

Degenerations of minimal surfaces with non-negative Kodaira dimensions

阪大・理

向田秀一郎

§0. 非特異射影曲線の退化問題を考えるとき,
(準)安定曲線が, 重要な役割をはたすことはよく
知られている(cf. [1]). そこで, 曲面の場合に
(準)安定曲線に対応するものは何か, ということが
問題となる. これに関するひとつの結果をこの討論に
ついて述べてみたい.

§1. 結果をのべるために n と定義をし, $\pi: X \rightarrow D$ が "semistable reduction of
minimal surfaces" であるとは, 次の 4 つの
条件を満たすことという ([1]):

- ① X $2n$ -dim complex mfd,
 $D = \{t \in \mathbb{C} \mid |t| < 1\},$

② π は ある projective morphism の localization $\pi = \pi_1 \circ \pi_2$ 3,

③ $t \neq 0 \in T$ 7011 と 3, $\pi^{-1}(t)$ は nonsingular minimal surface Σ_t , $\kappa(\pi^{-1}(t)) \geq 0$,

④ $\pi^{-1}(0)$ は reduced 2D simple normal crossings.

結果は 次の通り.

Theorem 1.7. $\pi: X \rightarrow D$ は semistable reduction of minimal surface Σ 73.

このとき, proper (flat) morphism $\pi': X' \rightarrow D$ と birational map $\varphi: X' \rightarrow X$ 7011 存在して 2をみたす:

$$(0) \quad \pi' = \pi \circ \varphi$$

(1) X' は canonical ring (かき 7011 3-dim. complex variety,

$$(2) \quad \varphi \text{ は } \pi'^{-1}(0) \text{ の外で "同型",}$$

(3) X' の index (cf. [3]) ≤ 1 と 7011 7011, X' の dualizing sheaf $\omega_{X'}$ の r 回 tensor

積の double dual $\omega_X^{[r]}$ は invertible
となり, $\omega_X^{[r]}|_{\pi^{-1}(0)}$ は numerically effective.

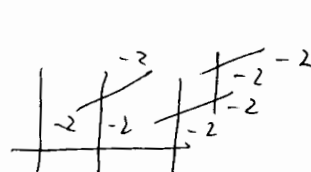
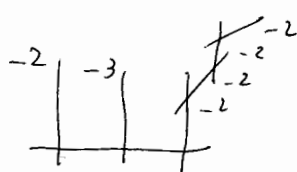
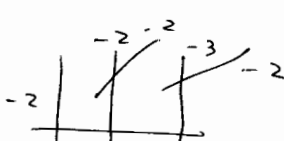
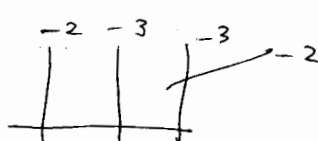
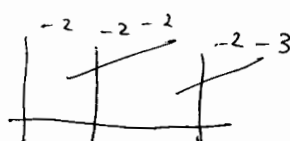
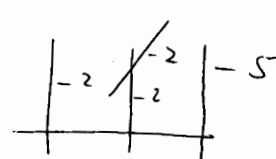
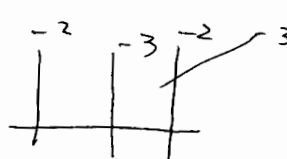
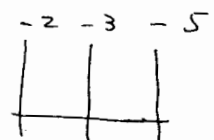
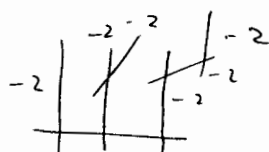
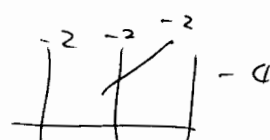
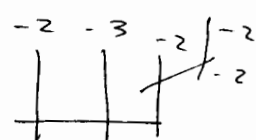
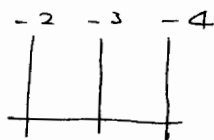
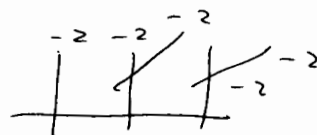
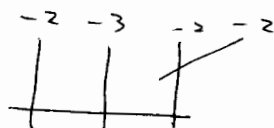
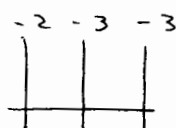
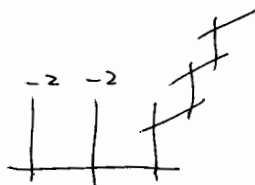
§3 でこの定理の証明の outline を説明するが,
その前に, 証明に必要な open surface theory
の結果を §2 において述べておく.

§2. $\bar{Y}$ は normal proj. surface, B は
 $\bar{Y}$ 上の reduced (Weil) divisor とする.
このとき, $(\bar{Y}, B)$ が "高々 Kawamata sing." である
とは, 次のみたすことをいふ:

① $P_1, \dots, P_s, P_{s+1}, \dots, P_r \in \bar{Y}$ の singular point
全体とし, さらに $P_1, \dots, P_s \in B$, $P_{s+1}, \dots, P_r \notin B$ とする.
このとき, $B - \{P_1, \dots, P_s\}$ は $\bar{Y} - \{P_1, \dots, P_r\}$ 上 simple
normal crossings;

② $P_1, \dots, P_s \in \text{Reg}(B)$ かつ
 $P_1, \dots, P_s$ は cyclic quotient sing. かつ
 $P_{s+1}, \dots, P_r$ の minimal resolution は
 $\mathbb{R}$ の "1" である,

4



5

$= = 2^n$, 直線は nonsingular rational curve であり, 数字は 2^n の curve の self-intersection number であり.

$(\bar{Y}, B)$ を高々 Kawamata sing. である pair とすると, $r(W\bar{Y} + B)$ が invertible sheaf となる正整数 r が存在する. この $r \in (\bar{Y}, B)$ の index という.

このとき次の定理が成立する.

Theorem 2.1. $(\bar{Y}, B)$ を高々 Kawamata sing. である pair とし, index r とする. もし $r(W\bar{Y} + B)$ が num. eff. であるならば, $(\bar{Y}, B)$ は次のいずれかであることを示す:

① ある同型でない birational morphism $f: \bar{Y} \rightarrow \bar{Z}$ が存在して, $(\bar{Z}, f_*(B))$ は Kawamata sing. (か) もたない.

② ある nonsing. proj. curve C への surj. morphism $\pi: \bar{Y} \rightarrow C$ が存在して, 2^{2^n} の fiber

6

は, irreducible $\mathbb{P}^1$ かつ, general fiber Σ
 $Y := \bar{Y} - B$ は 制限すると, $P' \neq T$ は A' と同型,

① $(r(\omega_{\bar{Y}} + B))^{-1}$ は ample かつ $\bar{Y}$ の
 Picard number は 1.

この定理の証明には, Mori theory [2] の
 open surface Γ の拡張を使います. それをこの
 ために少し準備をします.

$(\bar{Y}, B)$ と上の通りといて, $N(\bar{Y})$, $\overline{NE}(\bar{Y})$,
 $\overline{NE}_\varepsilon(\bar{Y}, B)$ を次のように定義します.

$$N(\bar{Y}) := \{ \text{1-cycle on } \bar{Y} \} \otimes \mathbb{R},$$

$\overline{NE}(\bar{Y}) :=$ effective 1-cycle Σ により, 最小の
 closed convex cone,

$$\overline{NE}_\varepsilon(\bar{Y}, B) := \{ Z \in \overline{NE}(\bar{Y}) \mid \langle Z, \frac{1}{r} (r(\omega_{\bar{Y}} + B)) \rangle \geq \varepsilon \langle Z, L \rangle \},$$

ここで ε は正の実数, L は $\bar{Y}$ 上の ample divisor

であるとき, 次の lemma 2.2 が成立. $\Rightarrow$ this
 Theorem 2.2. が導かれます.

Lemma 2.2. 任意の $\varepsilon (> 0)$ に対して, curves
 $C_1, \dots, C_\ell$ が存在し, 次のみたす:

$$\textcircled{1} \quad \overline{NE}(\bar{Y}) = \sum \mathbb{R}_+ [C_i] + \overline{NE}_\varepsilon(\bar{Y}, B)$$

$$\textcircled{2} \quad C_i \text{ is rational curve } \text{w.r.t. } \omega\bar{Y} + B,$$

$$0 > \left(\frac{1}{r} (r \omega\bar{Y} + B) \right), \quad (C_i) \geq -3.$$

= Lemma 2.2. 1st [2] to which $B=0$, $\bar{Y}=n-S$.
 の場合の証明と同様です.

Lemma 2.2. の仮定で, $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 成り立つ. $C_1, \dots, C_\ell$ は
 あり, ℓ は最小にしたいとき各 C_i は extremal
 rational curve w.r.t. $\omega\bar{Y} + B$ であり.

C_i は extremal curve であるとき, num. eff
 divisor H on $\bar{Y}$ で, $H^\perp \cap \overline{NE}(\bar{Y}) = \mathbb{R}_+ [C_i]$
 を満たすものが存在する. m は十分大きな整数と

(たとき, mH は対応する rational map Φ_{mH}
 があり, Theorem 2.1. により $\bar{Y}$ の構造を定める.

つまり, $\dim \Phi_{mH} = 2$ であり, $\textcircled{A}$ の case であり, Φ_{mH} は

Th 2.1 の記号で, f は - 一致し, $\dim \Phi_{mH}$

$= 1$ であり, $\textcircled{B}$ であり, $\Phi_{mH} = \Pi$, $\dim \Phi_{mH}$

$= 0$ であり, Φ_{mH} は $\bar{Y} \rightarrow \text{Spec } \mathbb{C}$ に一致する.

§3. Theorem 1.1 の証明.

まず, 以下の次の singularity を定義する.

Y は 3-dim normal complex var., $P \in Y$ の singular point τ . 次の条件を満たすとき, P は type C_r の sing. pt. である:

① Y は $\mathbb{P}^3$ 中 nonsing.,

② P のある resolution $f: \tilde{Y} \rightarrow Y$

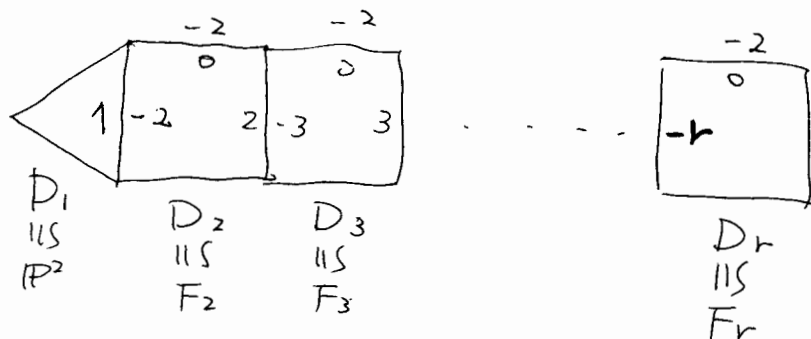
が存在し, $f^{-1}(P)$ は次の形:

$f^{-1}(P) = \sum_{i=1}^r D_i$ は既約分解であるとき,

$\dim D_i = 2$ τ , $D_1 \cong \mathbb{P}^2$, $D_i \cong \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(i))$

(右は Hirzebruch surface τ F_n である),

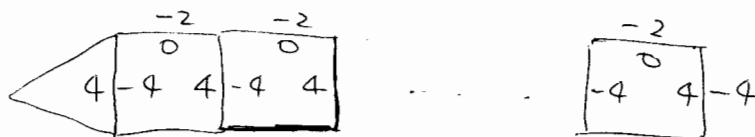
さらに, 各 D_i は下の図のように接している.



f

$= 2$, line の両側の数字は 対応する curve の normal bundle を表し, 各 D_i 中の数字は D_i における self-intersection number を表し, F_i は Hirzebruch surface $\mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(1))$ を表す.

同様に P が "type D_r の sing. pt." であるとする. 其 resolution $f: \tilde{Y} \rightarrow Y$ をとると, $f^{-1}(P) = \sum D_i$ が r -次の形のとおり:



$$D_1 = \mathbb{P}^2, D_2 \cong D_3 \cong \dots \cong D_r \cong F_4.$$

Proposition 3.1. type C_r , type D_r の sing. pt. は canonical sing. ([3]).

次の lemma 3.2, 及び Theorem 1.1 は容易に導かれる.

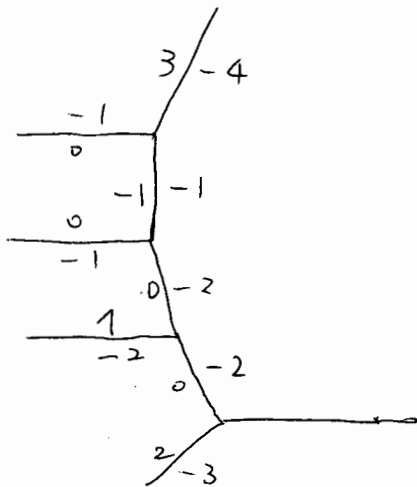
Lemma 3.2. $\pi: X \rightarrow D$ は semi stable

reduction of minimal surfaces とする, $\mathbb{P}^1$ 上 条件② のかわりに ②' $\pi^{-1}(0)$ が projective と仮定する. $X \in \pi^{-1}(0)$ の既約成分の一部で, X の各連結成分はそれぞれ type C_r , type D_r の sing. を定義しかつその中で, 最大のものとす. $\mu: X \rightarrow Y$ は X の contraction, $s \in Y$ の index とする. このとき, もし $\omega_Y^{[s]}$ が num. eff. でなければ, ある birational map $\varphi: X' \rightarrow X$ が存在して, $\pi \circ \varphi$ は semistable reduction of minimal surfaces (すなわち ②' を満たす) でありかつ $(\pi \circ \varphi)^{-1}(0)$ の既約成分の個数は, $\pi^{-1}(0)$ の既約成分の個数より小さくなる.

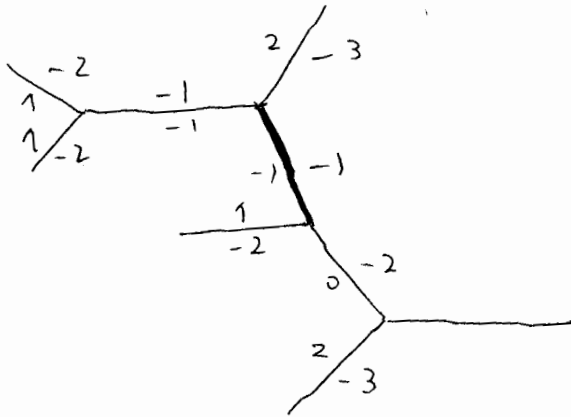
Proof. (Outline) まず, $\omega_Y^{[s]}$ not num. eff. と仮定する. $P = \pi \circ \mu^{-1}$ とおき, $P^{-1}(0) = \sum_{i=1}^r \bar{Y}_i$ と既約分解とする. このとき, $\bar{Y}_i$ は高々 type D_r , C_r の sing. であり, $(\bar{Y}_i, B_i := P^{-1}(0) - \bar{Y}_i / \bar{Y}_i)$ は高々 Kawamata sing. であり, $\bar{Y}_i$ は $\bar{Y}_i$ 上の extremal curve である. $\omega_Y^{[s]} / \bar{Y}_i = S(\omega_{\bar{Y}_i} + B_i)$ であり, $\bar{Y}_i$ は $\bar{Y}_i$ 上の extremal curve である. $\bar{Y}_i$ は $\bar{Y}_i$ 上の extremal curve である.

$\gamma \tau''$, X_4 is type $D_1 (= C_1)$ of sing. τ defined,
 $X_2 + X_3$ is type C_2 of sing. τ defined, C is X_1
 is called exceptional curve of the first kind
 τ'' is.

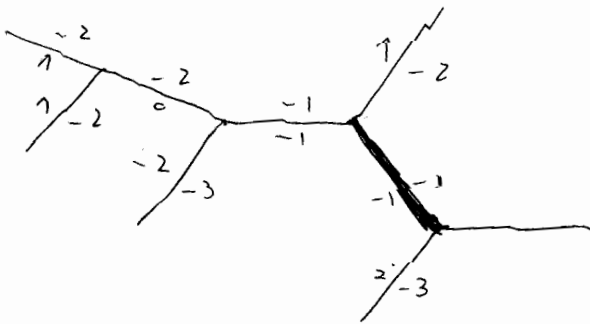
τ'' , C is blow-up τ :



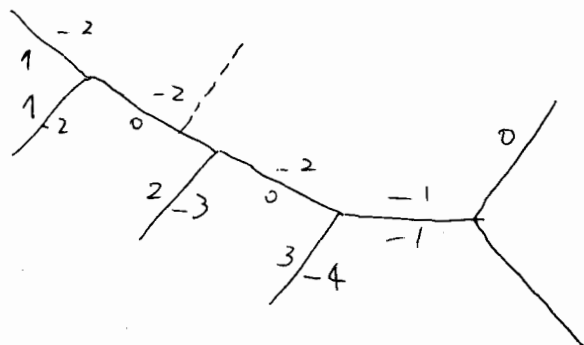
τ'' is normal bundle $\pi^* (-1, -1)$ curve τ''
 blow-up $(\tau, \tau'' \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \in \mathbb{P}^1)$ of τ is blow -
 down τ ([4]):



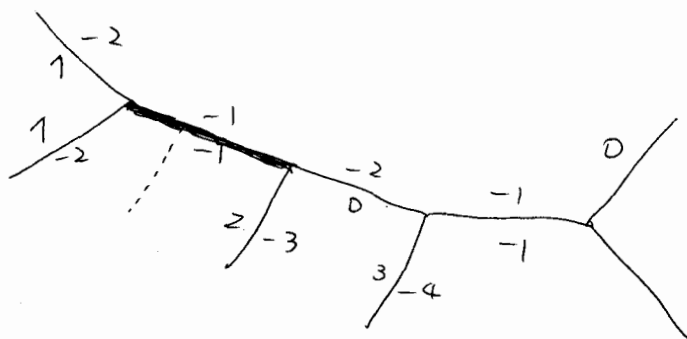
次に上図の太線の u, v で" 同様の操作を
し、次の図をえる:



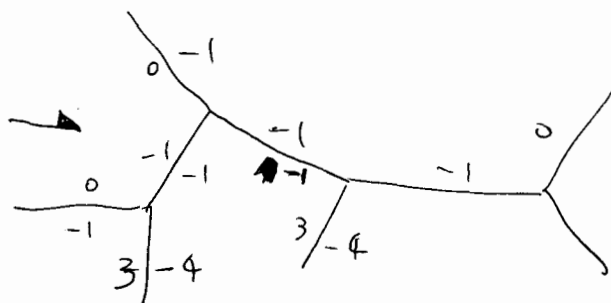
太線について同じ事をやる:



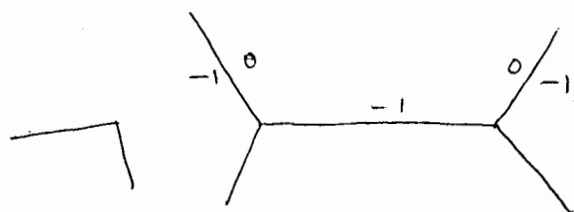
$\pi = \pi^4$, X_4 に注目すれば、 $X_4 \cong \mathbb{P}^2$ であり、4回
 blow up (点 π のみ) して得る。このことから、点線
 の位置に $(-1, -1)$ curve が存在することがわかる。
 $\pi = \pi^4$, blow-up と blow-down の操作を繰り返すと、
 次の図に なる。



太線を元とにして次図をみる。



上の図の ● 矢印の component は、nonsing. curve
に contract できる (4.4):



次に、はじめの $\bar{X}_4$ の proper transform を
contract できる。この contraction の結果
が、 $\bar{X}'$ に対応する。

他の場合にも上と同様のやり方で、 $\varphi^{-1}(\delta) = \delta$
が成り立つ。

References

- [1] Deligne, P. and D. Mumford. The irreducibility of the space of curves of given genus. Publ. I.H.E.S. 36 (1969), P. 75.
- [2] Mori, S. Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective, to appear.
- [3] Reid, M. Canonical Threefolds, in Journées de géométrie algébrique d'Angers, ed. A. Beauville, Sijthoff and Noordhoff, Alphen (1980) 273-310.
- [4] Nakano, S. On the inverse of monoidal transformations, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 6 (1970-71), 483-502.