volt ($=V_2$) となる。結局正常にフィードバックがかかった
 使い方は①と②の電圧は常に等しくなる (増幅度 ∞ である
 以上 ②-①=0でない限り V_2 は有限の電圧になれない。
 もっとも実際には、どんな使い方としても電源電圧以上は出
 力し得ない)

フィードバックのかかったオペアンアでは

(4) ①と②の電圧は等しい

それでは、上の回路がスカラー倍を与えることをみてみよう。

$V_1 = (V_2 =) 0$ なので、抵抗 r_1 での電圧降下は V_{in} volt であり

$$V_{in}/r_1 \quad (A)$$

の電流が流れる。この電流はすべて抵抗 r_2 に流れる (入力
 インピーダンス無限大)。 r_2 での電圧降下は

$$(V_{in}/r_1) r_2 \quad (V)$$

であり、①の電圧は0 volt なので 出力電圧 V_{out} は

$$V_{out} = 0 - (V_{in}/r_1) r_2 = -\frac{r_1}{r_2} V_{in}$$

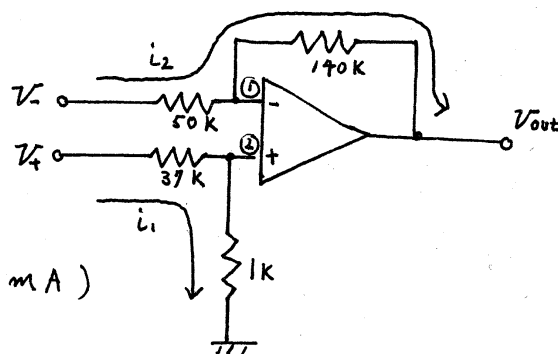
となる。この回路では、例えば $V_{out} = -2V_{in}$ としたいとき

$r_1 = 2\Omega$, $r_2 = 1\Omega$ としても $r_1 = 1M\Omega$, $r_2 = 500k\Omega$ とし
 てもよい。しかし(2)', (3)', ノイズの影響, ストレイキャパシ
 ティーの影響などを考えると、 r_1 とか r_2 は $1k\Omega \sim 500k\Omega$
 ぐらいの間で選ぶのが無難である。

この回路では、入力電圧を0 volt とすれば出力電圧も0に

なるはずである。しかし実際にはわずかな電圧が残ってしまう(オフセット電圧)。オフセット電圧は回路を複雑にすれば調整して消すことができるが、ここではオフセット電圧は誤差としてかたがけしてしまう。そのためには、小さな電圧を扱わないで済むようにしなければならない。 $\pm 0.1(V)$ 程度の信号電圧は、オフセットが $10mV$ のオペアンフで ~ 2 倍すると、出力信号は $\pm 0.2V$ 程度、オフセットが $10mV$ で 5% 近くの誤差を生じてしまう。

オペアンフを用いた回路の例をもうひとつみてみよう。



$$i_1 = \frac{V_+}{38} \quad (mA)$$

$$\text{②の電圧} = \frac{V_+}{38}$$

$$\text{①の電圧} = \text{②の電圧}$$

$$i_2 = \frac{1}{50} \left(V_- - \frac{V_+}{38} \right) \quad (mA)$$

$$V_{out} = \frac{V_+}{38} - \frac{140}{50} \left(V_- - \frac{V_+}{38} \right) = -2.8 V_- + 0.1 V_+$$

このように、オペアンフを用いれば線形演算は自由に実現できる。

次に掛け算だが、これはI.C.が市販されている(アナログ

デバイス AD533JH, インターシル, ICL8013CC, など)。これらはいずれも入力 x と入力 y に対し $\frac{xy}{10}$ を出力する。

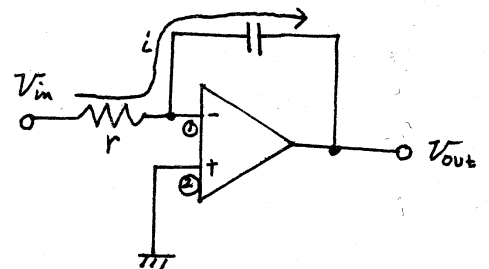
以上により、電圧 $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ を入力すると方程式の右辺を出力する回路を作ることができる。

次に右辺を積分しなければならない。

積分回路もオペアンプで作ることができる。

$$\textcircled{1} \text{ の電圧} = \textcircled{2} \text{ の電圧} = 0$$

$$i = \frac{V_{in}}{r} \quad (\text{mA})$$



$$V_{out} = -V_c = -\int_0^t \frac{1}{rc} V_{in}(t) dt$$

ここで V_c は コンデンサーの両端の電圧

この積分回路もまた、正確には動作しない。例えば V_{in} を 0 volt に保ち、おいても $\textcircled{1}$ からオペアンプに流れこむ電流、コンデンサーのリーク、その他のために V_{out} は変化してしまう。しかし 微分方程式のシミュレーションとしての回路ではこういった影響は方程式の perturbation として考えることができ、それほど気にすることはない。

以上で回路についての準備は終る。次に ローレンツ方程式の方を オペアンプで実現しやすいように処理しておく。

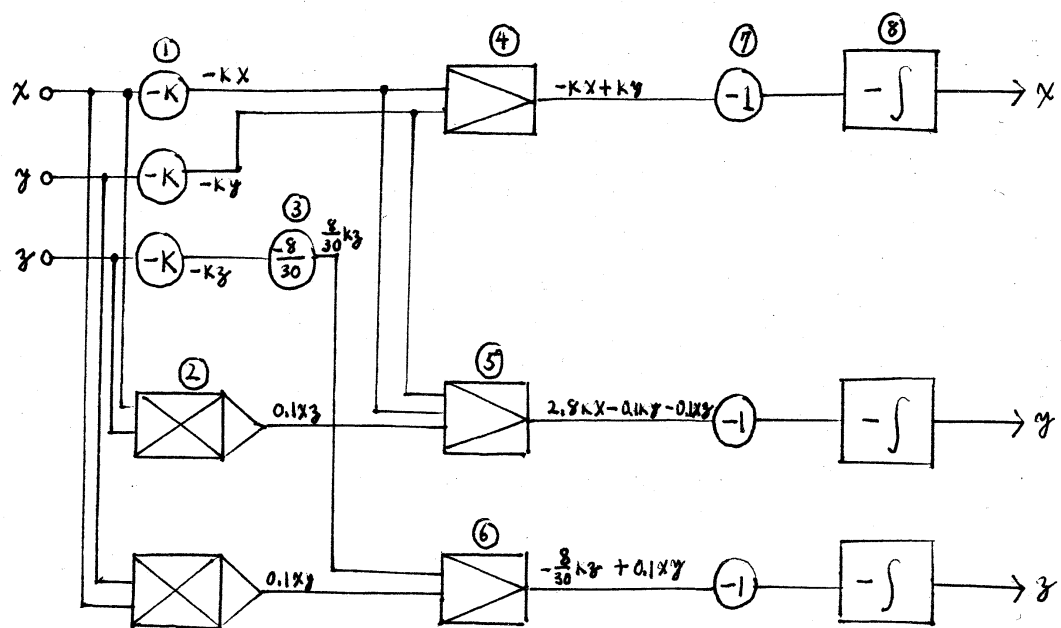
x, y, z は $\pm 15V$ の範囲におさまるように、しかもあまり小さくならないようにしなければならない。まず、方程式の右辺を 0.1 倍しておく。これはアトラクターのサイズは変えない。しかし x, y とか x, z とかの大きすぎる電圧 ($x = y = 10(V)$ なら $x, y = 100(V)$) はさけられる。次に x, y, z に適当なスカラーをかけて アトラクターを適当な大きさにする。しかし アトラクターの大きさがわからないので (文献をみればすぐわかることだが) 「適当なスカラー」は後からディグスイッチで設定するようにした。

方程式の右辺は次のようになる。

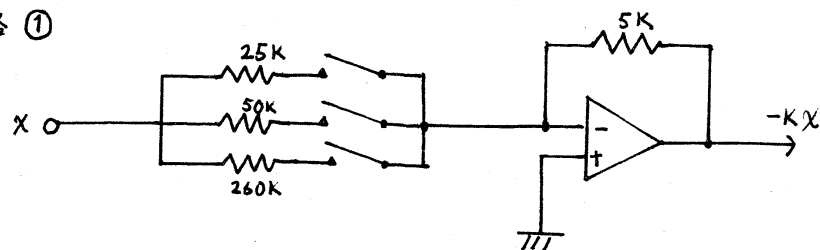
$$\begin{cases} \dot{x} = -kx + ky \\ \dot{y} = 2.8kx - 0.1ky - 0.1xz \\ \dot{z} = -\frac{8}{30}kz + 0.1xy \end{cases}$$

ここで k の値を変えることにより アトラクターのサイズが変わる。

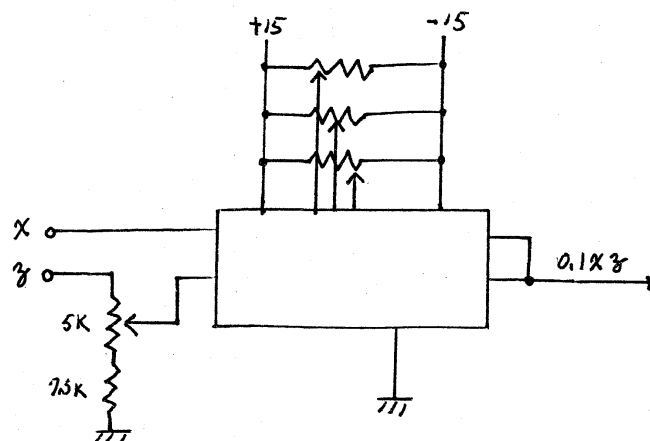
次に積分の時定数 RC だが、これはロータリースイッチにより C の値を選ぶようにした。



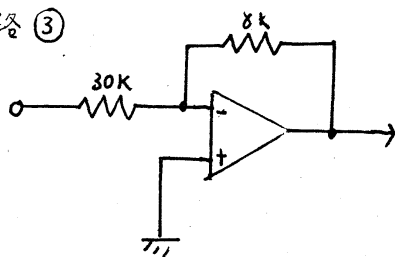
回路①



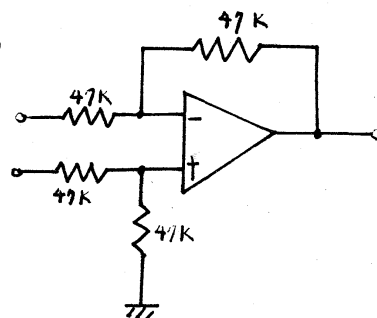
回路②



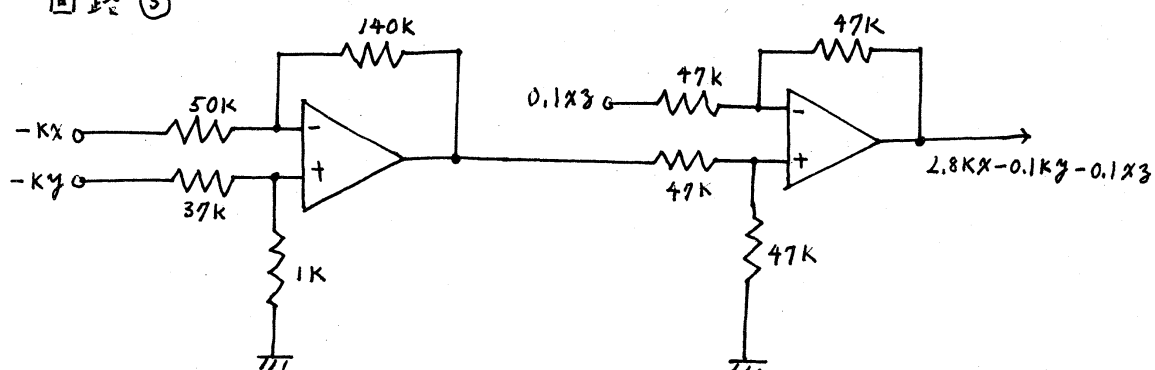
回路③



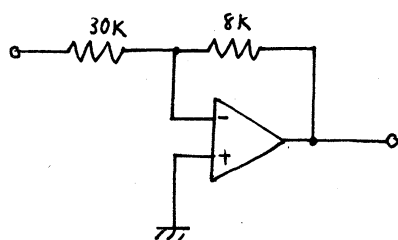
回路④



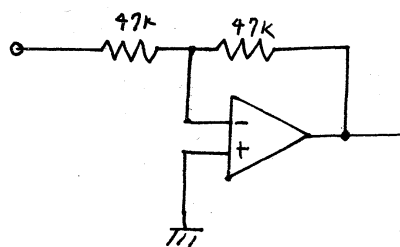
回路⑤



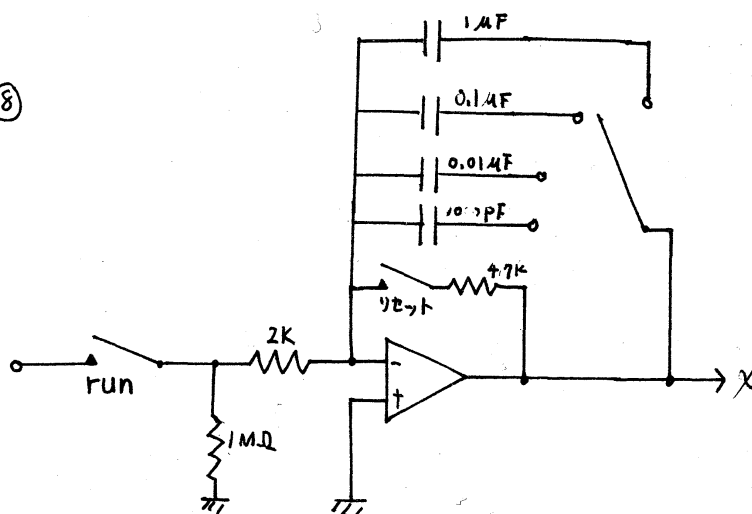
回路⑥



回路⑦



回路⑧



オペアンプは、T. I. TL071 と TL072

抵抗は $\frac{1}{4}W$ 1%級

コンデンサーは 1MP は $\pm 10\%$ のフィルムコンを選別

その他は 1% スチコン

を用いた。全体としての精度は $\pm 5\%$ ぐらいのものだと思う。

この回路ではパラメータを変えることは考えていない。

後から 回路の入れやすい部分にボリュームをそう入してパラメータを変えられるようにした。しかし それは数学的に意味のある変え方ではない。

子は正の電圧しかとらないが、これは $\pm 15V$ の範囲で大きく動かす、という意味では非効率なので、後で子を $-7V$ 平行移動する回路を付加させた。