

写像空間上の Clifford bundle の構成

信州大学理学部 浅田 明

物理学者は Loop 空間上の Dirac 作用素 (Dirac-Ramon 作用素) を考え、その指数定理を得ている ([1], [4]). この研究から Elliptic cohomology や string class 等の数学理論が生まれたが、Dirac-Ramon 作用素の厳密な定義はまだ得られていない。ここではその手前の問題として、写像空間上の Clifford bundle を構成する問題を扱う。

1. 写像空間の Sobolev 構造

X を d -次元 compact (spin) 多様体, M を N -次元 C^∞ -多様体とし

$$\text{Map}(X, M) = \{f: X \rightarrow M \mid f \text{ は Sobolev } k\text{-class, homotopic to } 0\}$$

とする. $\text{gr}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subset X \times M$ とすると f が homotopic to 0 だから $\text{gr}(f)$ は $X \times M$ の中で $X \times *$ に deform され, $X \times *$ は $X \times M$ の中で trivial な normal bundle を持つから, $\text{gr}(f)$ の normal bundle も trivial になる. 従って $\text{gr}(f)$ の $X \times M$ の適当な近傍を取ると diffeomorphism

$$h_u: U(\text{gr}(f)) \cong \text{gr}(f) \times \mathbb{R}^N$$

がある。従って $\text{Map}(X, M)$ は X 上の (実数値関数の) k -Sobolev 空間を $W^k(X)$ とした時 $W^k(X) \otimes \mathbb{R}^N$ を model とする Sobolev 多様体 (従って Hilbert 多様体) になる。

M が実代数集合で $\mathbb{R}^m$ の中で方程式

$$(1) \quad F_1(x) = \dots = F_L(x) = 0, \quad x = (x_1, \dots, x_m)$$

で定義されれば $\text{Map}(X, M)$ は $W^k(X) \otimes \mathbb{R}^m$ の中で

$$(2) \quad F_1(f) = \dots = F_L(f) = 0, \quad f = (f_1, \dots, f_m),$$

$$F(f)(x) = F(f(x))$$

で定義された実代数集合になる。 X が spin 多様体の時、 X 上の spinor 場の作る k -Sobolev 空間 $W^k(X, \mathcal{S})$ は $W^k(X)$ を含む。又 $W^k(X, \mathcal{S}) \otimes \mathbb{R}^m$ でも方程式 (2) は定義され、 (2) によって $W^k(X, \mathcal{S}) \otimes \mathbb{R}^m$ の中に定まる代数的集合は $\text{Map}(X, M)$ を含む。この代数的集合の中の $\text{Map}(X, M)$ の適当な近傍を取れば、非特異で $\text{Map}(X, M)$ に contractible, 且 $W^k(X, \mathcal{S}) \otimes \mathbb{R}^m$ を model とした Sobolev 多様体である。簡単の爲以下では、この近傍も $\text{Map}(X, M)$ と書く。又 $W^k(X) \otimes \mathbb{R}^m$, $W^k(X, \mathcal{S}) \otimes \mathbb{R}^m$ 等を $W^k(X)$ と書く。

2 Sobolev 空間の正規化次元

X を compact Riemann 多様体, E を X 上の Hermitian vector bundle と

する. E の section の作る Hilbert 空間を $L^2(X)$ とし, その内積と計量を固定して (f, g) , $\|f\|$ と書く. 又 E の section の作る k -Sobolev 空間を $W^k(X)$ とする. $W^k(X)$ の Sobolev norm を固定する爲, E の section に向く非退化 1 階自己共役楕円形 (擬) 微分作用素 D を固定する. D は compact 多様体上の楕円形作用素だから $D = \sum \lambda_l(e_l) e_l$ と spectre 分解され $\{e_l\}$ は $L^2(X)$ の o.n.-basis になる. この spectre 分解を用いて

$$G = \sum \lambda_l^{-1}(e_l) e_l : D \text{ の Green 作用素}$$

$$D_+ = \sum_{\lambda_l > 0} \lambda_l(e_l) e_l, \quad D_- = \sum_{\lambda_l < 0} |\lambda_l|(e_l) e_l,$$

$$|D| = D_+ + D_- = \sum |\lambda_l|(e_l) e_l,$$

$$J = G|D|, \quad P_+ = D_+ G, \quad P_- = D_- G \quad (J = P_+ - P_-)$$

と置く. 又正の実数 k に対して

$$D^{(k)} = \sum \operatorname{sgn} \lambda |\lambda|^k(e_l) e_l,$$

$$G^{(k)} = \sum \operatorname{sgn} \lambda |\lambda|^{-k}(e_l) e_l$$

と置く. $D^{(k)}, G^{(k)}$ を用いて $W^k(X)$, および $W^{-k}(X)$ の Sobolev norm を, $W^k(X)$ と $W^{-k}(X)$ の間の pairing (Sobolev duality) を

$$(3) \quad \|f\|_k = \|D^{(k)} f\|, \quad \|u\|_{-k} = \|G^{(k)} u\|$$

$$(4) \quad \langle u, f \rangle = (G^{(k)} u, D^{(k)} f), \quad u \in W^{-k}(X), \quad f \in W^k(X)$$

で固定する.

D と $|D|$ の spectre η -関数 $\eta(D, s)$, ζ -関数 $\zeta(|D|, s)$

$$\eta(D, s) = \sum \operatorname{sgn} \lambda |\lambda|^{-s}, \quad \zeta(D, s) = \sum |\lambda|^{-s}$$

については、全平面に有理型に解析接続可能で、 $s = d, d-1, \dots, 1$ では高々 1 位の極を持ち、 $s=0$ では正則な事が知られている (cf.)。

定義 1. $\nu = \zeta(D, 0)$ を $W^R(X)$ の正規化次元と呼ぶ。

$P_+ W^R(X)$, および $P_- W^R(X)$ の正規化次元 ν_+ , ν_- は

$$\nu_+ = (\nu + \eta(D, 0))/2, \quad \nu_- = (\nu - \eta(D, 0))/2$$

で定義する。又 $|D|, D$ の行列式 $\det |D|, \det D$ を

$$\det |D| = \exp(-\zeta'(D, 0)), \quad \det D = (-1)^{\nu_-} \det |D|$$

で定義する。この時

$$(5) \quad \det(t|D|) = t^{\nu} \det |D|, \quad \det(|D|^R) = (\det |D|)^R$$

が成立する。又

$$\zeta(D_{\pm}, s) = (\zeta(D, s) \pm \eta(D, s))/2$$

$$\det(D_{\pm}) = \exp(-\zeta'(D_{\pm}, 0))$$

と置けば

$$(6) \quad \det |D| = \det D_+ \cdot \det D_-$$

である。

後の議論で、 ν (および $\nu_{\pm}$) の整数性が要請されるが、次の変分公式が成立するので、 D を $D + mI + nJ$ に (m, n を適当に選

んで)置き換える事により(局所的には), ν, ν_- の整数性が保証される.

$$(7) \quad \zeta(D_{\pm} + mP_{\pm}, 0) \\ \equiv \nu_{\pm} - m \operatorname{Res}_{s=1} \zeta(D_{\pm}, s) + \cdots + (-1)^d m^d / d \cdot \operatorname{Res}_{s=d} \zeta(D_{\pm}, s), \text{ mod. } 2$$

なお, $\det(D_{\pm} + mP_{\pm})$ についての, 次の式は determinant bundle の定義(構成)に用いられる.

$D_{\pm}$ の固有値 $\lambda_i = \lambda_{i,\pm}$, $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$, の重複度 $\mu_i = \mu_{i,\pm}$,

$$\zeta(D_{\pm}, s+k) = a_{k,\pm,-1} s^{-1} + a_{k,\pm,0} + a_{k,\pm,1} s + \cdots \quad \text{とした時}$$

$$(8) \quad \det(D_{\pm} + mP_{\pm}) \\ = \pm \left\{ \det D_{\pm} \cdot \prod_{i=1}^N (1 + m/\lambda_i)^{\mu_i} \exp(-\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (a_{k,\pm,0} - \sum_{i=1}^N \mu_i \lambda_i^{-k})) \cdot \exp(-\sum_{k=1}^d (-1)^k m^k / k (1 + \cdots + \frac{1}{k-1}) a_{k,\pm,-1}) \right\}, \quad |\mu_i| < \lambda_{N+1}.$$

(8) は複雑だが, これから ((6) によって), $|\mu_i|$ が小さい時

$\det(D + mI)$ は m について正則で, この関数は全 m -平面に正則に解析接続され, 零点は $1 - \lambda_i$, ここでの位数は λ_i の重複度になることが解る.

3 Sobolev 空間の微分形式

$\{e_{\lambda}\}$ が $L^2(X)$ の o.n.-basis だから

$$\{e_{\lambda,k} | e_{\lambda,k} = \operatorname{sgn} \lambda |\lambda|^{-k} e_{\lambda}\}$$

が $W^k(X)$ の o.n.-basis になる (k は負でも良い). $L^2(X)$ の座標系

$\{x_{\lambda}\}$, $x = \sum x_{\lambda} e_{\lambda}$ と $W^k(X)$ の座標系 $\{x_{\lambda,k}\}$, $x = \sum x_{\lambda,k} e_{\lambda,k}$ との間は

は、偏微分について $\partial f / \partial x_{\lambda,k} = \text{sgn} \lambda |\lambda|^k \partial f / \partial x_\lambda$ の関係があるので、全微分 df については

$$(9) \quad df = \sum \partial f / \partial x_\lambda dx_\lambda = \sum \partial f / \partial x_{\lambda,k} dx_{\lambda,k}$$

である。しかし (9) の最後の式で $dx_{\lambda,k}$ は $e_{\lambda,-k} = \text{sgn} \lambda |\lambda|^k e_\lambda$ と同一視出来るので、 f が $W^k(X)$ の開集合の上で全微分可能なら、 df は $W^k(X)$ への smooth map と見る事が出来る。従って $\wedge^p W^k(X)$ を $X \times X$ 上の bundle $E \times E$ の section で交代関数となるものの作る Sobolev $-k$ -空間とした時、 $W^k(X)$ の p -形式は $\wedge^p W^k(X)$ への smooth map である。

定義 2 $p \geq 1$ の時、 $W^k(X)$ から $\wedge^p W^k(X)$ への smooth map を $W^k(X)$ の $(\infty-p)$ -形式と呼ぶ。又

$$(10) \quad f^\infty = f \cdot (\det D)^{-k-p/2}, \quad f \text{ は scalar 関数}$$

を $W^k(X)$ の ∞ -形式と呼ぶ ([4], [5], [8] 参照)。

p -形式は $W^k(X)$ の計量と無関係に定義されるが $(\infty-p)$ -形式は計量に関係する。例えば p -形式と $(\infty-q)$ -形式 ($p \leq q$) の wedge 積は $u \wedge f(x_1, \dots, x_{q-p}) = \langle u(x_1, \dots, x_{q-p}, x_{q-p+1}, \dots, x_q), f(x_{q-p+1}, \dots, x_q) \rangle$ で定義される。又 $f \wedge u = (-1)^{(q-p)p} u \wedge f$ が成立すべきだから、 p が整数でないとき矛盾が生じる。

$u(x) = u(x, x_1, \dots, x_p)$ ($x_1, \dots, x_p$ は $\wedge^p W^k(X)$ の変数) が $(\infty-p)$ -形式の時、 u の (x に用いる) Fréchet 微分を $F \cdot du$ と書く。 $x_1, \dots, x_{p-1}$ を

parameter と見ると $F\text{-}du(x, x_1, \dots, x_{p-1}, x)$ は $W^k(X)$ の linear operator である。この operator が trace class である事を仮定して、 u の外微分 du を

$$(11) \quad du(x, x_1, \dots, x_{p-1}) = (-1)^{p-1} \text{tr } F\text{-}du(x, x_1, \dots, x_{p-1}, x), \quad p \geq 1$$

で定義する。 $(\infty-p)$ -形式の外微分可能は強い条件であり、次の定理が成り立つ ([4])。

定理 1. 外微分可能な $(\infty-p)$ -形式は大域的に exact である。

系 $(\infty-p)$ -形式の空間の上では外微分 d は巾零でない。

以下では $W^{-k}(X)$ および $W^k(X)$ 上の Grassmann 代数を $\wedge W^{-k}(X)$, $\wedge W^k(X)$ と書く。これ等は norm を

$$\|\sum u^p\|^2 = \sum \|u^p\|_{\pm k}^2, \quad u^p \in \wedge^p W^{\pm k}(X) \subset W^{\pm k}(X \times \dots \times X)$$

で定義して Hilbert 空間である。又 $W^{-k}(X)$ 上の $(\infty-p)$ -形式を含む Grassmann 代数は $\wedge W^{-k}(X) \oplus \wedge W^k(X)$ である (この時 $\wedge W^k(X)$ の積は $(\infty-p)$ -形式としての積で Grassmann 代数としての $\wedge W^k(X)$ の積ではない)。 $\wedge W^{-k}(X)$ の $\wedge W^k(X)$ の積は Sobolev 計量に関する。

4. Sobolev 空間上の Clifford 代数

$W^{-k}(X)$ 上の $(C$ 上の) Clifford 代数 $C(W^{-k})$ は関係

$$e_\lambda e_\mu + e_\mu e_\lambda = -2 \text{sgn } \lambda |\lambda|^{-2k} \delta_{\lambda, \mu}$$

で定義された $\{e_\lambda\}$ で生成された C 上の代数である。生成元の

高々 p 個の積から生成された $C(W^k)$ の submodule を $C(p)$ とする
と Grassmann 写像

$$gr: C(p)/C(p-2) \cong \wedge^p W^k(x)$$

がある. 又 $x \in \wedge^p W^k(x)$, $y \in \wedge^q W^k(x)$ の Poisson 積 $\{x, y\} \in \wedge^{p+q-2} W^k(x)$ が

$$(12) \quad \{x, y\} = [a, b] \bmod C(p+q-4),$$

$$gra = x, \quad grb = y, \quad [a, b] = ab - (-1)^{pq} ba$$

で定義される. 又 $C(W^k)$ から $\wedge W^k$ 上の bounded operator の代数 $B(\wedge W^k)$ への表現 $r: C(W^k) \rightarrow B(\wedge W^k)$ が

$$(13) \quad r(a)(x) = gra \wedge x + \{gra, x\}/2, \quad x \in \wedge W^k$$

で定義される. 特に $1 \in C = \wedge^0 W^k(x) = \mathbb{C}$ に対して $s(a) = r(a)$ とすれば

$$(14) \quad s: C(W^k) \cong \wedge W^k$$

である ([12]). (14) から $\|a\| = \|s(a)\|$ として $C(W^k)$ は Hilbert 空間になる.

$W^k(x)$ の正規化次元 ν , および ν_- が共に整数であるとする.

$C(W^k)$ の生成元すべての積 e^ω (γ_5 にあたる) は (存在すれば)

$$(15) \quad e_\lambda \cdot e^\omega = (-1)^{\nu_-} e^\omega e_\lambda, \quad e^\omega \cdot e^\omega = (-1)^{\nu(\nu+1)/2 + \nu_-} (\det |D|)^{-2k}$$

をみたす. (15) をみたす元 e^ω を $C(W^k)$ に添加した代数 $C(W^k)[e^\omega]$

は, 次の表現 $R: C(W^k)[e^\omega] \rightarrow B(\wedge W^k \oplus \wedge W^k)$ を持つ.

$$(15) \quad R(e_\lambda) = \begin{pmatrix} r(e_\lambda) & 0 \\ 0 & (-1)^{\nu_-} G^{2k} r(e_\lambda) D^{2k} \end{pmatrix}.$$

$$(16) \quad R(e^{\infty}) = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^{(\nu + \nu(\nu+1)/2)/2} (\det |D|)^{-2k} D^{2k} \\ (-1)^{(\nu + \nu(\nu+1)/2)/2} G^{2k} & 0 \end{pmatrix}$$

(16) $C(W^{-k})[e^{\infty}]$ から $\Lambda W^{-k} \oplus \Lambda W^k$ への Hilbert 空間としての等距離作用素 S は

$$S(y) = R(y) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

で定義され (17) が成り立つ.

$$(17) \quad S(C(W^{-k})) = \Lambda W^{-k}, \quad S(C(W^{-k})e^{\infty}) = \Lambda W^k.$$

5. D に関する接続

U を M の開集合, S を 値相空間, $F: U \rightarrow S$ のとき

$$(18) \quad F^{\#}(f)(x) = F(f(x)), \quad x \in X, \quad f \in \text{Map}(X, U) (\subset \text{Map}(X, M))$$

とおけば $F^{\#}$ は $\text{Map}(X, U)$ から $\text{Map}(X, S)$ への写像である.

G を Lie 群, $E = \{g_{uv}\}$ を M 上の G -bundle とすれば, $\{g_{uv}^{\#}\}$ は $\text{Map}(X, M)$ 上の $\text{Map}(X, G)$ -bundle を定める. 特に $T = \{g_{uv}\}$ が M の接 bundle であれば $T^{\#} = \{g_{uv}^{\#}\}$ は $\text{Map}(X, M)$ の接 bundle になる. 又 G が unitary 群の時, $\{g_{uv}^{\#}\}$ は loop 群 bundle と同位になる ([3], [7]).

定義 3. X 上の E の section に働く 0-階自己共役擬微分作用素の空間を $D(0)$, $\{U_i\}$ を $\text{Map}(X, M)$ の open covering とする. U_i から $D(0)$ への smooth map A_{U_i} の集り $\{A_{U_i}\}$ が

$$(19) \quad (D+A_u)g_{uv}^\# = g_{uv}^\#(D+A_v)$$

をみたす時 $\{A_u\}$ を D に関する $T^\#$ の接続と呼ぶ.

$\text{Map}(X, M)$ は Hilbert 多様体だから D に関する接続は常に存在する. $D+A_u(x)$ が $x \in U$ の fibre の計量を与える為には $D+A_u(x)$ が非退化になる事が必要(十分)だが, これについては次の事実が知られている ([3], [7]).

(i) D が正定値なら, $D+A_u(x)$ が常に非退化となる接続が存在する.

(ii) D が Dirac 型の時 $D+A_u(x)$ が常に非退化となる接続が存在すれば $T^\#$ は loop 群 bundle として trivial である.

例. $X = S^1$, $G = U(N)$ とする. $T^\#$ の特性字像を $g: \Omega M \rightarrow U(N)$ とすれば $T^\#$ の標準的な transition function は

$$\{e^{th_u}, e^{-th_v}\}, \quad e^{h_u} = g \text{ on } U$$

である ([1]). $D = \frac{1}{2} \frac{d}{dt}$ とすれば $\{-\frac{1}{2} h_u\}$ が D に関する接続になる. このとき $Y_r = \{x \mid \dim \ker (D+A_u(x)) = r\}$ と置けば

$$(20) \quad Y_r = \{x \mid g(x) \text{ が } 1 \text{ を重複度 } r \text{ の固有値として持つ}\}$$

となるから, $r \geq 1$ の時 $\overline{Y}_{2r+1}$ の dual class は $T^\#$ の r -th string class である ([2]). 又 $\overline{Y}_1$ の dual class は ΩM が orientable になる ($T^\#$ が ΩG の単位元の連続成分を構造群とする) 為の obstruction になる ([7], [10] 参照).

(19) から $D+A_u(x)$ の spectre 型は u による。従って関数 $\nu(x) = \zeta(D+A_u(x), 0)$ は $\text{Map}(X, M)$ 上で定義され ($D+A_u(x)$ が退化した時は $\zeta(D+A_u(x), s) = \sum_{\lambda \neq 0} |\lambda|^{-s} + \dim \text{Ker}(D+A_u(x))$ として), $\text{Map}(X, M)$ 上連続である。従って質量項 $m=m(x)$ を扱う事により $\nu=\nu(x)$ は $\text{Map}(X, M)$ 上定数(整数)であると仮定して良い。他方 D が Dirac 型の時, ν が $\text{Map}(X, M)$ 上定数(整数)になる様接続 $\{A_u\}$ が与える属には, $\text{Map}(X, M)$ が orientable になる事が必要十分である ([7]).

6. 写像空間上の $(\infty-p)$ -形式と Hodge 作用素

$|m|$ が小さい時 $\det(D \pm mP_{\pm})$ は m の正則関数で, 全平面に正則に解析接続され, 零点は $-(D_{\pm})$ の固有値, 位数は固有値の重複度に等しい。この関数を $\det^*(D \pm mP_{\pm})$ とし

$$(21) \quad \det^*(D+mI) = \det^*(D+mP_+) \det^*(D+mP_-)$$

と置く。

$x \in U$ で $D+A_u(x)$ が退化したとき, scalar $m=m_u$ を与えて x の適当な近傍(簡單の爲 U と書く)で $D+A_u(y)+mI, y \in U$, が常に非退化に出来る。 m を定めて

$$(22) \quad \det_m(D+A_u) = \det^*((D+A_u+mI)-mI)$$

と置く (左辺は最初の m は固定され 2 番目の m は変数 m が随 m を取ったと見る)。上記の注意 ((8)) により

$$\{\chi_{uv}\} = \{\det_m(D+A_u)/\det_m(D+A_v)\}$$

と置けば $\{\delta_{uv}\}$ は $\text{Map}(X, M)$ の (complex) line bundle を定める. この bundle は (smooth bundle として) $\text{Map}(X, M)$ の tangent bundle $T^\#$ だけで定まり $\{A_u\}$ と $\{\mu_u\}$ には関係しない ([4]).

∞ -形式の局所的な定義 (10) により, $\text{Map}(X, M)$ の ∞ -形式 f^∞ は

$$f^\infty = \{f_u \det_m (D + A_u)^{-k-d/2}\}$$

の形になる. 従って $\{\delta_{uv}\}^{k+d/2}$ が定義される時, $\{f_u\}$ は $\{\delta_{uv}\}^{k+d/2}$ の cross-section になる. 言い換えれば, $\{\delta_{uv}\}$ の Chern class を $C(\{\delta_{uv}\})$ とすれば, $W^k(X)$ を model とする 写像空間 $\text{Map}(X, M)$ 上で ∞ -形式が定義される為には $(k+d/2)C(\{\delta_{uv}\})$ が integral class になる事が必要である. 但し D が positive definite であれば, $\{\delta_{uv}\}$ は trivial になるので ∞ -形式はいつでも定義出来る.

定義 4. $\{\delta_{uv}\}^{k+d/2}$ が定義出来る時 $\tau = \{\delta_{uv}\}^{k+d/2}$ を $\text{Map}(X, M)$ の determinant bundle と呼ぶ.

定義 5. τ が定義出来るとき, $T^\#$ を $\text{Map}(X, M)$ の tangent bundle として, $T^\# \otimes \tau$ に associate した $\wedge^p W^k(X)$ -bundle の cross-section を $\text{Map}(X, M)$ の $(\infty-p)$ -形式と呼ぶ.

D が positive definite なら τ は trivial bundle だから $(\infty-p)$ -形式は定義出来, $T^\#$ に associate した $\wedge^p W^k(X)$ -bundle の cross-section である.

以下, τ が定義出来, $\nu \in S(D + A_u(x)|0)$, ν_i が共に整数である

と仮定する. $u^p \in \text{Map}(X, M)$ の p -形式, $f^{\infty-p} = \{f_u\}$, $f_u = f \det_m(D+A_u)^{k+d/2}$,
 を $(\infty-p)$ -形式, $G_{A_u} = G_{A_u(x)}$ を $D+A_u(x)$ の Green 作用素とする.

定義 6. 次の (23), (24) で $\text{Map}(X, M)$ の Hodge $*$ -作用素 $*$ $= \{*_u(x)\}$
 を定義する.

$$(23) \quad *u^p = (-1)^p \det_m(D+A_u)^{(k+d/2)} G_{A_u}^{2k} u^p,$$

$$(24) \quad *f^{\infty-p} = (-1)^{p(p+1)/2} (D+A_u)^{2k} \det_m(D+A_u)^{-(k+d/2)} f_u.$$

但し $(D+A_u)^{2k} u^p = (D+A_{u(x)})^{2k} x \cdots x (D+A_{u(x_p)})^{2k} f(x_1, \dots, x_p)$ 等で $(D+A_u)^{2k} f_u$,
 $G_{A_u}^{2k} u^p$ を定義する.

x で $D+A_{u(x)}$ が退化すれば $G_{A_{u(x)}}$ は存在しないから $*(x) = *_u(x)$ は
 定義出来ない. 他方定義から $*$ が定義されていれば

$$(25) \quad *^2 u^p = (-1)^{p(p-1)/2 + p} u^p, \quad *^2 f^{\infty-p} = (-1)^{(p-1)p/2 + p} f^{\infty-p}$$

が成り立つ.

x で $D+A_{u(x)}$ が退化して $\dim \ker(D+A_{u(x)}) = 1$ であれば, x の近傍
 で $u'_\lambda * u'$ は $k < d/2 + 1$ であれば可積分になる. $k > d/2$ だから k
 としでは $(d+1)/2$ を取るのが適切である. このとき

$$k + d/2 = (d+1)/2 + d/2 = d + 1/2$$

だから τ は $C(\{x_{uv}\})$ が 2 で割り切れるとき, 定義出来る. 従っ
 て以下 $k = (d+1)/2$ とし, $C(\{x_{uv}\})$ は 2 で割り切れると仮定す
 る.

7. $\text{Map}(X, G)$ -bundle の幾何学

以下での便宜の爲 $\text{Map}(X, G)$ -bundle についての幾つかの結果をまとめておく.

$L^2(X)$ の有界線形作用素の代数 $B(L^2(X))$ の部分群 GL_p を

$$(26) \quad GL_p = \{ T \in B(L^2(X)) \mid T \text{ は逆を持ち } [T, J] \in I_p \},$$

I_p は $B(L^2(X))$ の p -Schatten ideal,

で定義する. $p > d/2$ のとき $\text{Map}(X, G)$ は GL_p の部分群であり,

GL_p は loop 群の homotopy 型を持つから $\text{Map}(X, G)$ -bundle は loop 群-bundle と思える ([3], [15]).

$G = U(m)$ のときの loop 群-bundle $\{g_{uv}\}$ (Hilbert 多様体 M 上の) の特性類 (string 類) は $\{g_{uv}\}$ の loop 代数接続 $\{A_u\}$ とその曲率 $\{F_u\}$ を用いて次の様に表わされる: $\int_0^1 \text{tr}(\widetilde{F_u} \wedge \widetilde{F_u} g'_{uv} g_{uv}^{-1}) dt$ は U 上の $2p$ -形式 B_u の集りによって $B_v - B_u$ と書ける. 更に

$$\begin{aligned} & d\left(\int_0^1 \text{tr}(\widetilde{F_u} \wedge \widetilde{F_u} g'_{uv} g_{uv}^{-1}) dt\right) \\ &= \int_0^1 \text{tr}(F_v \wedge \wedge F_v A'_v) dt - \int_0^1 \text{tr}(F_u \wedge \wedge F_u A'_u) dt \end{aligned}$$

である. 但し $g'_{uv} = dg_{uv}/dt$ 等と書く. これから M 上の global な closed $(2p+1)$ -形式 h を

$$(27) \quad h|_U = \int_0^1 \text{tr}(F_u \wedge \wedge F_u A'_u) dt - dB_u$$

で定義する. このとき, $\{g_{uv}\}$ みる $M \times S^1$ 上の G -bundle $\{g_{uv}\}^h$ を

$\{g_{uv}\}^h = \{g_{uv}^h\}$, $g_{uv}^h(x, t) = (g_{uv}(x))(t)$ で定義すると

$$(28) \quad \langle h \rangle = (2\pi i)^{p+1} (p+1)! \int_{S^1} Ch^{p+1}(\{g_{uv}\}^q),$$

$\langle h \rangle$ は h の de Rham class, Ch は Chern character

となり, $\langle h \rangle$ は $\{A_{uv}\}, \{B_{uv}\}$ の取り方によらず定まる. 更に $\{g_{uv}\}$ の特異写像を $f: M \rightarrow U(m)$, $e_p \in H^*(U(m), \mathbb{Z})$ の $(2p+1)$ -次元の生成元とすると

$$(29) \quad \langle h \rangle = -(2\pi i)^{p+1} (2p+1)! / (p+1)! f^*(e_p)$$

が成り立つ. $\langle h \rangle$ を $\{g_{uv}\}$ の p -次 string 類と呼ぶ. 特に第 1 string 類は $\{g_{uv}\}$ の構造群が中心拡大を life されるための obstruction である ([1], [2], [9], [13], [16]).

$\{g_{uv}\}$ の orientation class (構造群が単位元の連結成分に reduce されるための obstruction) は string 類では表わせない. この class は $D = \frac{1}{2} \mathcal{A}_t$ に関する接続 $\{A_{uv}\}$ を用いて次の様に表わす事が出来る:

$\eta(A)(x) = \eta(D + A_u(x), 0)$ とおけば $\eta(A)$ は M 上の関数で不連続点は

$D + A_u(x)$ が退化する点である. 更に $\exp(\pi i \eta(A))$ は M 上 smooth に

なる. $\{g_{uv}\}$ の orientation class は (real class として)

$\frac{1}{\pi i} (\exp \pi i \eta(A))^{-1} d(\exp \pi i \eta(A))$ の de Rham class である. 更に η_A の current としての外微分は

$$d\eta(A) = -\pi i \delta \bar{\gamma}_1, \quad \gamma_1 = \{x \mid \dim(D + A_u(x)) = 1\}$$

となる. 従って

$$(30) \quad \langle \frac{1}{\pi i} d\eta(A) \rangle = -\langle \bar{\gamma}_1 \rangle$$

である ([7]).

8. Cl. Hord bundle の構成

$\text{Map}(X, M)$ 上の Cl. Hord bundle で ∞ -spinor (γ_5) による Cl. Hord 種が Hodge 作用素を与える様なものを構成する為, $R(e^\infty)$ を次の作用素.

$E^\infty = E_u^\infty(x): \Lambda^p(W^{-k}(x)) \oplus \Lambda^p(W^k(x) \otimes \tau) \rightarrow \Lambda^p(W^{-k}(x)) \oplus \Lambda^p(W^k(x) \otimes \tau)$ におきのこる.

$$(31) \quad E^\infty = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^{\nu(H)/2 - k/2 + p} (D+A_u)^{2k} \det(D+A_u)^{-k-d/2} \\ (-1)^{\nu(H)/2 + \nu + \nu p} \det(D+A_u)^{k+d/2} G_{A_u}^{2k} & 0 \end{pmatrix}$$

定義から

$$(E^\infty)^2 u^p = (-1)^{p(\nu+)+\nu} u^p, \quad (E^\infty)^2 f^{\infty-p} = (-1)^{(p-\nu)+\nu} f^{\infty-p}$$

となる. 従って $\Lambda^p W^{-k}(x) \oplus \Lambda^p(W^k(x) \otimes \tau)$ の上で $(E^\infty)^{-1} = (-1)^{p(\nu-p)+\nu} E_\infty$ である. この事から

$$(32) \quad E_u^\infty (E_v^\infty)^{-1} = \begin{pmatrix} (D+A_u)^{2k} \det(D+A_u)^{-k-d/2} \det(D+A_v)^{k+d/2} G_{A_v}^{2k} & 0 \\ 0 & \det(D+A_u)^{k+d/2} G_{A_u}^{2k} (D+A_v)^{2k} \det(D+A_v)^{-k-d/2} \end{pmatrix}$$

となる. $G_{A_u(x)}$ が存在する所 ($D+A_u(x)$ が退化しない所) では,

$\{E_u^\infty (E_v^\infty)^{-1}\}$ を transition function とし $\Lambda^p(W^{-k}(x)) \oplus \Lambda^p(W^k(x) \otimes \tau) (\cong C(W^k)[e^\infty])$

を fibre として Clifford bundle が構成出来る. この bundle を Cl.f と書く.

Cl.f は $\text{Map}(X, M) - Y$, $Y = \{x \mid \dim \text{Ker}(D+A_u(x)) \geq 1\}$, で定義される (D

が positive definite なる $\text{Map}(X, M)$ 上で定義される).

以後 $Y_r = \{x \mid \dim \ker(D+A_u(x)) = r\}$ が $\text{Map}(X, M)$ の smooth submanifold になると仮定する. $x \in Y_r$ の時 $\ker(D+A_u(x))$ の basis を $e_{\lambda_1}, \dots, e_{\lambda_r}$ とすれば, 仮定から x の近傍で Y_r は $e_{\lambda_1} = \dots = e_{\lambda_r} = 0$ で定義される. 従って $\ker(D+A_u(x))$ は x での Y_r の normal space と同一視出来る. 言いかえると Y_r の normal bundle $N(Y_r)$ は

$$(33) \quad N(Y_r) = \bigcup_{x \in Y_r} \ker(D+A_u(x))$$

で与えられる. 以下 $\bar{Y}_r$ も submanifold と仮定する.

$\text{Map}(X, M)$ の接 bundle を $T^\#$, $\bar{Y}_r$ の接 bundle を $T(\bar{Y}_r)$ とすれば $T^\#|_{\bar{Y}_r} = N(\bar{Y}_r) \oplus T(\bar{Y}_r)$ で $N(\bar{Y}_r)$ は有限次元 bundle だから $T(\bar{Y}_r)$ は (GLp-bundle, 従って) loop 群 bundle になる. よって (28) により (torsion を除いて)

$$(34) \quad S^p(T(\bar{Y}_r)) = i^*(S^p(T^\#)), \quad S^p \text{ は } p\text{-th string class}$$

である.

(34) から (real class としては) $N(\bar{Y}_r)$ は 1-次元の class (orientation class) を除いて特異類を持たない. $N(\bar{Y}_r)$ の orientation class は $T(\bar{Y}_r)$ の orientation class が消之れば消える. $T(\bar{Y}_r)$ の orientation class は $\bar{Y}_r$ の中での $\bar{Y}_{r+1} \cap \bar{Y}_r$ の dual class だから, $\bar{Y}_{r+1}$ の $\text{Map}(X, M)$ の中での dual class が $N(\bar{Y}_r)$ が trivial になる為の obstruction になる.

$N(\bar{Y}_r)$ が trivial であれば適当な座標変換により, $\ker(D+A_u) \rightarrow \ker(D+A_v)$ への projection P_u と $\ker(D+A_v) \rightarrow \ker(D+A_v)$ への projection P_v は等しくなる. 従って $\text{Map}(X, M) \rightarrow Y$ の点列 y_n が x に収束するとき

$$\lim_{y_n \rightarrow x} (D+A_u(y_n))^{2k} G_{A_v(y_n)}^{2k}, \text{ および } \lim_{y_n \rightarrow x} G_{A_u(y_n)}^{2k} (D+A_v(y_n))^{2k}$$

が存在し, その値は α だけ定まる. 従って $E_{\text{cl}}^\infty(E_V^\infty)^{-1}$ が α で定義され Clif は $\overline{Y}_r$ でも定義出来る. 以上まとめて

定理 2. $\overline{Y}_{2r}$ が $\text{Map}(X, M)$ の smooth submanifold になるとき, $\text{Map}(X, M)$ の接 bundle $T^\#$ の r -th string class が Clif が $\overline{Y}_{2r}$ を拡張出来るための obstruction である.

9. Dirac-Kaehler 型作用素についての注意

$C(W^{-k})$ は even spinor の作る module と odd spinor の作る module の直和である. 対応する Clif の subbundle を S^0 と S^1 と書く. 又 $*u = E^\infty u$ とする. Clif の subbundle $S^0(+), S^0(-), S^1(+), S^1(-)$ を

$$(35) \quad S^0(\pm) = \{u \pm *u \mid u \in S^0\}, \quad S^1(\pm) = \{v \pm *v \mid v \in S^1\}$$

で定義する. 又

$$S(+)=S^0(+)\oplus S^1(+), \quad S(-)=S^0(-)\oplus S^1(-)$$

とおく. Clif は $S(+)$ と $S(-)$ の直和である.

(25) から

$$(36) \quad \begin{aligned} *^2 &= (-1)^{v-} \text{ on } S^0, \quad *S^0, \\ *^2 &= (-1)^{v+v-1} \text{ on } S^1, \quad *S^1 \end{aligned}$$

となる. 従って d の formal adjoint δ を

$$(37) \quad \delta u^p = (-1)^p *^{-1} d * u^p, \quad \delta f^{\infty-p} = (-1)^{v-p} *^{-1} d * f^{\infty-p}$$

で定義すれば, u^0, u^1 は S^0 と S^1 の section (偶数級および奇数級の

微分形式と同一視)としたとき

$$(38) \quad \begin{aligned} \delta u^0 &= (-1)^{\nu+\nu-1} * d * u^0, & \delta * u^0 &= - * du^0, \\ \delta u^1 &= (-1)^{\nu-1} * d * u^1, & \delta * u^1 &= * du^1 \end{aligned}$$

である。尚 d は $(\infty-p)$ -形式の空間 $(C(W^k \otimes \tau))$ の section の空間) 上で巾零でないから、 δ は $C(W^k)$ の section の空間の上では巾零でない。

(38) により

$$\begin{aligned} (d+\delta)u^0 &= du^0 + (-1)^{\nu+\nu-1} * d * u^0, & (d-\delta)u^0 &= du^0 + (-1)^{\nu+\nu} * d * u^0, \\ (d+\delta)*u^0 &= - * (du^0 + (-1)^{\nu+\nu} * d * u^0), & (d-\delta)*u^0 &= * (du^0 + (-1)^{\nu+\nu-1} * d * u^0), \\ (d+\delta)u^1 &= du^1 + (-1)^{\nu-1} * d * u^1, & (d-\delta)u^1 &= du^1 + (-1)^{\nu} * d * u^1, \\ (d+\delta)*u^1 &= * (du^1 + (-1)^{\nu} * d * u^1), & (d-\delta)*u^1 &= - * (du^1 + (-1)^{\nu-1} * d * u^1) \end{aligned}$$

となるから微分作用素 $D(+)$ と $D(-)$ を

$$(39) \quad \begin{aligned} D(+)u^p &= (d+\delta)u^p, & D(+) * u^p &= (-1)^{p-1} (d-\delta) * u^p \\ D(-)u^p &= (-1)^{p-1} (d-\delta)u^p, & D(-) * u^p &= (d+\delta) * u^p, \quad p=0,1 \end{aligned}$$

とおくと $D(+), D(-)$ は共に $S(+)$ の cross-section を $S(-)$ の cross-section に、 $S(-)$ の cross-section を $S(+)$ の cross-section に写す ([14] 参照)。

d, δ は共に巾零ではないから $(d+\delta)^2, (\pm i(d-\delta))^2$ は Hodge Laplacian $d\delta + \delta d$ に等しい。しかして $\Delta = d\delta + \delta d$ として

$$\begin{aligned} D(+)^2 u^p &= (\Delta + \delta^2) u^p, & D(+)^2 * u^p &= (\Delta - d^2) * u^p, \\ D(-)^2 u^p &= (\Delta - \delta^2) u^p, & D(-)^2 * u^p &= (\Delta + d^2) * u^p \end{aligned}$$

となるから

$$(40) \quad \Delta = \frac{1}{2} (D(+)^2 + D(-)^2)$$

が成立する。

$W^k(X)$ では Hodge Laplacian は $-\sum \frac{\partial^2}{\partial x_{\lambda^k}^2}$ と書けるから $L^2(X)$ の座標系では

$$-\Delta = \sum \lambda^{2k} \frac{\partial^2}{\partial x_{\lambda^k}^2}$$

となる。従って $L^2(X)$ の微分作用素

$$(41) \quad \Delta(s) = \sum \lambda^{2s} \frac{\partial^2}{\partial x_{\lambda^k}^2}$$

は $W^{-s}(X)$ 上の作用素 $-(d\delta + \delta d)$ である。但し Sobolev 計量は D によって固定されているから $\Delta(s)$ は $L^2(X)$ と D の組 $(L^2(X), D)$ に対して考えているとした方がよい。

$\operatorname{Re} s$ が大きいとき $\Delta(s)f$ が定義され、 s の関数として $s=0$ 迄解析接続されると仮定して

$$(42) \quad \Delta f = \Delta(s)f|_{s=0}$$

と定義する。例之は $r(x)^2 = \sum x_{\lambda^k}^2$ に対して $\Delta f = -(d\delta + \delta d)f$ が定義されないが $\Delta(s)r(x)^2 = 2\zeta(D^2, s)$ だから

$$\Delta(r(x)^2) = 2\zeta(D^2, 0) = 2V$$

である。又 $L^2(X)$ の座標系を $\{x_1, x_2, \dots\}$ とし極座標を

$$r = \sqrt{\sum x_n^2},$$

$$x_1 = r \cos \theta_1, \quad x_2 = r \sin \theta_1 \cos \theta_2, \quad \dots$$

$$x_n = r \sin \theta_1 \cdots \sin \theta_{n-1} \cos \theta_n, \quad \dots, \quad 0 \leq \theta_k \leq \pi,$$

を導入すれば (この極座標は緯度だけで経度がない, その代り $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \theta_1 \cdots \sin \theta_n = 0$ の条件がつく), $\text{Re } s$ が大きいとき $\Delta(s)$ は $\partial/\partial r$, $\partial/\partial \theta_i$, $i=1, 2, \dots$, で書くことが出来, それは $s=0$ で解析接続可能であり

$$(4.3) \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\nu-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Lambda$$

$$\Lambda = \sum \frac{1}{\sin^2 \theta_1 \cdots \sin^2 \theta_{n-1}} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \theta_n^2} + (\nu-n-1) \frac{\cos \theta_n}{\sin \theta_n} \frac{\partial}{\partial \theta_n} \right\}$$

となる. Λ の形は有限次元の場合と似ているが, 有限次元と違って殆んどすべての $\nu-n-1$ は負になる.

参考文献

- [1] Alvarez, O.-Killingback, T. P.-Mangano, M.-Windey, P.: String theory and loop space index theorems, Commun. Math. Phys. 111, (1987), 1-10, The Dirac-Ramond operator in string theory and loop space index theorems, Nucl. Phys. B 11A (1987), 187-215
- [2] Asada, A.: Characteristic classes of loop group bundles and generalized string classes, Coll. Math. Soc. János Bolyai 56 (1992), 33-66
- [3] Asada, A.: Non commutative geometry of GLp-bundles, Coll. Math. Soc. János Bolyai 66 (1995), New Developments of Differential Geometry, 25-49, Kluwer.
- [4] Asada, A.: Hodge operators on mapping spaces, Group 21, Physical Applications and Mathematical Aspects of Geometry, Groups and Algebras, 925-928, World Sci. 1997, Hodge operators over mapping spaces, Local Study, BSG Proceedings 1, Global Analysis, Differential Geometry, Lie Algebras, (1997), 1-10.

- [5] Asada, A.: Vector analysis on Sobolev spaces, I, II, J. Fac. Sci. Shinshu Univ. 31 (1996), 17-20, 59-70.
- [6] Asada, A.: Clifford algebras on Sobolev spaces, to appear in BSG Proc.
- [7] Asada, A.: Non commutative de Rham theory and spectral monodromy, preprint, Spectral invariant and geometry of mapping spaces, to appear in Contemporary Math. Clifford bundles over mapping spaces, to appear in Proc. DGA, Bruno, 1998.
- [8] Asada, A.-Tanabe, N.: A remark on infinite dimensional Gaussian integral in a Sobolev space, J. Fac. Sci. Shinshu Univ. 32 (1997), 61-67.
- [9] Carey, A.L. - Crowley, D.-Murray, M.K.: Principal bundles over the Dixmier Douady class, Comm. Math. Phys. 193 (1998), 171-196.
- [10] Farber, M.S. - Levine, J.P.: Jumps of the eta-invariant, Math. Zeit. 223 (1996), 197-244.
- [11] Gilkey, P.: The Geometry of Spherical Space Groups, World Sci, 1989.
- [12] Kostant, B. - Sternberg, S.: Symplectic reduction, BRS cohomology, and infinite-dimensional Clifford algebras, Ann. Phys. 176 (1987), 49-113.
- [13] Léandre, R.: Stochastic gauge transform of the string bundle, J. Geo. Phys. 26 (1998), 1-25.
- [14] Lizzi, F. - Szabo, J.R.: Target space duality in noncommutative geometry, Phys. Rev. Lett. 79 (1997), 3581-3584.
- [15] Mickelsson, J. - Rajeev, S.G.: Current algebras in D+1-dimensions and determinant bundles over infinite-dimensional Grassmannians, Comm. Math. Phys. 116 (1988), 365-400.
- [16] Pilsch, K.-Warner, N.P.: String structure and index of the Dirac-Ramond operator on orbifolds, C.M.P. 115 (1988) 191-212.