

Lerch's theorem for analytic functionals with
unbounded carrier

吉野邦生 (Kunio Yoshino)
上智大理工 (Sophia University)

§0. 問題の背景

有界閉区間 $[0, T]$ 上の連続関数 $f(t)$ が, 次の条件

$$(*) \quad \int_0^T f(t) e^{nt} dt = 0 \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

を満たす時, $f(t) \equiv 0$ となる事は, 例へば, 古典的な Weierstrass の多項式近似定理から判る。ここで上の条件 (*) を 次の条件 (**)

$$(**) \quad \left| \int_0^T f(t) e^{nt} dt \right| \leq M \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

(M は定数)

に変わった時, $f(t) \equiv 0$ は, 結論できるであろうか?

答は, yes である。この事実は, "Lerch の定理" として知られていて, 演算子法の出発点である。([4])
Hikashiki の演算子法の教科書 [4] では非常に, tricky な証明が, 与えられている。これは, hyperfunction

的な証明を与えてみる。 先ず,

$$Gf(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^T \frac{f(t)}{1 - \omega e^t} dt$$

という函数を考える。 $Gf(\omega)$ は 1つの性質を持つ。

$$(i) \quad Gf(\omega) \in O(\mathbb{C} \setminus [\bar{e}^T, 1])$$

$$(ii) \quad Gf(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n \frac{1}{2\pi i} \int_0^T f(t) e^{nt} dt$$

$$(|\omega| < \bar{e}^T)$$

ここで、条件 (ii) を用いると、

(ii) の巾級数展開は、実は、 $|\omega| < 1$ で成立(213)ことが判る。この事と (i) を考え合わせ、 $Gf(\omega) \in O(\mathbb{C} \setminus \{1\})$ とする。

$Gf(\omega)$ の定義式に於いて、 $s = e^t$ と変数変換をすることで、

$$Gf(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\bar{e}^T}^1 \frac{f(-\log s)}{s - \omega} ds$$

となる。従って、 $Gf(\omega)$ は、 $f(-\log s)$ の“標準定義函数”である事に於ち、境界値を取ると、

$$\begin{aligned} f(-\log u) &= Gf(u + i0) - Gf(u - i0) \\ &= 0 \quad (u \neq 1) \end{aligned}$$

故に、 $f(t) = 0$ on $[0, T]$ が、 f の連続性が判る。 //

以上の様ないわゆる Moment Problem の一意性は、
非有界区間で、一般には、成り立たない。例として、
Stieltjes が、Hermitte にあてた手紙の中で言及している

$$\int_0^{\infty} e^{-x^{1/4}} \sin(x^{1/4}) x^n dx = 0 \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

という例がある。（— 松信：解析学序説、下巻）

この小文では、非有界区間の場合を含めた Moment
Problem の一意性、更に、Lerch の定理を論ずる。
主な道具は、非有界な台を持つ解析関数、 x の
Fourier-Laplace (Borel) 変換、Arakissian-Gay
変換、強漸近展開である。以下、次の72頁以下
に沿って進行していく。

§1. 関数空間 $Q(L; k)$ の定義とその双対
空間 $Q'(L; k)$

§2. 解析関数 T の Fourier-Laplace 変換
Arakissian-Gay 変換

§3. 整関数の逆 Mellin 変換と x の強漸近
展開

§4. 主要結果

§1. 関数空間 $Q(L; k')$ の定義とその双対空間 $Q'(L; k')$

L を次の様な複素平面上の帯状 (半) 領域とする。

$$L = [a, \infty) + i[-k, k] \quad a \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{R}, \\ k > 0.$$

関数空間 $Q(L; k')$ を次の様に定義する。

$$Q(L; k') = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0, \varepsilon' \rightarrow 0} Q_b(L_\varepsilon; k' + \varepsilon')$$

$$\text{但し, } Q_b(L_\varepsilon; k' + \varepsilon') = \left\{ f(z) \in O(L_\varepsilon) \cap C(L_\varepsilon) : \right. \\ \left. \sup_{z \in L_\varepsilon} |e^{(k' + \varepsilon')z}| f(z)| < +\infty \right\}$$

ここで, L_ε は L の ε -近傍を表わしている。つまり,

$$L_\varepsilon = [a - \varepsilon, \infty) + i[-k - \varepsilon, k + \varepsilon].$$

又, $O(L_\varepsilon)$, $C(L_\varepsilon)$ は、それぞれ L_ε 上の正則関数の空間, L_ε 上の連続関数の空間を表わす。

$Q(L; k')$ の双対空間を $Q'(L; k')$ で表わし, $Q'(L; k')$ の元を L を支台に持つ, $k' > 0$ の

解析汎函数と呼ぶ。

§2. 解析汎函数 T の Fourier-Laplace, Aronissian-Gay 変換

$T \in Q'(L; k')$ とする。

$$\widehat{T}(z) = \langle T, e^{z\cdot} \rangle$$

と書き, T の Fourier-Laplace (Borel) 変換と呼ぶ。

$\operatorname{Re} z < -k'$ の条件下に, 一般には, 定義できる。

次の事が, 知られている ($z = x + iy$ とする。)

「 $\forall \varepsilon > 0, \forall \varepsilon' > 0, \exists C_{\varepsilon, \varepsilon'} > 0,$

$$(1) \quad |\widehat{T}(z)| \leq C_{\varepsilon, \varepsilon'} e^{(a-\varepsilon)x + (k+\varepsilon)|y|}$$

$$(\operatorname{Re} z \leq -k'-\varepsilon)$$

」

又, Fourier-Laplace 変換は, $Q'(L; k')$ と上の評価を満たす整型函数 ($\operatorname{Re} z < -k'$ 上の) の空間

$\operatorname{Exp}((-\infty, -k') + i(\mathbb{R}; L))$ との間の一対一対応を与える。(7)を参照)

次に T の Aronissian-Gay 変換 $G_T(\omega)$ を

$$G_T(\omega) = \left\langle T, \frac{1}{1 - \omega e^J} \right\rangle$$

と定義する。次の性質を持つことが知られている。

(1) (7) を参照)

$$(2) \quad G_T(\omega) \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \exp(-L))$$

$$(3) \quad \forall \varepsilon > 0, \forall \varepsilon' > 0, \exists C_{\varepsilon, \varepsilon'} > 0,$$

$$|G_T(\omega)| \leq C_{\varepsilon, \varepsilon'} |\omega|^{-k-L-\varepsilon'} \quad (k+\varepsilon \leq |\arg \omega| \leq \pi)$$

$$(4) \quad G_T(\omega) = - \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{T}(-n) \omega^n \quad (|\omega| > e^a)$$

(5) (互換公式)

$$\langle T, h \rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_{2L_\varepsilon} G_T(\bar{e}^J) h(J) dJ$$

$$h \in \mathcal{O}(L; k'). \quad (\varepsilon \text{ は } k' \text{ に依存する})$$

(6) 特に (4) より, (或いは, 定義式より)

$$\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} G_T(\omega) = 0$$

Aravission - Gay 変換は, $\mathcal{Q}'(L; \sigma')$ と上記の性質 (2), (3), (6) を満たす $\mathbb{C} \setminus \exp(-L)$ 上の正則函数の空間 $\mathcal{O}_0(\mathbb{C} \setminus \exp(-L); \sigma')$ の間の線型位相同型を与える. 以上の事をまとめると,

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Exp}((-\infty, -\sigma') + i\mathbb{R}; L) & & \\
 \begin{array}{c} \text{Fourier} \\ \text{-Laplace} \\ \text{変換} \end{array} \uparrow & \text{Aravission} & \searrow \\
 \mathcal{Q}'(L; \sigma') & \xrightarrow{\text{Gay 変換}} & \mathcal{O}_0(\mathbb{C} \setminus \exp(-L); \sigma')
 \end{array}$$

とある. 我々の次の目標は, $\text{Exp}((-\infty, -\sigma') + i\mathbb{R}; L) \rightarrow \mathcal{O}_0(\mathbb{C} \setminus \exp(-L); \sigma')$ の変換で, 上の図式を可換にするものを 具体的に 構成する事である.

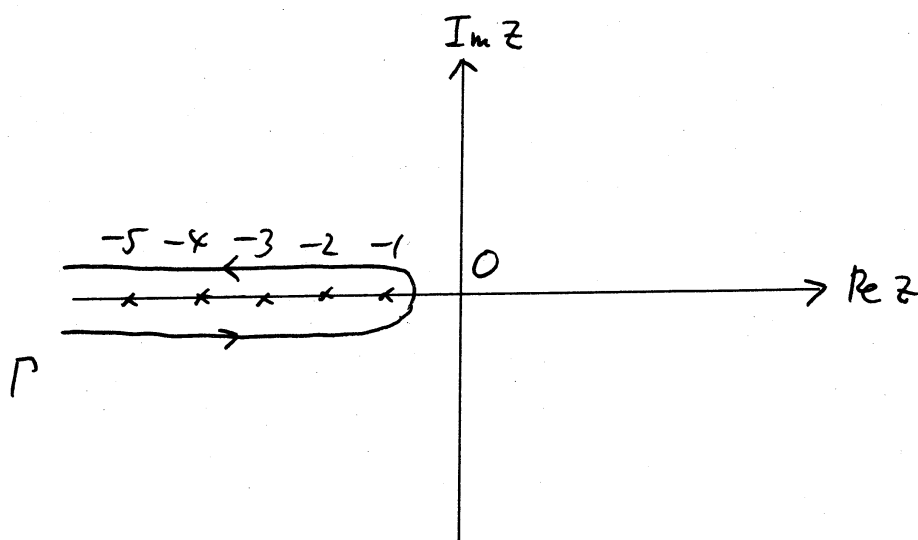
§3. 整函数の逆 Mellin 変換とその強漸近展開

$F(z) \in \text{Exp}((-\infty, -\sigma') + i\mathbb{R}; L)$ とする.

$F(z)$ の逆 Mellin 変換 $M^{-1}(F)(w)$ を次の様に定義する.

$$M^{-1}(F)(\omega) = \begin{cases} \frac{-1}{2i} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} \frac{F(z)}{\sin(\pi z)} (-\omega)^z dz & (e < |\arg \omega| < \pi) \\ \frac{-1}{2i} \int_{\Gamma} \frac{F(z)}{\sin(\pi z)} (-\omega)^z dz & (|\omega| > e^a) \end{cases}$$

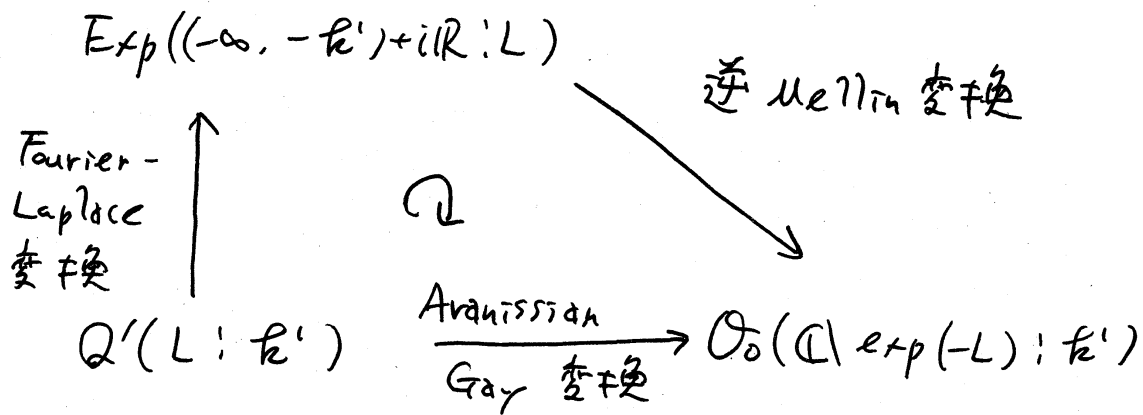
積分路 Γ は, 次の様である。



$F(z)$ の満たす評価式 (1) を考えれば被積分函数の評価を定行することにより, $M^{-1}(F)(\omega) \in O(\mathbb{C} \exp(L))$ が判る。(一価性は, Cauchy の積分定理が判る.)

又, $F(z) = \overline{\gamma}(z)$ の時には留数計算と定行すること, (4) により, $M^{-1}(F)(\omega) = G_{\gamma}(\omega)$ が判る. つまり, 我々は, 次の可換図式を得たのである.

8



すなわち, $\text{Exp}((-∞, -h') + iℝ; L)$ の元は z に対して次の性質を持つものを考える。 $\exists \lambda < 1, \forall \varepsilon > 0, \exists C_\varepsilon > 0,$

$$(7) \quad |F(z)| \leq \begin{cases} C_\varepsilon e^{(a-\varepsilon)x + (h+\varepsilon)y} & (x \leq \lambda) \\ C_\varepsilon e^{x \log|x| + h|y| + \varepsilon|z|} & (x \geq \lambda) \end{cases}$$

この性質(7)を持つ $F(z)$ の逆 Mellin 変換 $M^{-1}(F)(\omega)$ は、扇形領域 $h < |\arg \omega| \leq \pi$ に対して次の様な 強漸近展開を持つ事が判る。

$$M^{-1}(F)(\omega) \sim \sum_{n=0}^{\infty} F(n) \omega^n$$

精確に言うて、定数 $C > 0, \mu (0 \leq \mu < 1)$ が存在して、

$$\left| M^{-1}(F)(\omega) - \sum_{n=0}^N F(n) \omega^n \right| \leq C e^{(\mu+1)} (N+1)! |\omega|^{N+\mu}$$

が、 $h + \varepsilon \leq |\arg \omega| \leq \pi$ に対して成立する。

この強漸近展開の導出は、先ず、定義 $(M^{-1}(F)(\omega))$ と

$$M^{-1}(F)(\omega) = \frac{-1}{2i} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} \frac{F(z)}{\sin(\pi z)} (-\omega)^z dz$$

$$(h+\varepsilon \leq |\arg \omega| \leq \pi)$$

積分路 $[C-i\infty, C+i\infty] \in (N+\mu-i\infty, N+\mu+i\infty)$ における留数計算を実行すればよい。勿論、積分路を変更する際に、(1)の評価を用いる事は言までもない。

最後に、Stirlingの公式を用いて、望む強漸近展開を得る。

さて、強漸近展開の有用なのは、この漸近展開では、展開係数が、もしも全て零であると Original 関数が、零と結論できる点にある。(通常の漸近展開では、こうはいかない。例えば、 $e^w \sim 0$.)

(詳しくは、[6]を参照。多変数の場合については、

[3], [8]を参照。) 以下の議論では、これが key point である

(註) 最近、Y.E.I.T. の Kubyshin [2] が、筆者と同じ強漸近展開を得ている事を知った。彼は、場の理論への応用を試みている。

§4. 主要な結果

定理1. $T \in Q'(L; k')$, $k' < 1$, $0 \leq k < \pi/2$.

と仮定する. 更に, T の Fourier-Laplace 変換 $\widehat{T}(z)$ は, 次の評価を持つ.

(A) $\widehat{T}(z)$ は, 整函数

(9) $\exists \lambda < k'$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists C \geq 0$,

$$|\widehat{T}(z)| \leq C e^{\lambda} e^{x k_2 |x| + k |y| + \varepsilon |z|} \quad (x \geq \lambda)$$

$$(10) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |\widehat{T}(n)|^{1/n} < e^a$$

この時, $T \equiv 0$. (又, (9), (10) で等号が成立 (2.13c).
 T の支台は, $[a - ik, a + ik]$ に入る.)

系1 (Lerch の定理の拡張) $f(t) \in C[a, \infty)$

$$(11) \quad |f(t)| \leq C e^{-\lambda t} \quad (t \geq a)$$

$$(12) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_a^\infty f(t) e^{nt} dt \right|^{1/n} \leq e^a$$

この時, $f(t) \equiv 0$ on $[a, \infty)$.

(定理1の証明の概略)

T の Arakissian-Gay 変換 $G_T(w)$ を考える。

先ず, (2) により, $G_T(w) \in O(\mathbb{C} \exp(-L))$

又, 条件 (10) により, $G_T(w) = M^{-1}(F)(w)$ の扇形領域

で $|\arg w| \leq \pi$ における強漸近展開 $G_T(w) \sim$

$\sum_{n=0}^{\infty} \widehat{T}(n) w^n$ は $T_{\pi/2}$ の展開 (収束径が大きい)

になっている。 (実は $\pi/2$ は定数 $0 \leq \theta < \pi/2$ を用いられる)

故に, $G_T(w)$ は, 全平面 $\mathbb{C}$ で正則になり, $\pi/2$ は

$G_T(w)$ の性質 (6) を数に代入し, Liouville の定

理を用いて, $G_T(w) = 0$ とする。 G_T は, 勿論

単射であるので, $T \equiv 0$ だ, 結論される。 //

定理1に於いて, 条件 $0 \leq \theta < \pi/2$ は, crucial である。

例えば: $Q'(L; \theta)$ の具体的例として, 次の様子を
a を考える。

$h(\beta) \in Q(L; \theta)$ とする。但し, $L = [a, \infty) + i[-\pi/2, \pi/2]$

$$\langle T, h \rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_{2L_\varepsilon} e^{eJ} h(J) dJ$$

この時, P -函数の Hankel 積分表示式を利用して,

$$\tilde{T}(z) = \frac{-1}{P(1-z)} \quad (P: \text{ガウス函数}) \text{ とする}$$

$$\tilde{T}(n) = \frac{-1}{P(1-n)} = 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

しかし, $T \neq 0$!!

[3], [7], [8] の結果を組合せる事により, 定理 1 は, 高次元の場合に拡張できる。或いは [6] の中で使われている古典的な Carlson の手法をのびのびと高次元に拡張できる事が, 最近判った。

以上の他に, 幾つかの応用例があるが, 与えられた [10] を参照。整函数の一意性定理の本文と異なる証明, 又, 数列 $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ を与えて, $F(n) = a_n$ とする補間関数の存在のための条件について, [5] で論じられている。多変数の解析汎函数 (エルミート) の Lerch の定理については, [9] を参照。

References

- [1] V. Avaniessian and R. Gay : Sur une transformations des Fonctionnelles analytiques et ses applications aux fonctions entières de plusieurs variables, Bull. Soc. Math. France, 103 1975, 341-384
- [2] Yu. A. Kubyshin : Sommerfeld-Watson summation of perturbation series, Theoretical and Mathematical Physics, Vol 58, No.1 (1984) 91-96. (English translation)
- [3] H. Majima : Analogous of Cartan's decomposition theorem in asymptotic analysis, Funk. Ekvac. 26(1983)
- [4] J. Mikusiński : Operational Calculus, Pergamon Press, London (1958)
- [5] Gérard Rauzy : Les zeros entiers des fonctions entières de type exponentiel, Seminaire de Theorie des Nombres, 1976-1977 expose no.6. Universite de Bordeaux I.
- [6] M. Reed and B. Simon : Method of Modern Mathematical Physics Vol. 4, Academic Press, New York (1978).
- [7] P. Sargos and M. Morimoto : Transformations des fonctionnelles analytiques à porteurs non-compacts, Tokyo J. Math. 4 (1981) 457-492.
- [8] T. Yagami : Master thesis, at the University of Tokyo, (1983)
- [9] K. Yoshino : Lerch's theorem for analytic functionals, Proc. Japan Acad. Vol 58, Ser A, 9(1982) 395-397.
- [10] K. Yoshino : Lerch's theorem for analytic functionals with non-compact carrier and its applications to entire functions, Complex Variables, Vol 2, (1984) 303-318.