

極限定在波の頂角について

九大応力研 岡村 誠 (OKAMURA Makoto)

1. はじめに

ここであつかう定在波はいわゆる水の波の 1 つで、図 1 を見てもらえばどのようなものかはわかってもらえるだろう。この写真は Van Dyke¹⁾ からのコピーに僕が少し書き込みをしている。図中の白い曲線は流体粒子の（時間に関する）1 周期にわたる軌跡である。この曲線の一端にある流体粒子は半周期後に反対側の端に行き、さらに半周期後に同じ道をとって始めの場所に戻ってくる（振り子運動に似ている）。また、 y 軸に関して運動が対称であるという定在波の特徴も読み取れる。この実験の定在波は 2 次元であり、以下でも 2 次元定在波を扱う。つまり、流体粒子の運動は 2 次元的で図中の x - y 平面上に拘束されている。

定在波の特徴をもう少しみていこう。 y 軸に関して流体の x 方向の速度 u は反対称、 y 方向の速度 v は対称である。

$$u(x, y, t) = -u(-x, y, t), \quad v(x, y, t) = v(-x, y, t). \quad (1)$$

図中の点線で書かれている表面の時刻を $t = 0$ とすると、 u, v は時間に関して反対称である。

$$u(x, y, t) = -u(x, y, -t), \quad v(x, y, t) = -v(x, y, -t). \quad (2)$$

これは $t = 0$ で、すべての流体粒子は静止していることを意味する。この時刻では流体粒子は図中の白い曲線の端にいる。振り子運動で質点が最も高い位置にいる状態を想像して下さい。

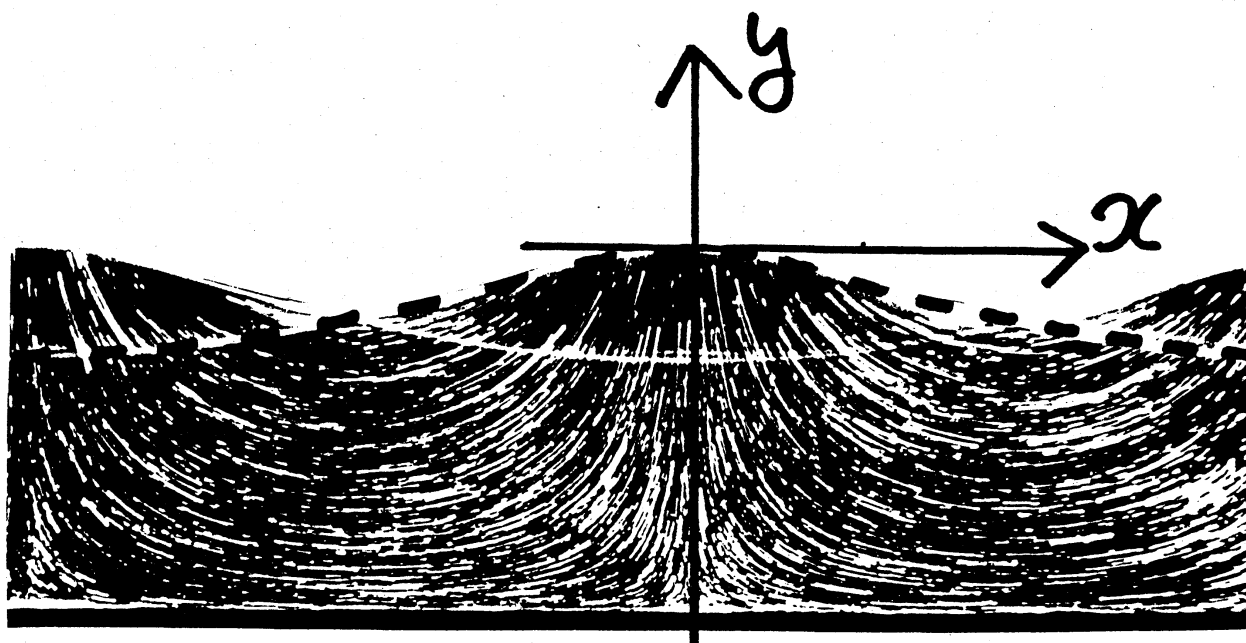


図 1: 2次元定在波の流体粒子の軌跡（実験）

極限と頂角について一言．極限波は最大振幅（振幅最大の極限）波のこととおけばだいたいよい．より正確には極限定在波とは波の峰 (crest) での流体の加速度が重力加速度に一致する定在波のこと．頂角とは波の表面がとがった時，その場所での表面のなす角．

2. これまでの研究

Penney と Price²⁾ が 1952 年に極限定在波の頂角は 90° になると述べて以来，彼らの証明を多くの人が疑っているにも拘らず，解析的な研究は少ないようである．僕が知っているものでは Grant⁶⁾ だけである．かれは，例えば，定在波の波形の時間空間に関するフーリエ展開の無限にある項のうちの一部（ただし，これも無限）をとった解析解を求めた．その解から，極限定在波の頂角は 90° になると述べている．しかし，Schwartz と Whitney⁴⁾ によって Grant の解は共鳴を押さえるようにはなっていないことが指摘されている．

一方、数値計算による研究では Saffman と Yuen³⁾が適当な初期条件から時間発展させて、頂角が約 60° になる“定在波”を見つけている。しかし、この“定在波”は時間周期性がよくない。

Schwartz と Whitney⁴⁾は速度ポテンシャルを振幅展開して、大振幅定在波を求め、Penney らの結論は悪くないといっている。しかし、彼らの大振幅定在波はあまり精度よく求まっていないと思う。

最近、Mercer と Roberts⁵⁾は時間発展と反復法を使い、数値的に精度良く大振幅定在波を求めている。彼らは、極限定在波の頂角は $60 \sim 70^\circ$ になると数値計算の結果から予想している。

このように数値計算からは極限定在波の頂角を予想するだけで確定するのは難しい。ここでは Penney らの方法を拡張して、定在波の頂角の確定を解析的に試みる。講演では定在波はとがらなと述べたが、この講究録では結論を変更し、極限定在波はとがり、その頂角は 90° となることを示します。

3. 問題の定式化

2次元非圧縮非粘性の流体で、渦なし運動を仮定する。表面張力は極限波の峰付近では重要だろうけれども、ここでは無視する。複素速度ポテンシャルを $f(z, t)$, $z \equiv x + iy$, 複素速度 $w(z, t) = f_z$, 圧力を $P(x, y, t)$ とすれば、基礎方程式は

$$\begin{aligned} -2P &= -i(z - z^*) + ww^* + f_t + f_t^* \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} -2\frac{DP}{Dt} &= i(w - w^*) + f_{tt} + f_{tt}^* + 2w_t w^* + 2w_t^* w + w_z (w^*)^2 + w_z^* w^2 \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

となる. この式は Longuet-Higgins⁷⁾が進行波の峰近傍の解を解析する時に導出している. ここで重力加速度が1になるように規格化している. これらの式は表面での圧力は時間によらず一定(ゼロ)であることと表面にある流体粒子はいつまでも表面にいることを現している. 定在波の対称性の条件 (1), (2) は次のように書ける.

$$w(z, t) = -[w(-z^*, t)]^*, \quad w(z, t) = -w(z, -t) \quad (5)$$

(3), (4) と (5) が定在波を記述する基礎方程式である.

4. 局所解

座標原点を $t = 0$ での定在波の峰のうちの1つとする (図1参照). (3), (4) と (5) を厳密に解くのは難しいので, 空間については原点の近傍 ($|z| \sim 0$), 時間についても $t \sim 0$ で成り立つ近似解を求める. 複素速度ポテンシャルを以下のように展開できると仮定しよう.

$$f(z, t) = T(t) + iA(t)z + B(t)z^2 + iC(t)z^3 + D(t)z^4 + iE(t)z^5 + \dots \quad (6)$$

$$\begin{aligned} T(t) &= T_1t + T_3t^3 + T_5t^5 + \dots \\ A(t) &= A_1t + A_3t^3 + A_5t^5 + \dots \\ B(t) &= B_1t + B_3t^3 + B_5t^5 + \dots \\ C(t) &= C_1t + C_3t^3 + C_5t^5 + \dots \\ D(t) &= D_1t + D_3t^3 + D_5t^5 + \dots \\ E(t) &= E_1t + E_3t^3 + E_5t^5 + \dots \end{aligned} \quad (7)$$

表面がとがるかもしれないのに整数幂で展開することに疑問を持つだろう. このことについては後で議論をします. また, 表面での圧力がゼロということから, $T_1 = 0$ となります. (5) も考慮してあります. (3) で時間と空間が最低次で釣り合うように

$$x \sim y \sim t^2 \sim \epsilon \ll 1 \quad (8)$$

と仮定します. (6) を (3), (4) に代入して, その 2 つの方程式を同時に満足する条件が求める表面の式である.

(3), (4) で例えば ϵ の 4 次までで展開を打ち切るとする. すると, これらの式は

$$\begin{aligned} P &= U_0(y, t) + U_1(y, t)x^2 + U_2(y, t)x^4 = 0, \\ \frac{DP}{Dt} &= t(V_0(y, t) + V_1(y, t)x^2) = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

となる. この両方の式を満足する x, y, t の関係式が求める表面の式である. これは上式を x についての方程式だと思つと, この 2 つの方程式が少なくとも 1 つの共通解を持つ条件と同等である. その条件は

$$F_c(y, t) = 0 \quad (10)$$

となる. これは (9) より x を消去したといつてもよい. この式の y, t の冪の独立性より, 各展開係数 $T_3, \dots, A_3, \dots$ が求まる. ここで A_1 のかわりに次のようなパラメーター H を導入する.

$$H \equiv 1 - A_1 = 1 + \left. \frac{Dv}{Dt} \right|_{x=y=t=0} \quad (11)$$

これは $t = 0$ での波の峰 ($x = y = 0$) における流体の加速度と重力加速度 (1 に規格化されている) との差である. 表面の式は $P = 0$ から, 次のように ϵ の 3 次まで得られる.

$$P_1 + P_2 + P_3 = 0 \quad (12)$$

$$\begin{aligned} P_1 &= 30H(3 - 4H)[2y + (1 - H)t^2] \\ P_2 &= -5(3 - 4H)[12(-x^2 + y^2 + (1 - 2H)yt^2) + (3 - 12H + 10H^2)t^4] \\ P_3 &= 40(4 + 3B_3)(3x^2y - y^3) \\ &\quad - 60t^2[(2 - 3B_3 + 6B_3H)x^2 - (14 - 16H - 3B_3 + 6B_3H)y^2] \\ &\quad + 10yt^4[-24 + 36H - 8H^2 + 3B_3(3 - 12H + 10H^2)] \\ &\quad [10 + 44H - 160H^2 + 112H^3 + B_3(-15 + 90H - 150H^2 + 76H^3)]t^6 \end{aligned} \quad (13)$$

ここで B_1 , B_3 は考察のところで述べるように空間スケールと深さに関するパラメーターであり, 上に表面の式では $B_1 = 1$ としている. 図 2, 図 3 は $H = 0$ (極限波), $B_3 = 0$ と $H = 0.2$, $B_3 = 0$ の 2 つの場合の表面の形を描いている. 図中の 4 本の線はそれぞれ時刻 $t = 0, \pm 0.1, \pm 0.2, \pm 0.3$ での表面の形である. 速度の時間に関する反対称性 (2) より, $t = \pm t_0$ での表面の形は全く同じである.

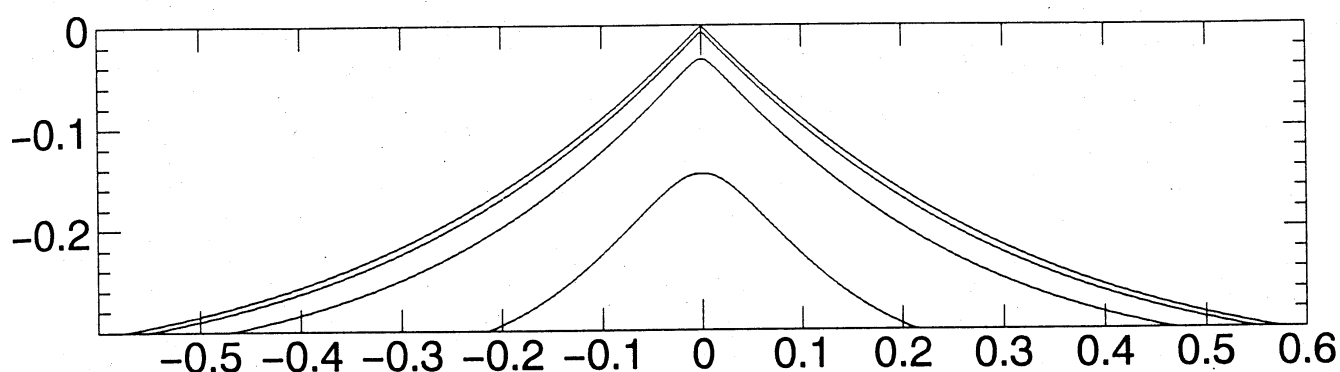


図 2: 峰付近の波形. $H = 0$, $B_3 = 0$, 上より $t = 0, \pm 0.1, \pm 0.2, \pm 0.3$.

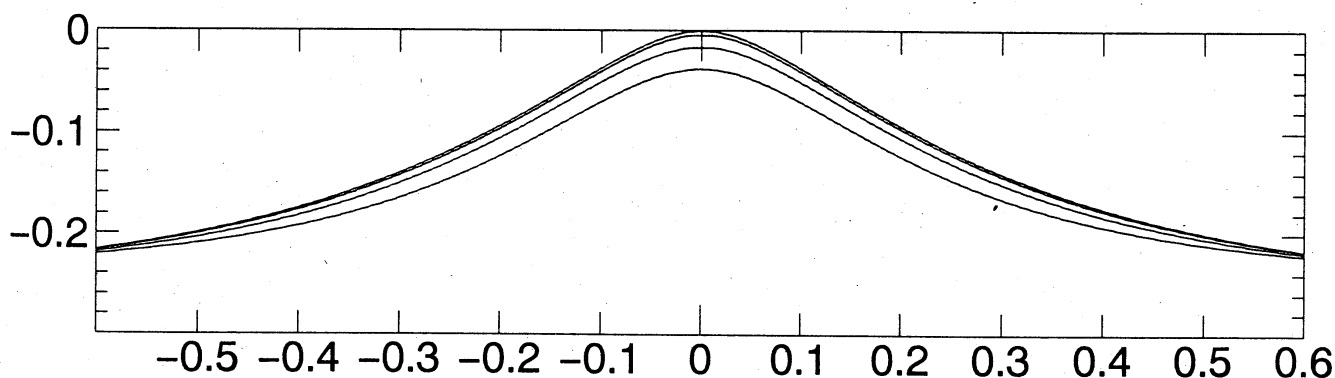


図 3: 峰付近の波形. $H = 0.2$, $B_3 = 0$, 上より $t = 0, \pm 0.1, \pm 0.2, \pm 0.3$.

$H = 0$ の極限波の場合を見てみよう. このとき $P_1 = 0$ だから, (13) の

最低次は P_2 で、最低次の表面の式は

$$-x^2 + \left(y + \frac{1}{2}t^2\right)^2 = 0 \quad (14)$$

となる．これはとがったまま表面の形を変えずに自由落下を示している．3次までの表面の式から $t=0$ でのみ，峰が 90° にとがる予想通りの解が得られる（図2参照，図の波形は3次までの解を描いてある）．そして，峰が 90° にとがることは深さのパラメーター B_3 に依存しない．一方， $H > 0$ （極限波ではない）の時には(13)の最低次は P_1 となり，峰はとがらない（図3参照）．

ここで Grant の解について文句を言おう．表面がとがる時の Grant の局所解は

$$-x^2 + y^2 - t^2 = 0 \quad (15)$$

となり，(14)とあきらかに異なる．表面の式を $y = \eta(x, t)$ とすると，峰での y 方向の流体の速度は $\eta_t = t/\sqrt{t^2}$ で等速度となる． $t=0$ では静止しているのだから， $t=0$ で無限大の大きさの加速度を持つという現実離れした解である．

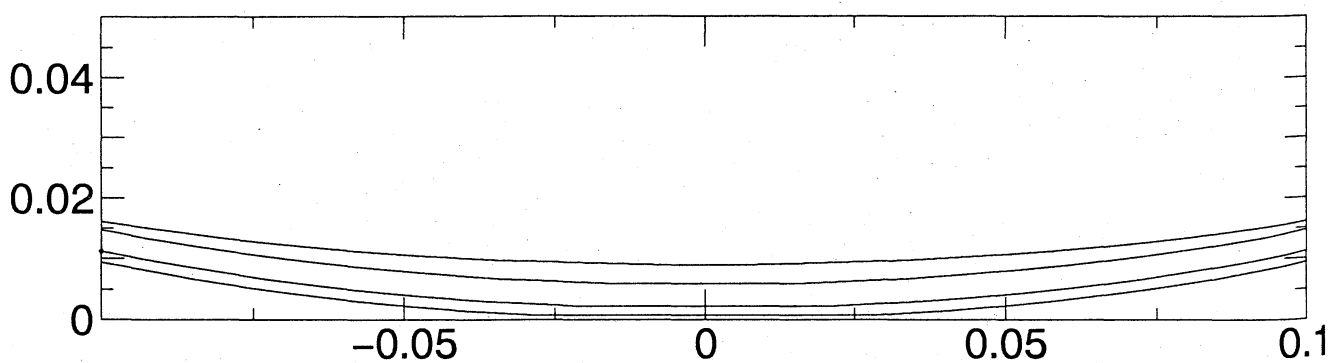


図4: 谷付近の波形． $H = 1.1$, $B_3 = 0$, 上より $t = 0, \pm 0.2, \pm 0.4, \pm 0.6$.

空間スケールに関するパラメーター $B_1 = -1$, $H > 1$ とおくと，定在

波の谷 (trough) の近傍の解が得られる (図 4 参照). $H > 1$ は流体の加速度が上向きであることを示していて, 波の谷ではそうになっている.

図 5 はパラメーター H を変化させた時の表面の傾き (場所によって異なるので, その最大値を選んでいる) をかいたものである. 水深無限大の時に対応する B_3 の値はわからないが, とりあえず $B_3 = 0$ としている. B_3 を変えると図 5 のグラフは A_1 から離れるにつれて, 多少違いが見られるが, 定性的な議論では $B_3 = 0$ としてさしつかえない. 上で述べたように $A_1 \equiv 1 - H$ が 1 に近いところのグラフは B_3 によらない. 図 6 は Mercer らの深さ無限大の定在波の数値計算の結果である. 傾向は似ているが, 定量的には違う. 数値計算は H がゼロから離れている方が, 局所解は H がゼロに近い方が正確である. なぜなら, H がゼロから離れていくにつれ, 表面の傾きの最大値を取る場所が原点から離れていくから局所解 (原点に近いところほど正確) はよくなるのである. 局所解と数値計算とを定量的に一致させるには, より高次の局所解を求める必要があるが, それでも B_3 は決められないだろう.

上で求めた解は ϵ の 3 次まで正しい表面の式である. ここでは書き下していないが, さらに高次の ϵ の 4 次まで正しい表面の式も求めている. その解より (7) の展開係数 $D_1 = 0$ となることから, $t = 0$ での 4 次までの表面の式と 3 次までの表面の式 (12), (13) は一致する. $t \neq 0$ のとき, 4 次までの表面の式には当然 4 次の補正が加わっている.

ここで Penney らの解を考えよう. 彼らの解は (7) において $A_1 (= 1)$ と B_1 以外の係数は全てゼロとおいたことに対応している. すると (4) は自動的に満たし, (3) から

$$-B_1(x^2 - y^2) = 0 \quad (16)$$

を得る. $B_1 \neq 0$ ならば頂角は 90° になると結論している. この解は $t = 0$

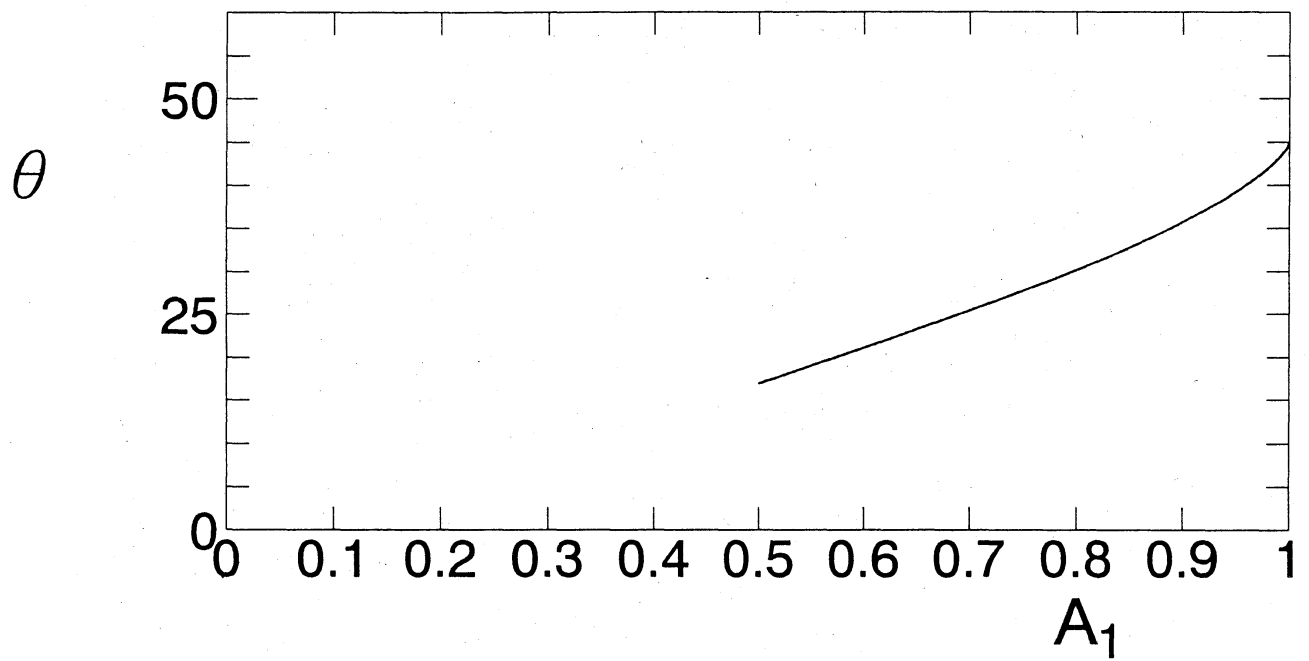


図 5: 表面の傾きの最大値と $H(A_1 = 1 - H)$ との関係 (局所解). $B_3 = 0$.

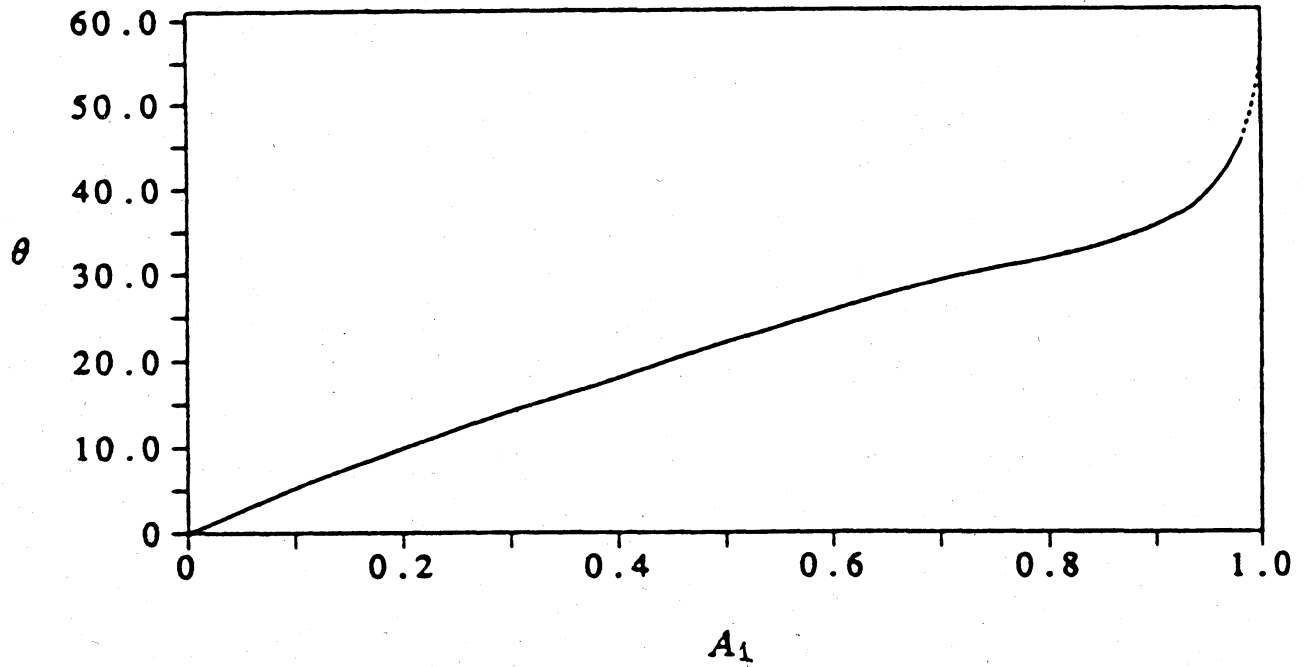


図 6: 表面の傾きの最大値と $H(A_1 = 1 - H)$ との関係 (Mercer らの数値解).

でのみ成り立つ式である．当然 Penney らの解はここで求めた局所解に含まれている．Penney らの証明に不満をひとつあげるならば $B_1 \neq 0$ の説明がないことだろう．

5. 考察

まずパラメーターの数について考えよう．(3), (4) のような問題は空間時間をそれぞれ λ : 波長, $\sqrt{\lambda/g}$, (g : 重力加速度) で規格化することができるので, 見掛け上, 波長と重力加速度は 1 となる．すると, 定在波のパラメーターとしては深さと振幅に関する 2 つが考えられる．当然この深さは波長で規格化されている．求めた局所解を見ると 3 つのパラメーター B_3 , B_1 , H がある．ここで $B_3 = B_1^3 d$, 空間時間を $1/B_1$, $1/\sqrt{B_1}$ で規格化すれば, B_1 は消えてしまう． B_1 と λ を比べることにより, B_1 は波長の逆数 (波数) に対応していることがわかる．そして, $|B_1| = 1$ として構わない．これは, 例えば波長を 2π としても一般性を失わないのと同じこと．だから実質的にはパラメーターは深さに関する B_3 と振幅に関する H の 2 つになる．

ここで求めた局所解では底での境界条件を課していないので, 深さと B_3 との関係はよくわからない．一般的に水深が浅くなると最大振幅/波長が小さくなり, 波形勾配が小さくなる．ここで求めた局所解は B_3 を大きくすると波形勾配が小さくなることから, B_3 を大きくすることは水深を浅くすることに対応しているようである．

振幅に関するパラメーター H は正確にいうと, $t = 0$ での波の峰における流体の加速度と重力加速度との差である．つまり, $H = 0$ のときには波の峰は重力加速度で落ち, $H > 0$ のときには波の峰は重力加速度より小さい加速度で落ちる．振幅があまり大きくない時は振幅と H は 1 体

1 の関係だが、振幅がかなり大きくなる ($0 < H \ll 1$) と、この関係はくずれ、振幅はパラメーターとして適当でなくなる。つまり、同じ振幅で 2 種類以上の波がある。

ここで波の表面がとがることについて考えてみよう。ここで求めた局所解は $t = 0, x = y = 0$ でのみとがるのである。表面の式を $y = \eta(x, t)$ とすると、とがるときには $\partial\eta/\partial x$ が $x = 0$ で 2 つの値を持つため定まらない。運動学的境界条件に対応する (4) は速度を (u, v) としたとき、通常

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} + u \frac{\partial\eta}{\partial x} = v \quad (17)$$

と書く。この式には $t = 0, x = y = 0$ で定まらない $\partial\eta/\partial x$ が含まれている。しかし、定在波の場合、 y 軸 ($x = 0$) 上では $u(x = 0, t) \equiv 0$ が成り立っているので、運動学的境界条件におかしなところは現われない。

次に表面の圧力について考えよう。 $H = 0, t = 0$ の時、表面が波の峰 $x = y = 0$ でとがるので、そこでは流体に働く力 ($\partial P/\partial x, \partial P/\partial y$) の方向が不定になり (2 つの方向がある) 問題になりそうである。しかし、ここで求めた局所解は波の峰で $\partial P/\partial x = \partial P/\partial y = 0$ となっているので、方向が不定でも問題にならない。つまり、この点は鞍部点なのである。 $\nabla P = 0$ なので、 $t = 0$ でこの峰の流体は近傍の流体から力を受けていない。その時流体の速度はゼロだから、この点の流体粒子は $t = 0$ で自由落下する。 $t \neq 0$ では、峰の流体も近傍の流体から力を受けているので、すぐに峰の流体の加速度の大きさは重力加速度の大きさより小さくなる。ここで述べたことは波の峰の加速度が重力加速度となることと、波の峰がとがることとは同じことを意味している。

以上のことから、複素速度ポテンシャルを (6) のように整数幂で展開することと波形がとがることとは矛盾しないことがわかる。ここでは非整数幂展開による解については何もっていない。もちろんそのような

解はあっても構わない. ここで述べたのは複素速度ポテンシャルを整数
冪で展開して波形がとがることを記述できたことである. 今後, ϵ の 5 次
以上でここで求めた局所解に対応するものがあることを確かめ, この局
所解が本当の解とパラメーター空間でつながっていることを数値的に示
していかなばならないだろう.

参考文献

- 1) M. Van Dyke (1982) *An Album of Fluid Motion*, 111.
- 2) W.G. Penney & A.T. Price (1952) *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, **A244**,
254-284.
- 3) P.G. Saffman & H.C. Yuen (1979) *J. Fluid Mech.*, **95**, 707-815.
- 4) L.W. Schwartz & A.K. Whitney (1981) *J. Fluid Mech.*, **107**, 147-171.
- 5) G.N. Mercer & A.J. Roberts (1992) *Phys. Fluids*, **A4**, 259-269.
- 6) M.A. Grant (1973) *J. Fluid Mech.*, **60**, 593-604.
- 7) M.S. Longuet-Higgins (1980) *Proc. R. Soc. London*, **A371**, 441-451.