

球面の商多様体について

奈良女 理 上部 恒知

§.1. 有限群の球面への free operation.

どんな有限群がなん次元の球面にどのような free operation を持つか, という問題については多くの研究者により次に列挙するような結果が得られている。

- (1) $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$ はどんな球面にも free に作用できない。
(P. A. Smith)
- (2) 有限群 G が S^n (cohomology の形が S^n と同じでよい) に free に作用すれば $H^*(G)$ は $(n+1)$ の周期をもつ。
(フランス学派)
- (3) 周期的 cohomology をもつ有限群はある球面の homotopy type をもつ C.W. 複体に free に作用できる。
(R. Swan)
- (4) G が球面に free に作用すれば, G の order n の元は G の center に属する。(J. Milnor)
- (5) $\mathbb{Z}(p, g, r) = \{x, y \mid x^p = y^g = e, yxy^{-1} = x^r\}$

は, P が奇数, q が奇素数のとき $\Sigma \in \Theta_{2n-1}(\partial\pi)$
 (parallelizable 多様体の境界で S^{2n-1} の homotopy
 type をもつ多様体, 特に $S^{2n-1} \in \Theta_{2n-1}(\partial\pi)$) に
 free, 微分可能に作用できる。 (T. Petrie)

以上の結果は主に “どんな有限群が球面に free に作用し
 うるか” と云う問題に限ったものである。(2) は (1) を意
 味し, (1) より有限群論よりかかる群の p -Sylow 群は 次の
 可能性しかもたない。

$$\begin{cases} P = 2 \text{ のとき,} & \text{巡回群 か 四元数群.} \\ P = \text{奇素数のとき,} & \text{巡回群.} \end{cases}$$

p -sylow 群がすべて巡回群である有限群 (以後 Z -group
 と呼ぶ) に制限しても問題は open である。(4), (5) は type
 $Z(p, q; r) \begin{cases} P: \text{奇素数} \\ q: \text{素数} \end{cases}$ の場合の解になり $Z(p, 2; r)$ 形だけ
 が free に作用できぬことを示している。

§.2. 商多様体の K -環

Z -group が free に作用してできる商多様体の K -環
 について述べよう。 $f: S^{2n-1} \times G \rightarrow S^{2n-1}$ を free
 operation, $\kappa: G \rightarrow U(m)$ を表現とすると, $S^{2n-1}/G, f$
 上の m -次元 vector bundle $d_f(\kappa)$ を次のように定義す
 る。 κ の表現加群を M_κ とするとき, G は $S^{2n-1} \times M_\kappa$ 上に

$(x, v) \cdot g = (f(x, g), g^{-1}v)$ で作用する, $x \in S^{2n-1}$, $v \in M_K$, $g \in G$. この商空間を $S^{2n-1} \times_G M_K$ とするとき, 自然な写像 $\pi: S^{2n-1} \times_G M_K \rightarrow S^{2n-1}/G, f$ は vector bundle である. これは K の同値類に対して well-defined であるから, これを $d_f(K)$ で記す. d_f は自然に準同型: $d_f: R(G) \rightarrow K(S^{2n-1}/G, f)$ に拡張される. 次の定理は M.F. Atiyah の定理の系として得られる.

定理. $f: S^{2n-1} \times G \rightarrow S^{2n-1}$ は free かつ微分可能な作用とする. このとき, d_f は上の準同型である. さらに $H^*(G)$ が表現の Chern class ($\kappa: E_G \rightarrow B_G$ B_G は G の分類空間とするとき, $(\kappa_n(K)) = C(K) \in H^*(B_G) = H^*(G)$ で定義される) で生成されれば, $\text{kernel } d_f = R_n^G(G)$ である. ここで ideal $R_n^G(G)$ は $R(G)$ の G -operation による filtration である.

$\mathbb{Z}$ -group G に対して, $H^*(G)$ は Chern class により生成されることが証明される. 上の定理により,

定理 G を $\mathbb{Z}$ -group, $f: S^{2n-1} \times G \rightarrow S^{2n-1}$ を free かつ微分可能な作用とするとき: $K(S^{2n-1}/G, f) \cong R(G)/R_n^G(G)$.

この定理から $K(S^{2n-1}/G, f)$ の group extension を決

◀

めることは一般には困難である。今 G の p -Sylow subgroup を G_p とするとき、自然な写像 $\tau: S^{2n-1}/G_p \cdot f_{G_p} \rightarrow S^{2n-1}/G \cdot f$ により誘導される準同型 $\tau^!: K(S^{2n-1}/G \cdot f) \rightarrow K(S^{2n-1}/G_p \cdot f_{G_p})$ は中への p -component の同型である。 $G_p = Z_{p^2}$ のときの $K(S^{2n-1}/Z_{p^2})$ の group extension は F. Suzuki により決定された。

§.3. 商多様体の tangent bundle.

実表現 $\kappa: G \rightarrow SO(m)$ に対して §.2 と同様にして定義される m -次元実 vector bundle を $\beta(\kappa)$ と記す。 $\kappa \in \tilde{K}O(S^{2n-1}/G \cdot f)$ に対して $\kappa + \theta_{2n-1} \cong \beta(\kappa)$ を満たす最小の κ を κ の代数的次元と呼び、 $\text{alg. dim } \kappa$ と記す。

定理. $f: S^{2n-1} \times G \rightarrow S^{2n-1}$ を free 微分可能な作用とするとき、 $\text{alg. dim}(\tau(S^{2n-1}/G \cdot f) - \theta_{2n-1}) < \infty$.

上の定理より、いかなる代数的次元をもつ作用 f が得られるか興味ある問題である。次の定理は、 $S^{2n-1}/G \cdot f$ で f が変わるとき、その stable tangent bundle が J -invariant であることを示す。

定理. M_1, M_2 をコンパクト、弧状連結、次元 n の多様体とする。もし $\tilde{J}(\tau(M_1)) \in \tilde{J}(M_1) \oplus p\text{-component}$ で写像 $f_{i,j}: M_i \rightarrow M_j$ で $(f_{i,j})_*: H_n(M_i; Z_p) \cong H_n(M_j; Z_p)$

$(f_{1,2})^*(t_{2,1})^* = \text{id}$ $\tilde{f}(M_2)$ の p -component なるものが存在すれば, $(f_{1,2})^*(\tilde{f}(\tau(M_2))) = \tilde{f}(\tau(M_1))$, $\therefore$ bundle ξ に対し $\tilde{f}(\xi)$ は σ の J -stable 類を表わす。

この定理を素数位数の巡回群 Z_p に適用して,

定理. $n < p \lfloor (n-1)/(p-1) \rfloor$ のとき

$$\text{alg. dim} (\tau(S^{2n-1}/Z_p, +) - \theta_{2n-1}) = 2n + 2Sp^{\lfloor (n-1)/(p-1) \rfloor}$$

$$0 \leq S \leq p(p-1)/2.$$

この定理の系として,

定理. p を奇素数とする. このとき $n > p$ に対し $S^{2n-1}/Z_p, +$ は S -parallelizable でない. $n \leq p$ のときは, S -parallelizable である必要十分条件は $P(\tau(S^{2n-1}/Z_p, +)) = 1$ なることである. $p=2$ のときは $n=1, 3, 7$ のとき限り S -parallelizable である。

以上の結果の証明等については下記に与えられる。

- (1) T. Kambe et Fukue Suzuki ; K -anneau de la variété quotient de sphère par Z -group. (à paraître)
- (2) T. Kambe ; La caractérisation du fibré tangent des variétés S^{2n-1}/Z_p . (à paraître)
- (3) T. Kambe ; Fibrés vectoriels sur S^{2n-1}/Z_p (à paraître)