

Radon-Nikodým Compact Spaces

岡山大理 吉岡 巖 (Iwao Yoshioka)

§ 0. 序.

関数空間あるいは一般的に Banach space の compact 性に関する研究の過程で, Eberlein-compact, Talagrand-compact, Gul'ko-Compact, あるいは Carson-Compact などの概念が得られてきた。各々定義については[3]を参照された。ここでは, これ等の概念に関連して, Isaac Namioka 氏の講義録[2]で述べられている Radon-Nikodým compact (厂史については, この講義録の最後の Notes and comments) と関連する概念と, それに関連する後の問題を紹介することにした。

§ 1. Banach space の Radon-Nikodým property.

Banach space の Radon-Nikodým property は, 最初 Banach space-valued な measure をあつかう概念として与えられたが, 後に多くの人達によって, 次のような

幾何学的な同値条件が得られた。([1]を参照)。

定義(1.1) Banach space E の subset A に於いて、任意な $\varepsilon > 0$ に対して、 $x \in A$ が取れて、 $x \notin \overline{\text{co}}(A \setminus B_\varepsilon(x))$ ($=$ closed convex hull of $A \setminus B_\varepsilon(x)$) であるとき、 A を dentable という。 ($B_\varepsilon(x) \equiv \{y \in E \mid \|y - x\| \leq \varepsilon\}$)

定義(1.2) Banach space E の、bounded set が常に dentable であるとき、 E は Radon-Nikodým property ($=$ RNP) を持つ、という。

ここでは、Asplund space を幾何的な次の形で定義する。

定義(1.3) [4] Banach space E は、その dual space E^* が RNP を持つとき、Asplund space と呼ばれる。

定義(1.4) 位相空間 (X, τ) は、下の条件(*)を満足するとき、fragmented by a metric ρ on X と呼ばれる。

(*) : X の各々 non-empty subset は、任意に小さい ρ -diameter の relative open set を含む。

特に、 ρ が norm より得られる metric の時、 (X, τ) は norm-fragmented であるという。

dual space が RNP を持つための条件を抜き出しておく。

定理(1.5) Banach space E に於いて、次の条件は同値である。

(i) E^* が RNP を持つ。

(ii) $K \subset E^*$ が " w^* -compact ならば", (K, w^*) ($= K$ with w^* -topology) は norm-fragmented である.

(iii) $F \subset E$ が " σ -separable subspace ならば", F^* もまた separable である.

(iv) $K \subset E^*$ が " w^* -compact ならば", identity map

$$j: (K, w^*) \longrightarrow (K, \text{norm})$$

は, (K, w^*) のある dense G_δ -set の各点で連続である.

(v) $K \subset E^*$ が " w^* -compact ならば", E の bounded, countable set A に對して, K は p_A -separable である.

$$(p_A(x^*) \equiv \sup_{x \in A} |x^*(x)| \text{ for each } x^* \in E^*).$$

(vi) $K \subset E^*$ が " w^* -compact ならば", Asplund space F と, bounded linear map $T: E \longrightarrow F$ が存在して, $T(E)$ は F で dense であり, $D \subset T^*(U)$ である.

($U \subset F^*$: unit ball of F^* ; D : w^* -closed absolutely convex hull of K)

定理(1.6) K が Banach space E の weakly compact ならば, (K, w) は norm-fragmented である.

例(1.7) non-empty set Γ に對して, $l_1(\Gamma) \cong c_0(\Gamma)^*$: (linearly isometric) より, $l_1(\Gamma)$ は RNP を持つ.

§2. Radon-Nikodým Compact Spaces.

定義(2.1) compact Hausdorff space は, (ある Banach space の) RNP を持つ dual space の w^* -compact subset に同相のとき, Radon-Nikodým Compact (= RN-compact) という.

定理(1.6) と, 後に述べる定理(2.5)によって,

定理(2.2) Eberlein compact spaces は RN-compact spaces である.

この定理の逆は, 次の例によって成立しない.

例(2.3) 各 ordinal α について, ordinal space $[0, \alpha]$ は scattered であるから, 続く定理(2.4)によって, $[0, \omega_1]$ は RN-compact である. しかし, $[0, \omega_1]$ は open F_σ -sets より成る point-countable separating family を持ち得ないことによって, Eberlein compact ではない.

問題(1) RN-compact の Hausdorff image は RN-compact であるか?

問題(2) RN-compact の Hausdorff quotient image は RN-compact であるか?

問題(3) RN-compact が Eberlein compact になるための条件は何であるか?

scattered Corson compact は Eberlein compact であることは, Alster (Fund. Math. 104) によって, 知られて

1) 3. compact Hausdorff space X は, $(C(X)^*, w^*)$ に, 自然に embedding できるから, 次の定理によって, scattered compact Hausdorff space は RN -compact である.

定理(2.4) compact Hausdorff space X について, 次は同値である.

- (i) X が "scattered".
- (ii) $C(X)^*$ が RNP を持つ.

定理(2.5) compact Hausdorff space X について, 次は同値である.

- (i) X : RN -compact
- (ii) X が, (ある Banach space の) dual space の norm-fragmented, w^* -compact subset に同相である.

問題(4) fragmented by a metric であるが, RN -compact ではないような compact Hausdorff space を見つけよ.

以下, RN -compact の性質について述べる.

定理(2.6) RN -compact に関して, 次の命題が成立する.

- (i) RN -compact spaces の closed subspaces は RN -compact spaces.
- (ii) RN -compact spaces の countable product spaces は RN -compact.
- (iii) RN -compact space は metrizable dense G_δ -set

を含む。

(iv) RN -compact spaces は sequentially compact τ'' がある。

(v) hereditarily Lindelöf RN -compact spaces は metrizable τ'' がある。

double arrow space は, compact, sequentially compact, Hausdorff, separable and hereditarily Lindelöf τ'' があるが, RN -compact τ'' ない例になっている。

最後に

問題(5) (ある Banach space の) dual space の w^* -compact subset K が RN -compact ならば, K の w^* -closed convex hull $\overline{\text{co}}(K)$ について, $(\overline{\text{co}}(K), w^*)$ は RN -compact になるか?

文献

- [1] R. Bourgin: Geometric Aspects of convex sets with the Radon-Nikodym property, Lecture notes in Math. 993. Springer-Ver. Berlin (1983)
- [2] I. Namioka: Eberlein and Radon-Nikodym compact spaces, Lecture note at Univ. Coll. London. (1985)
- [3] S. Negrepontis: Banach spaces and Topology,

Handbook of set-theoretic top. (1984); edited by K. Kunen
and J.E. Vaughan

- [4] C. Stegall: The duality between Asplund spaces and spaces
with the RNP, Israel Jour. of Math. 29 (1978)