

一次元プラズマの乱流

お茶の水女子大学 理学部 岩田 義一

要 旨

一次元プラズマにおいて密度、速度、電場の強さなどの変動の大きさを見るため、流体力学の方程式、ポアソン方程式を変分形式に書きかえ、さらにそれをハミルトン形式に書く。そして変動量の確率分布にかんする方程式をたて、定常な確率分布がハミルトニアンの指数関数である一つの場合について期待値を計算し、運動エネルギーおよび電場のエネルギーの期待値は互いにひとしいことがえられた。

1. ハミルトン形式への変換

一次元プラズマの運動方程式、連続の方程式、ポアソン方程式をそれぞれ

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{e}{m} E = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial (n+n_0)}{\partial t} + \frac{\partial (n_0+n)u}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -4\pi en \quad (3)$$

とかく。 n_0 はイオンの密度、 n_0+n は電子の密度である。 W は流体の内部エネルギーに関係した量であり

$$W = \int \frac{dp}{\rho}$$

で定義される。ただし p : 圧力, ρ : 密度, この場合 $\rho = n_0 + n$ そして温度 T におけるプラズマの圧力として

$$p = \frac{kT}{m} (n_0 + n) = \frac{kT}{m} \rho$$

を仮定する。したがって

$$W = \frac{kT}{m} \log(n_0 + n) \quad (4)$$

(2)から

$$n_0 + n = \frac{\partial \phi}{\partial x} \equiv \phi_x, \quad (n_0 + n)u = -\frac{\partial \phi}{\partial t} \equiv -\phi_t \quad (5)$$

とおくことができる。この $n = \phi_x - n_0$ を(3)に代入すれば

$$\frac{\partial}{\partial x} \{ E + 4\pi e(\phi - n_0 x) \} = 0$$

これから

$$E + 4\pi e(\phi - n_0 x) = c(t) \quad (6)$$

(5), (6)を用いて(1)を変形する。 $u = -\phi_t / \phi_x$ をつかえば

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\phi_t}{\phi_x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\phi_t}{\phi_x} \right)^2 + W \right\} - \frac{4\pi e^2}{m} (\phi - n_0 x) + \frac{e}{m} c(t) = 0$$

さてラグランジュ関数 $L(\phi, \phi_x, \phi_t)$ を用いるとき変分原理

$$\delta \int L(\phi, \phi_x, \phi_t) dx dt = 0$$

からえられる方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \phi_t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial \phi_x} - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$$

である。これに上式を照し合わせれば

$$L = \frac{1}{2} \frac{\phi_t^2}{\phi_x} - \int W d\phi_x - \frac{2\pi e^2}{m} (\phi - n_0 x)^2 + \frac{e}{m} c(t) \phi$$

ととればよい。 W は密度 $n_0 + n = \phi_x$ だけの関数であるから

$$\int W d\phi_x = \frac{kT}{m} \int \log \phi_x \cdot d\phi_x = \frac{kT}{m} (\phi_x \log \phi_x - \phi_x)$$

ただし括弧の中の $-\phi_x$ は $\partial L / \partial \phi_x$ に定数項をつけ加えるだけであり、 x による微分によつて消えるから不必要である。

したがつて

$$L = \frac{1}{2} \frac{\phi_t^2}{\phi_x} - \frac{kT}{m} \phi_x \log \phi_x - \frac{2\pi e^2}{m} (\phi - n_0 x)^2 + \frac{e}{m} c(t) \phi$$

これからハミルトニアン密度 H は

$$H = \phi_t \frac{\partial L}{\partial \phi_t} - L = \frac{\phi_t^2}{2\phi_x} + \frac{kT}{m} \phi_x \log \phi_x + \frac{2\pi e^2}{m} (\phi - n_0 x)^2 - \frac{e}{m} c(t) \phi$$

となる。第1項 $\phi_t^2/2\phi_x = \frac{1}{2}(n_0+n)v^2$ は単位体積についての運動エネルギーを m でわつたもの、 $kT\phi_x \log \phi_x = kT(n_0+n) \log(n_0+n)$ は内部エネルギーに関係した量、

$$\frac{2\pi e^2 (\phi - n_0 x)^2}{8\pi} = \frac{(E - c(t))^2}{8\pi} \text{ は電場のエネルギー。}$$

ϕ に対する正準共役 $\psi \equiv \partial L / \partial \phi_t$ は

$$\psi = \phi_t / \phi_x (=v)$$

で与えられる。もう一度かきかえれば

$$H = \frac{1}{2} \phi_x \psi^2 + \frac{kT}{m} \phi_x \log \phi_x + \frac{2\pi e^2}{m} (\phi - n_0 x)^2 - \frac{e}{m} c(t) \phi$$

この H を x について積分したものを

$$K \equiv \int H dx$$

とかけば、 ϕ, ψ についての運動方程式は

$$\frac{\partial \phi(x)}{\partial t} = \frac{\delta K}{\delta \psi(x)}$$

$$\frac{\partial \psi(x)}{\partial t} = - \frac{\delta K}{\delta \phi(x)}$$

という正準形式にかくことができる。 ∂ 記号は汎関数微分を意味する。

2. 確率分布

時刻 t において $\phi(x), \psi(x)$ がそれぞれ $\phi(x), \psi(x)$ という値をとる確率を P とすれば P は

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \int \left(\frac{\partial P}{\partial \phi(x)} \frac{\delta K}{\delta \psi(x)} - \frac{\partial P}{\delta \psi(x)} \frac{\delta K}{\delta \phi(x)} \right) dx = 0$$

にしたがつて変化する。左辺第2項はポアソン括弧であり、したがつてこの式はまた

$$\frac{\partial P}{\partial t} + [P, K] = 0$$

とかくこともできる。

$\phi(x), \psi(x)$ のとりうる値については始めから $-\infty$ から ∞ までと仮定するわけにゆかない。^{*}

確率分布 P が定常である場合、 P の一つの解は K の任意函数である。あるいはラプラス積分で表わして

$$P = \int_0^\infty e^{-\lambda x} g(\lambda) d\lambda$$

とかくこともできる。

3. 汎函数積分の実行

区間 L を N 等分し、分点 j における ϕ, ϕ_x, ψ の値を ϕ_j, η_j, ψ_j とおく。

また $L/N = \varepsilon$ とかく。そうすると

$$\phi_0 = \phi_0$$

$$\phi_1 = \phi_0 + \varepsilon \eta_1$$

$$\phi_2 = \phi_0 + \varepsilon (\eta_1 + \eta_2)$$

$$\phi_{N-1} = \phi_0 + \varepsilon (\eta_1 + \dots + \eta_{N-1})$$

$$\phi_N = \phi_0 + \varepsilon (\eta_1 + \dots + \eta_N)$$

$\phi_N - \phi_0 = n_0 L$ という条件、すなわち $n_0 L = \varepsilon (\eta_1 + \dots + \eta_N)$ によつて η_N は他の η_j によつて表わされる。

積分変数として、 $\phi_0, \eta_1, \dots, \eta_{N-1}$ をとり $-\infty < \phi_0 < \infty, 0 \leq \eta_j < \infty$,

$\eta_1 + \dots + \eta_{N-1} \leq n_0 L / \varepsilon$ とおけば $\eta_N \geq 0$ が保証される。

ψ_j については $-\infty < \psi_j < \infty$ でよい。

^{*}) $\psi = -\infty$ については $-\infty < \psi < \infty$ でよいと思うが、 ϕ については密度 $n_0 + n = \phi_x$ が正であることを考えなければならない。つまり

$$\phi_x \geq 0$$

さらにまた E について x にかんし周期 L の周期性を仮定すれば

$$E(L) = E(0)$$

$$\phi(L) - n_0 L = \phi(0)$$

が必要である。

さて積分を和でおきかえて

$$K = \left[\frac{\varepsilon}{2} \sum_{j=1}^{N-1} \eta_j \psi_j^2 + \frac{\varepsilon k T}{m} \sum_{j=1}^{N-1} \eta_j \log \eta_j + \frac{2\pi e^2 \varepsilon}{m} \sum_{j=1}^{N-1} (\phi_j - n_0 \varepsilon j)^2 \right]$$

$\eta_j \psi_j^2, \eta_j \log \eta_j$ については $j = N$ の項をのぞく。これを除けば計算が少し簡単になり、 $N \rightarrow \infty$ のときの極限值には影響がないから、次の確率分布

$$P = e^{-\lambda K}$$

にたいし

$$J = \int e^{-\lambda K} d\Omega = \int e^{-\lambda K} \prod_{j=1}^{N-1} d\psi_j d\phi_j \prod_{j=1}^{N-1} d\eta_j$$

を計算する。

ψ_j にかんする積分はすぐ実行できる。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda \frac{\varepsilon}{2} \eta_j \psi_j^2} \Pi d\psi_j = \left(\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda \varepsilon}} \right)^{N-1} \Pi \frac{1}{\sqrt{\eta_j}}$$

つぎに η にかんする積分を行うため $\sum (\phi_j - n_0 \varepsilon j)^2$ に関係した項を変形する。

$$\begin{aligned} & \exp \left[-\frac{\lambda 2\pi e^2 \varepsilon}{m} \sum_{j=1}^{N-1} (\phi_j - n_0 \varepsilon j)^2 \right] \\ &= \Pi \int \frac{m}{8 e^2 \varepsilon \lambda \pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{m}{4\pi e^2 \varepsilon \lambda} u_j^2 - i u_j (\phi_j - n_0 \varepsilon j) \right] du_j \\ &= \left(\frac{m}{8 e^2 \varepsilon \lambda \pi^2} \right)^{\frac{N-1}{2}} \iint \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{m}{4\pi e^2 \varepsilon \lambda} \sum u_j^2 - i \sum u_j (\phi_j - n_0 \varepsilon j) \right] \cdot \Pi du_j \end{aligned}$$

$\sum u_j (\phi_j - n_0 \varepsilon j)$ を変形する。

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{N-1} u_j (\phi_j - n_0 \varepsilon j) \\ &= \sum_{j=1}^{N-1} u_j \{ \phi_0 + \varepsilon (\eta_1 + \cdots + \eta_j) - n_0 \varepsilon j \} \end{aligned}$$

$$= \phi_0 \sum_{j=1}^{N-1} u_j + \varepsilon \eta_1 (u_1 + \dots + u_{N-1}) + \varepsilon \eta_2 (u_2 + \dots + u_{N-1}) + \dots \\ + \varepsilon \eta_{N-1} u_{N-1} - n_0 \varepsilon \sum_j u_j$$

よつて J をもう一度かき直すと

$$J = \left(\frac{2\pi}{\lambda \varepsilon} \right)^{\frac{N-1}{2}} \left(\frac{m}{8 \varepsilon^2 \lambda \pi^2} \right)^{\frac{N-1}{2}} \int \dots \int \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{m}{4\pi \varepsilon^2 \lambda} \sum_{j=1}^{N-1} u_j^2 \right. \\ \left. - \frac{\lambda \varepsilon k T}{m} \sum_{j=1}^{N-1} \eta_j \log \eta_j - i \phi_0 \sum_j u_j - i \varepsilon \eta_1 (u_1 + \dots + u_{N-1}) \right. \\ \left. - i \varepsilon \eta_2 (u_2 + \dots + u_{N-1}) - \dots - i \varepsilon \eta_{N-1} u_{N-1} + i n_0 \varepsilon \sum_j u_j \right] \prod \frac{1}{\sqrt{\eta_j}} du_j d\eta_j d\phi_0$$

この積分において ϕ_0 は一ヶ所にしか現れていない。 ϕ_0 について積分すれば $\delta(\sum_j u_j)$ という因子が表われる。この積分はのこしておいて、さきに η_j について行う。

$$S = \int \exp \left[-\frac{\lambda \varepsilon k T}{m} \sum_j \eta_j \log \eta_j - i \varepsilon \sum_j \eta_j \sum_{k=j}^{N-1} u_k \right] \prod \frac{1}{\sqrt{\eta_j}} d\eta_j$$

積分範囲は $\eta_j > 0$, $\sum_j \eta_j < N n_0$ であるが $\sum_j \eta_j < N n_0$ という制限をのぞくため、切断因子

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{z(Nn_0 - \eta_1 - \dots - \eta_{N-1})} \frac{dz}{z} = \begin{cases} 1, & Nn_0 - \sum \eta_j > 0 \\ 0, & Nn_0 - \sum \eta_j < 0 \end{cases}$$

をかけて、

$$S = \frac{1}{2\pi i} \int e^{z N n_0} \frac{dz}{z} \prod_j \int_0^\infty \exp \left[-\frac{\lambda \varepsilon k T}{m} \eta_j \log \eta_j - z \eta_j - i \varepsilon \eta_j \sum_{k=j}^{N-1} u_k \right] \frac{d\eta_j}{\sqrt{\eta_j}}$$

ところで小さな ε について

$$\int_0^\infty e^{-z\eta - \varepsilon b \eta \log \eta - \varepsilon a \eta} \frac{d\eta}{\sqrt{\eta}} \\ = \int_0^\infty e^{-z\eta} \frac{d\eta}{\sqrt{\eta}} \{ 1 - \varepsilon b \eta \log \eta - \varepsilon a \eta + \dots \}$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\sqrt{z}} - \epsilon b \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{z^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\Gamma'(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2})} - \log z \right) - \frac{\epsilon a \Gamma(\frac{3}{2})}{z^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{z}} \left\{ 1 - \frac{\epsilon b}{2z} \left(\frac{\Gamma'(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2})} - \log z \right) - \frac{\epsilon a}{2z} \right\}$$

$$\left(\int_0^\infty e^{-z\eta} \frac{d\eta}{\sqrt{\eta}} \eta \log \eta = \int_0^\infty e^{-z\eta} \eta^{\frac{1}{2}} \log \eta d\eta = \left[\frac{d}{ds} \int_0^\infty e^{-z\eta} \eta^{s-1} d\eta \right]_{s=\frac{3}{2}} \right. \\ \left. = \left[\frac{d}{ds} \frac{\Gamma(s)}{z^s} \right]_{s=\frac{3}{2}} = \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{z^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\Gamma'(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2})} - \log z \right) \right)$$

よつて

$$S = \frac{1}{2\pi i} \int e^{N n_0 z} \frac{dz}{z} \left(\frac{\pi}{z} \right)^{\frac{N-1}{2}} \prod_j \left\{ 1 - \frac{\epsilon \lambda k T}{2 m z} \left(\frac{\Gamma'(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2})} - \log z - \frac{i \epsilon \sum_{K=j}^{N-1} u_K}{2 z} \right) \right\} \\ = \frac{1}{2\pi i} \int e^{N n_0 z} \frac{dz}{z} \frac{\pi^{\frac{N-1}{2}}}{z^{\frac{N-1}{2}}} \exp \left\{ - \frac{(N-1) \epsilon \lambda k T}{2 m z} \left(\frac{\Gamma'(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2})} - \log z \right) \right. \\ \left. - \frac{i \epsilon \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{K=j}^{N-1} u_K}{2 z} \right\}$$

この積分の saddle point は

$$\frac{d}{dz} \left(N n_0 z - \frac{N}{2} \log z \right) = N n_0 - \frac{N}{2} \frac{1}{z} = 0$$

$$2 n_0 z = 1 \quad \text{あるいは} \quad z = \frac{1}{2 n_0}$$

によつてきまる。

よつて \$S\$ の積分を \$\exp(\quad)\$ と、それ以外にわけ、 \$\exp(\quad)\$ には \$z = \frac{1}{2 n_0}\$ をいれると

$$S = \frac{1}{2\pi i} \int e^{N n_0 z} \frac{dz}{z} \frac{\pi^{\frac{N-1}{2}}}{z^{\frac{N-1}{2}}} \cdot \exp \left\{ - \frac{L \lambda k T n_0}{m} \left(\frac{\Gamma'(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2})} - \log 2 n_0 \right) \right. \\ \left. - i \epsilon n_0 \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{K=j}^{N-1} u_K \right\}$$

$$= \frac{\pi^{\frac{N-1}{2}} (N n_0)^{\frac{N-1}{2}}}{\Gamma(\frac{N+1}{2})} \exp \left\{ -\frac{L \lambda k T n_0}{m} \left(\frac{\Gamma'(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2})} - \log 2 n_0 \right) - i \varepsilon n_0 \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=j}^{N-1} u_k \right\}$$

ところで

$$\sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=j}^{N-1} u_k = \sum_{j=1}^{N-1} j u_j$$

である。それゆえ

$$\begin{aligned} J &= \left(\frac{2\pi m}{8\pi^2 \varepsilon^2 \lambda^2 \pi^2} \right)^{\frac{N-1}{2}} \frac{\pi^{\frac{N-1}{2}} (N n_0)^{\frac{N-1}{2}}}{\Gamma(\frac{N+1}{2})} \exp \left\{ -\frac{L \lambda k T n_0}{m} \left(\frac{\Gamma'(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2})} - \log 2 n_0 \right) \right\} \\ &\quad \cdot \int \cdots \int \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{m}{4\pi \varepsilon^2 \varepsilon \lambda} \sum_{j=1}^{N-1} u_j^2 - i \phi_0 \sum_{j=1}^{N-1} u_j \right] \Pi du_j d\phi_0 \\ &\quad \int \cdots \int \exp \left[-\frac{1}{2} a \sum_{j=1}^{N-1} u_j^2 - i \phi_0 \sum_{j=1}^{N-1} u_j \right] \Pi du_j d\phi_0 \\ &= \int d\phi_0 \left(\int \exp \left[-\frac{1}{2} a u^2 - i \phi_0 u \right] du \right)^{\frac{N-1}{2}} \\ &= \int d\phi_0 \left(\frac{2\pi}{a} \right)^{\frac{N-1}{2}} e^{-\frac{\phi_0^2}{2a}(N-1)} = \left(\frac{2\pi}{a} \right)^{\frac{N-1}{2}} \sqrt{\frac{2\pi a}{N-1}} \end{aligned}$$

よつて

$$\begin{aligned} J &= \left(\frac{2\pi m}{8\pi^2 \varepsilon^2 \lambda^2 \pi^2} \right)^{\frac{N-1}{2}} \pi n_0 \cdot \frac{2\pi \cdot 4\pi \varepsilon^2 \varepsilon \lambda}{m} \left(\frac{N-1}{2} \right)^{\frac{N-1}{2}} \cdot \frac{N^{\frac{N-1}{2}}}{\Gamma(\frac{N+1}{2})} \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{N-1} \cdot \frac{m}{4\pi \varepsilon^2 \varepsilon \lambda}} \\ &\quad \cdot \exp \left\{ -\frac{L \lambda k T n_0}{m} \left(\frac{\Gamma'(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2})} - \log 2 n_0 \right) \right\} \\ J &= \left(\frac{2\pi^2 n_0}{\varepsilon \lambda} \right)^{\frac{N-1}{2}} \frac{N^{\frac{N-1}{2}}}{\Gamma(\frac{N+1}{2})} \sqrt{\frac{2\pi}{N-1} \cdot \frac{m}{4\pi \varepsilon^2 \varepsilon \lambda}} \\ &\quad \cdot \exp \left\{ \frac{L \lambda k T n_0}{m} \left(\log 2 n_0 - \frac{\Gamma'(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2})} \right) \right\} \end{aligned}$$

量Aの期待値 $\langle A \rangle \equiv \bar{A}$ は

$$\langle A \rangle \equiv \bar{A} = \int A P d\Omega / \int P d\Omega$$

によつて与えられる。以上の計算を部分的にくりかえすことにより、

$$\bar{\eta}_j = \frac{1}{2z} = n_0, \bar{\eta}_j^n = 1 \cdot 3 \cdots (2n-1) n_0^n, \bar{\eta}_j \bar{\eta}_k = n_0^2$$

$$\bar{\psi}_j = 0, \quad \bar{\psi}_j^2 = \infty \quad (\text{速度の自乗の期待値})$$

$$\frac{1}{2} \bar{\eta}_j \bar{\psi}_j^2 = \frac{1}{2\lambda} \quad (\text{これは運動エネルギーの期待値})$$

$$\frac{2\pi e^2}{m} \bar{\phi}_0^2 = \frac{1}{2\lambda} \quad (\text{電場のエネルギーの期待値})$$

$$\bar{\phi}_0 = 0$$

$$\text{また } \bar{\phi}_j^2 = \bar{\phi}_0^2 + e^2 \Gamma_0^2 j(j+2), \quad (j=1, 2, \dots, N-1)$$

$$\frac{kT}{m} \bar{\eta}_j \log \eta_j = \frac{n_0}{\lambda} \left(\psi\left(\frac{j}{2}\right) + \log 2n_0 \right)$$

ただし

$$\psi\left(\frac{j}{2}\right) = \frac{\Gamma'\left(\frac{j}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{j}{2}\right)}$$

運動エネルギーの期待値が電場のエネルギーの期待値にひとしいことは笹倉浩氏がえている結果に一致する、いわゆる等分配則である。速度の期待値が0であるのに速度の自乗の期待値が ∞ となるのは少し奇妙である。しかし計算を吟味してみれば密度が小さくなると速度の変動が大きくなり、そのために積分が発散するのである。密度を速度の自乗にかけたものの期待値はこれに反し収束する。