

ベクトルバンドルの一般化切断の超準表現について

(On nonstandard representations of generalized sections of vector bundles)

静岡大学 工学部 明山 浩 (Hiroshi AKIYAMA)

Faculty of Engineering,
Shizuoka University

ここでは、シュワルツ超関数、ド・ラームのカレント、あるいは一般にベクトルバンドルの一般化切断 (generalized section) に対する、超準解析を用いた表現について述べる。

1. 序

ユークリッド空間におけるシュワルツ超関数については、T. Todorov ([T1], [T2]) によって、超準解析を用いた次の表現が得られている。

(1) “ノンスタンダード・デルタ関数” $\Delta(x)$ が存在して、任意の $\varphi \in C^0(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ に対し、(${}^*\varphi$ を φ の超準拡大とすれば)

$$\int_{{}^*\mathbb{R}^n} \Delta(x) {}^*\varphi(x) {}^*dx = \varphi(0).$$

(2) シュワルツ超関数 $T \in (\mathcal{D}(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}))'$ の超準的核関数 f_T が存在して、

$$T(\varphi) = \int_{{}^*\mathbb{R}^n} f_T(x) {}^*\varphi(x) {}^*dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}) (= C_0^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})).$$

注意 上の (1), (2) の等式で、等号は「限りなく近い」の意味ではなく、実際に等号である。また、上の (1) のような $\Delta(x)$ は $\Delta(x) \geq 0$ ($x \in {}^*\mathbb{R}^n$) をみたすようにとることはできない。

以下では、(σ -コンパクト) 多様体上で筆者がこれまでに得た結果を述べる (cf. [A1], [A3])。ただし、用いた方法は、Todorov の方法 (一般の多様体の場合には適用できない) とは多少異なる。

2. 超準解析からの準備

この節では超準解析からの若干の準備として、河合 徹氏 ([Ka]) による超準集合論 UNST を簡単に紹介する ([A2] の §2 も参考にされたい)。

UNST の言語は集合論 ZFC (ツェルメロ・フレンケルの集合論に選択公理を加えた理論) の言語に 3 つの定項 $\mathcal{U}, \mathcal{I}, *$ をつけ加えたものである。 $a \in \mathcal{U}$ のとき a は **通常の** (usual), $a \in \mathcal{I}$ のとき a は **内的** (internal), $a \notin \mathcal{I}$ のとき a は **外的** (external) であるという。内的集合, 外的集合をそれぞれ, 内集合, 外集合ともいう。

UNST の公理 (ただし, 飽和性は少し弱めたもの) は次のとおりである。

(1) 集合論 ZFC の公理から正則性公理を除いたものを UNST の世界に置く。正則性公理については制限された形のものを置くのであるが, 以後, 表立ってはとくに必要ないので省略する。 $\mathcal{U}$ の世界では ZFC の公理を置く。

(2) $\mathcal{U}$ は推移的: $a \in A \in \mathcal{U} \Rightarrow a \in \mathcal{U}$.

(3) $\mathcal{I}$ は推移的: $a \in A \in \mathcal{I} \Rightarrow a \in \mathcal{I}$.

(4) $A \subset B \in \mathcal{U} \Rightarrow A \in \mathcal{U}$.

(5) $*$: $\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{I}$ (写像). $a \in \mathcal{U}$ に対し $*(a) \in \mathcal{I}$ を $*a$ と書き, a の **超準拡大** という。

(6) (移行原理) $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ が ZFC の論理式で $x_1, \dots, x_n$ は φ の自由変項のすべてであるとき, $\forall x_1, \dots, x_n \in \mathcal{U}$ に対し

$${}^{\mathcal{U}}\varphi(x_1, \dots, x_n) \iff {}^{\mathcal{I}}\varphi(*x_1, \dots, *x_n).$$

ここに ${}^{\mathcal{U}}\varphi$ は φ を $\mathcal{U}$ へ相対化したもの, すなわち, φ の束縛変項を $\mathcal{U}$ に制限して得られる論理式を表す [φ 中の $(\forall x), (\exists x)$ を $(\forall x \in \mathcal{U}), (\exists x \in \mathcal{U})$ に置き換える]. 同様に, ${}^{\mathcal{I}}\varphi$ は φ を $\mathcal{I}$ へ相対化したものである。

(7) (飽和性; 以下では, 次の形のものが十分) $\Lambda \in \mathcal{U}$ を添字集合とする内的な集合 $A_\alpha (\in \mathcal{I})$ の族 $(A_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ は, それが有限交差的ならば交差的である。

UNST の公理 (で飽和性は弱めたもの) は以上である。UNST は ZFC の保存拡大になっている。

いくつかの注意

(1) 上の (4) とは異なり, 「 $A \subset B \in \mathcal{I} \Rightarrow A \in \mathcal{I}$ 」は成立しないが, このことが超準解析にとっては重要である。

(2) 移行原理より, $a, b \in \mathcal{U}$ かつ $a \neq b$ なら $*a \neq *b$ となる。一般に $A \in \mathcal{U}$ に対し, ${}^{\circ}A := \{ *a : a \in A \}$ とおく。もし $A \in \mathcal{U}$ の各元については集合としての構造を考えないなら, A と ${}^{\circ}A := \{ *a : a \in A \}$ とは同一視することにする。とくに複素数全体の集合 $\mathbb{C}$ と ${}^{\circ}\mathbb{C} := \{ *c : c \in \mathbb{C} \}$ とは同一視される。実数全体の集合についても同様である。個々の複素数や $\mathbb{C}, \mathcal{P}(\mathbb{C})$ は $\mathcal{U}$ の元である。飽和性より ${}^{\circ}\mathbb{C} \subsetneq *\mathbb{C}$ であることが示される。 $\mathbb{C}$ (${}^{\circ}\mathbb{C}$ と同一視) は外的な集合である。

(3) 写像はそのグラフと同一視することにより、内的であるとか、外的であるとかの定義ができる. $f: A \rightarrow B$ ($f \in \mathcal{U}$) に対し, $f: {}^*A \rightarrow {}^*B$ であり, とくに $a \in A$ に対し, ${}^*f({}^*a) = {}^*(f(a))$ となる.

(4) $A \in \mathcal{U}$ に対し, ${}^*(\mathcal{P}(A)) = \mathcal{P}({}^*A) \cap \mathcal{I}$ が成り立つ. すなわち, ${}^*(\mathcal{P}(A))$ は *A の部分集合のうち内的なもの全体の集合である.

(5) 一般に, 関係や演算については $*$ を省略することが多い.

(6) $\mathcal{U}$ での種々の“概念”が移行原理によって $\mathcal{I}$ での“ $*$ -概念”に写される. たとえば, ${}^*\mathbb{C}$ 上の $*$ -有限次元 (超有限次元ともいう) の内的なベクトル空間といったものが考えられる.

(7) $m \in \mathbb{N}$ ($\mathbb{N}$ は正整数全体の集合) に対し集合 $A_m = \{n \in {}^*\mathbb{N} : n > m\}$ は内的であり, 有限交差的だから飽和性より $\exists \eta \in \bigcap_{m \in \mathbb{N}} A_m$, すなわち, $m \in \mathbb{N}$ なら $m < \eta$ となる. このような η は“無限大超自然数”であるという. ${}^*\mathbb{N}_\infty = {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ は無限大超自然数の全体であり, 外的な集合である.

(8) $0 < r \in \mathbb{R}$ として, $\mathbb{R}$ の开区間 $(0, r) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < r\}$ に対しては ${}^*(0, r) = \{\xi \in {}^*\mathbb{R} : 0 < \xi < r\}$ であり, 飽和性より

$$\varepsilon \in \bigcap_{0 < r \in \mathbb{R}} {}^*(0, r)$$

をみたす ε が存在する. このような ε は“正の無限小超実数”とよばれる.

さて, C^∞ 多様体の概念からは, その“ $*$ -概念”として, ${}^*(C^\infty)$ ($*$ -) 多様体の概念が得られる. たとえば $\mathbb{R}^{n+1}$ 内の, 通常の

$S^n(r)$: 原点中心, 半径 r ($0 < r \in \mathbb{R}$) の n 次元球面 ($n \in \mathbb{N}$)

に対し, ${}^*(S^n(r))$ は ${}^*\mathbb{R}^{n+1}$ 内の半径 r の $*$ -球面 (内的な n 次元球面) であり, $S^n(r) \subsetneq {}^*(S^n(r))$ とみなされる. ${}^*(S^n(r))$ はノンスタンダードな点, つまり ${}^*(S^n(r)) \setminus S^n(r)$ の点も含むが, そのような点はそれぞれ, $S^n(r)$ のある点に“無限に近い”.

また, 上のかわりに半径 r をノンスタンダードにとる (つまり, $0 < r \in {}^*\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}$ ととる) と, ${}^*\mathbb{R}^{n+1}$ 内の, ノンスタンダードな点ばかりからなる球面を得る.

あるいは n を無限大超自然数にとる (つまり $n \in {}^*\mathbb{N}_\infty$ ととる) ことにより, 超有限次元の球面 (これは $*$ -コンパクト) の概念を得る.

3. リーマン多様体上の超関数の超準積分表現

(M, g) を C^∞ リーマン多様体とするとき, 次のことが成り立つ ([A1]).

定理 1 次のような $\delta \in {}^*(C_0^\infty(M \times M; \mathbb{R}))$ が存在する: $x, y, z \in {}^*M$ に対し,

$$(1) \quad \delta(x, x) \geq 0, \quad \delta(x, y) = \delta(y, x), \quad (\delta(x, y))^2 \leq \delta(x, x)\delta(y, y).$$

- (2) $*f(x) = \int_{*M} \delta(x, y) *f(y) *dv_g(y), \quad f \in C_0^\infty(M; \mathbb{C}).$
- (3) $\int_{*M} \delta(x, y) \delta(y, z) *dv_g(y) = \delta(x, z).$
- (4) $T \in (C_0^\infty(M; \mathbb{C}))'$ (M 上のシュワルツ超関数) ならば, $\gamma_T(y) := *T(\delta(\cdot, y))$ として,

$$T(f) = \int_{*M} *f(y) \gamma_T(y) *dv_g(y), \quad f \in C_0^\infty(M; \mathbb{C}).$$

- (5) F は M -値確率変数で, $f \in C_0^\infty(M; \mathbb{R})$ ならば, $f(F)$ の期待値 $\mathbf{E}[f(F)]$ について,

$$\mathbf{E}[f(F)] = \int_{*M} *f(y) *E[\delta(*F, y)] *dv_g(y).$$

証明 (概略) $\delta \in *(C_0^\infty(M \times M; \mathbb{R}))$ を以下のように構成する.
まず,

$$\sigma(C_0^\infty(M; \mathbb{R})) := \{ *f; f \in C_0^\infty(M; \mathbb{R}) \}$$

とすると, $*\mathbb{R}$ 上の超有限次元の内的なベクトル空間 V で

$$\sigma(C_0^\infty(M; \mathbb{R})) \subset V \subset *(C_0^\infty(M; \mathbb{R}))$$

をみたすものが存在する. そこで $\nu = *\dim V (\in *\mathbb{N}_\infty)$ とし, $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_\nu$ (この “...” は内的な [つまり, $\mathcal{I}$ における] “...” である) を V の $*dv_g$ に関する “正規直交基底” とする:

$$\int_{*M} \varphi_i \varphi_j *dv_g = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \dots, \nu).$$

このとき, $\delta \in *(C_0^\infty(M \times M; \mathbb{R}))$ を次のように定義する.

$$\delta(x, y) := \sum_{i=1}^{\nu} \varphi_i(x) \varphi_i(y) \quad (x, y \in *M).$$

(1), (3) の成立は容易にわかる.

(2) は次のようにして示される. $f \in C_0^\infty(M; \mathbb{C})$ に対し

$$\begin{aligned} *f(x) &= \sum_{i=1}^{\nu} c_i \varphi_i(x) \quad \left(c_i = \int_{*M} *f(y) \varphi_i(y) *dv_g(y) \right) \\ &= \sum_i \left(\int_{*M} *f(y) \varphi_i(y) *dv_g(y) \right) \varphi_i(x) \\ &= \int_{*M} \left(\sum_i \varphi_i(x) \varphi_i(y) \right) *f(y) *dv_g(y) \\ &= \int_{*M} \delta(x, y) *f(y) *dv_g(y). \end{aligned}$$

ただし、上の式の3行目で、超有限和と $*$ -積分（内的な積分）との順序交換を行っているが、これは移行原理により可能である。

また、(4) は次のように示される。 $\gamma_T(y) := *T(\delta(\cdot, y))$ とおけば、

$$\begin{aligned}
 T(f) &= *(T(f)) = *T(*f) \\
 &= *T\left(\sum_{i=1}^{\nu} c_i \varphi_i\right) = \sum_i c_i *T(\varphi_i) \\
 &= \sum_i \left(\int_{*M} *f(y) \varphi_i(y) *dv_g(y)\right) *T(\varphi_i) \\
 &= \int_M *f(y) \left(\sum_i *T(\varphi_i) \varphi_i(y)\right) *dv_g(y) \\
 &= \int_{*M} *f(y) \gamma_T(y) *dv_g(y).
 \end{aligned}$$

(5) も同様である。 □

4. カレントの超準積分表現

簡単のため、 (M, g) は向き付けられた C^∞ リーマン多様体とする。 $\mathcal{A}_0(M)$ を M 上のコンパクトな台をもつ C^∞ 微分形式の空間とする。このとき、 M 上のド・ラームのカレントについても、次のような超準積分表現が得られる。

定理 2 $*M \times *M$ 上の $*C^\infty$ 二重形式 Θ が存在して、次のことが成り立つ：

(1) 任意の $\alpha \in \mathcal{A}_0(M)$ と任意の $y \in *M$ に対し、

$$*\alpha(y) = \int_{x \in *M} *\alpha(x) \wedge \Theta(x, y).$$

(2) $T : \mathcal{A}_0(M) \rightarrow \mathbb{R}$ が（ド・ラームの）カレントならば、任意の $\alpha \in \mathcal{A}_0(M)$ に対し、

$$T(\alpha) = \int_{x \in *M} *\alpha(x) \wedge *T(\Theta(x, \cdot)).$$

5. ベクトルバンドルの一般化切断に対する超準積分表現

$E \rightarrow M$ を C^∞ （実または複素）ベクトルバンドルとし、 $E^\dagger$ を E の双対バンドル、 $|\wedge_M|$ を密度バンドルとする。 $\Gamma_0^\infty(E)$ を E のコンパクトな台をもつ C^∞ 切断の空間、 $\Gamma^{-\infty}(E)$ を E の一般化切断 (generalized section) の空間とする。このとき、

ベクトルバンドル E の一般化切断に対する超準積分表現について、次の定理が成り立つ ([A1]).

定理 3 E の一般化切断 $T \in \Gamma^{-\infty}(E)$ に対し, $\beta_T \in {}^*(\Gamma_0^\infty(E))$ が存在して

$$T(u) = \int_{\bullet M} \beta_T \cdot {}^*u, \quad u \in \Gamma_0^\infty(E^\dagger \otimes |\wedge_M|), \quad [\cdot \text{ は pairing を表す}].$$

関連する応用については [A3] を参照されたい.

参考文献

- [A1] H. Akiyama: *Nonstandard representations of generalized sections of vector bundles*, Osaka. J. Math. **32** (1995), 817–822.
- [A2] H. Akiyama (明山 浩): ベクトルバンドル上の微分作用素に対する超準的可解性について, 京都大学数理解析研究所講究録 **1070** 「力学系と微分幾何学」, pp. 11–17, 1998.
- [A3] H. Akiyama: *Nonstandard solvability for linear operators between sections of vector bundles*, Proc. Amer. Math. Soc. **128** (2000), 2129–2135.
- [Ka] T. Kawai: *Nonstandard analysis by axiomatic method*, in “Southeast Asian Conference on Logic” (ed. by C.-T. Chong and M.J. Wicks), Proc. Logic Conf., Singapore, 1981, Elsevier(Noth-Holland), Amsterdam, 1983, pp. 55–76.
- [T1] T. Todorov: *A nonstandard delta function*, Proc. Amer. Math. Soc. **110** (1990), 1143–1144.
- [T2] T. Todorov, *Pointwise kernels of Schwartz distributions*, Proc. Amer. Math. Soc. **114** (1992), 817–819.