

新量子力学の發展 (4)

コペンハーゲンに於て ペ・ヨルダン

(Die Naturwissenschaften 誌 1927 第 31 號所載)

5. ド・ブロリーの波動とアインシュタインの瓦斯理論

よく御承知の通り Einstein は、光は干涉實驗に於ては明らかに波動運動として現はれて來るのであるが、それにも拘らず他の關係に於ては $h\nu$ なるエネルギーを有し且つ進行運動的力積 $\frac{h\nu}{c}$ を有しあちこち走り廻つてゐる光量子と言ふ考へに依つて最も適切にあらはす事が出来ると言ふ事の有な根據を幾つも例證してゐる。——此の光量子の假説は特にコムトン效果に於て實に壯麗さでも言つてよい位に確められた。de Broglie は此の法則を言はば裏返しにすると言ふやうな試みを企てた。即ち彼の問題は次のやうである： 光は『一面に於て』最も明白なる形に於て波動の性質を有して居るが、又『他面に於ては』謎のやうな方法に於て微粒子的光量子から成り立つて居るものとして現はれて來るのであるが、此れと同じやうに物質の微粒子、電子も亦二重の性質を有し、而してその諸性質の多くが空間を傳播して行く波動運動のやうに振舞ふものではなからうか？ と言ふのである。此の考へに關して de Broglie がなした色々な注意のうちで最も重要なものは次の事である、即ち： 波動と微粒子を同格に置くと言ふ事は一般に不變的(インヴァリヤント)な方法で之れをなす事が出来る。de Broglie は、其のエネルギー(即ち靜止エネルギー mc^2 と運動のエネルギーとの和)が E であり、その進行運動的力積が G に等しいやうな粒子に一つの平

面波動を配した。その波動の振動数 ν 及び位相速度 V は

$$h\nu=E, \quad V=\frac{E}{G}$$

なる式に依つて與へられる。

扨て、今迄考へて居た坐標系とは異なつた他の座標系を考へやう。此の新座標系が舊座標系に對して等速度運動をして居るとする。そうすると粒子のエネルギー及力積は前とは異なつて来る。これを E' 及び G' とする。そして波動は此の新座標系から見ると矢張り前とは違つた振動数と位相速度を有する事になるだらう。例へばこれを ν' , V' としやう。(これはドブラーの効果の必然の結果である。)然しながら de Broglie の方程式は、此の新座標系に於ても微粒子と波動との關係を全く同じ形で

$$h\nu'=E', \quad V'=\frac{E'}{G'}$$

と書く事が出来るやうな工合に撰ぶ事が出来る。——斯くの如き撰擇が一般に可能であると言ふ事は著しい物理學的の事實である。

de Broglie は更に彼の論文に於て古典的力学と光学との間に或る文字通りの相似性が存在する事を詳細に論じたが、これは既に以前に Hamilton に依つて発見された所のものである。一つの様でない(然も等方性である所の)媒質内に於ける光の運動を追せきする——茲で吾人は角や開きを有つたスクリーンなきもやはり媒質の不一様性として考へるのであるが——若し吾人が非常に波長の短かな極限の場合を考へるならば、吾人は特に簡単なそして容易に了解する事の出来る結果に到着する。此の波長の短かい極限の場合には總ての廻折現象から由來して来るこんがらがつた影響がなくなつて仕舞ふ。即ち光の傳播は幾何光学の簡単な概念に依つて叙述される。そうすると光学的問題の各々には、或る力学の問題が見出される事になり而もこの事は(問題を逆にして)力学の問題に於ける軌道曲線は丁度光学的問題に於ける光線と全く同じものであると言ふやうな風になるのである。此の際、光学的概念と、力学の Hamilton-Jacobi の定理に於て軌道曲線の計算や追せき的手段として利用する所の數學的量の間に密接なアナロジーが認められる。即ち力学で言ふ作業函数は光学の波動系の位相に相等するのである。空間内に於ける或る表面、その表面内では力

學的作業函数が一定であると言ふやうなそう言ふ表面は光學で言ふ Huygens の原理に従つて作る事が出来るやうな波動表面と全く同じものである。——そして有名な Hamilton-Jacobi の微分方程式は丁度此の Huygens の原理の表現と見做す事が出来る。最後に Fermat のあの有名な最短光路の原理は、之れを力学に翻譯するを力学に於ける Hamilton のヴァリアチオンの原理の幾分近似的な形に外ならない。(即ち所謂 Maupertuis の原理に外ならない。)

光學を力学の間の此のアナロジーは、光の波長を大きくすると失はれる。de Broglie, Einstein 並びにそれに關連した Schrödinger の議論は此のアナロジーを有限の波長の時にも成立させようとする所まで進んだ。此目的の爲めには古典的力学を變更し一般化する事が前提とされるもので、これは丁度幾何光學から波動光學への推移に相當して居る。此の見界に随ふと、古典的力学は、de Broglie の輻射の波長が古典的に計算された軌道曲線の曲率半径と比較して非常に小さい時にのみ實際的に正しい結果に導くと言ふ事が期得される；然し若し此の條件が満されない場合には質點の軌道を古典的な意味で與へると言ふ可能性は全く失れて仕舞ひ、問題をもつ一般的な波動力學的に取扱ふと言ふ事のみが之れをなす事が出来るに至る。實際譬へば水素の基礎状態に在る電子に就いて言へば、それに相應する de Broglie の波長は水素電子の軌道の曲率半径と比較して決して小さくはないと言ふ事は容易に證明出来る。これに依つて見れば、原子の世界に於ては古典的力学は全く放棄せねばならぬと言ふ事が了解される。

此の外 Schrödinger に従へば——Schrödinger の研究に就ては後で詳しく論ずるが茲に前以て注意しておこう——光學を力学のこのアナロジーは尙幾分ちがつた方法に於て之れを論ずる事が出来る。振動數が全部非常に狭い領域 dv の中にのみあるやうな波動の助けを借りれば、非常に小さな空間の領域に集中した、エネルギーを有するやうな所謂『エネルギーバクト』(Energiepakt)を作る事が可能である。此の際勿論、此の波動バクトの波長は、相重なる事によつて此のバクトを構成して居る所の波長と比較すれば矢張り大きい。然しながら、此の波長が、現象過程を幾何光學の方

法で叙述する事が可能な程充分に短い場合には、エネルギーパクトが更に長い間結合保存されるに至る。〔然し特別な場合は別として、かくの如き波動パクトも遂には勿論解け去つて仕舞ふ〕そうするに、他の波動パクトは一つの軌道を描くが、其の軌道は、古典的力學で丁度それに對應した問題に於ける質點の軌道と一致する。Schrödinger は此の事柄を、量子力學的事實を古典的時間空間觀念の框にあてはめやうとする彼の研究に利用した。即ち、彼は斯くの如きエネルギーパクトを正に光量子や物質粒子のモデルとして考察せんと欲したのである。然しながら此の研究の基礎に横はづて居る觀念に依れば、人は此の意見には同意しかねるであらう。

de Broglie の思想と密接な關係にあるものは Einstein の瓦斯理論である。電磁空洞が波動的振動のかわりに微粒子的な『量子瓦斯』を含んで居ると言ふ觀念は、若し此の量子瓦斯に古典的な瓦斯統計法を應用するならばプランクの輻射法則ではなくて却つて Wien の輻射法則に導く。然しながら、Bose が示したやうに、古典的な瓦斯理論を、先づ非常に奇妙な了解に苦しむやり方で變化する事に依つてプランクの法則を得たのである。先づ光量子の位相空間を h なる大きさの小室に分配する。或る瞬間に關して位相空間が（無限に澤山の小室ではなく）たつた二つの小室にわかれて居るとし二つの原子が其の中に存在するを考へやう。そうするに、若し其の二つの原子が互に全く無關係になけ込まれたとするならば、簡単な確率計算法に依つて、此の二つの原子が二つの小室に分配されるされ方には全く同じ確率を有する四つのわかれ方がある。二つの小室の各々に一つ宛原子があると言ふ事に對する確率は（これは四つの可能な場合のうちで二つだけおこるので） $\frac{1}{2}$ に等しい。然しながら Bose に隨へば光量子は此の確率法則に従はず、全くちがつたやり方をする。即ち、光量子の場合には、各小室に一つ宛光量子があると言ふ状態は、例へば二つの小室のうちの第一の小室に二つとも光量子があると言ふ状態と同じ確率を有し決して後者の二倍の確率を有しない。次頁に掲げた圖は此の關係をあらはしてゐる。（左は古典的瓦斯論に依るもので、中央は Bose-Einstein の統計法に従つたものである。此の他、右端は Fermi 及び Dirac が所謂 Pauli の原理に基いて

作つた統計法を示してゐる。此の事は後で論ずる事にする。)一般的に言ひあらはせば次の如くなる: 等しい確率を有する状態は Bose の場合には古典的瓦斯論の場合のやうに原子(即ち量子)がどの小室に鎮座しますかを與へて叙述されるのではなくて、幾つの原子が(即ち量子が)各々の小室に在るかを與へる事に依つて叙述される。

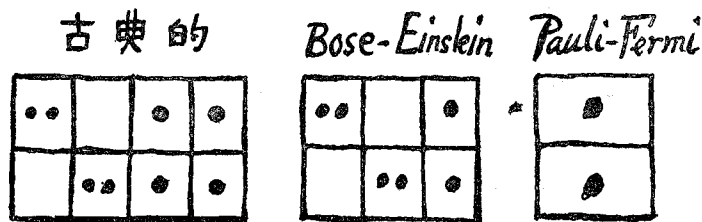
Einstein は、微粒子の輻射と波動的輻射とは本質的に等しいものであると言ふ假説から出發して、此の Bose の統計法を物質的な理想瓦斯にも翻案した。プランクの輻射法則がウイーンの輻射法則と異なる點は、後者に

於て $e^{-\frac{h\nu}{kT}}$ とある所に前者では $e^{\frac{1}{\frac{h\nu}{kT} - 1}}$ なる式が這入つて居る言ふ事である。Einstein の瓦斯統計論では Maxwell の速度分布に出て來る式 $e^{-\frac{L}{kT}}$ (茲に $L = \frac{1}{2}mv^2$) に相當して

$$\frac{1}{e^{\frac{\alpha(T)}{kT} + \frac{L}{kT}} - 1}$$

なる式が入つて來る。

斯くする事から生ずる結果と古典的理論の結果との違ひは、非常に低い温度の領域から遠く離れてゐる限り、實際的にはさ細なものである。然しながら此のちがひは、理想瓦斯に對しても亦 Nernst の熱法則が成立すると言ふ結果に至らせるものである。理論的には更にそれは(勿論低い温度の場合に著しいのであるが) 瓦斯論の衝突の法則並びに原子相互間の交互



作用及び原子と光子の交互作用に必然的な變化を齎らす。(吸収や放射や散亂や又は原子の結合や分解や電解など。) 古典的理論によることすべて此れ等の交互作用は、すべてのそれにあづかる物質的加擔者の濃度に比例するものゝ置かれた〔質量作用の法則 (Massenwirkungsgesetz)〕、然しながら此の簡單なる比例性はたゞ Maxwell の速度分布は調和するが、Einstein の速度分布は調和しない。微粒子の輻射と波動的輻射とが本質に於て等しいものであること言ふ假説は、此困難をも亦非常に簡単な而も自然的な方法で解決する事が出来ること言ふ事と云つて置かう。

最初目には非常にパラドクスの様に思はれる Bose の統計法の假定は事柄の波動論的方面を眼中に置くや否や直ちに了解される。電磁氣的空洞は波動論的に云へば、無連鎖な共鳴即ち固有振動のシステムに外ならぬ。量子論に従へば、此れ等固有振動の各々は量子られて(gequantelt) 居なければならぬ。共鳴器の全システムの同じ確率を有する状態のうちの一つは各固有振動の量子数を與へる事によつて叙述される。ところでこれが丁度 Bose の統計法になつてゐる。ただ微粒子論に於ける『固有振動』を『小室』(Zelle) と云ふので、此の際『固有振動の量子数』は此の小室内の『量子の全数』として示されるのである。全くこれと相應した論法で Einstein の瓦斯論は de Broglie の波動を以て了解される。然しながら、量子力学は、Heisenberg 及び Dirac が示したやうに、純粹な微粒子論的な立場からも Einstein の瓦斯論を了解する事を可能ならしめる。此の事に關しては後節に於て論じよう。

尚ほ de Broglie の假説は他の關係からもその支點を得る事が出来る。Duane は、最も簡單な干涉即ち全く誤差がない規則正しく刻ざまれた無限に廣い結晶格子による干涉を、光量子論に因んで、全く波動論的の形像を借る事なくして説明する事が出来る事を明らかにした。Compton に従へば此の Duane の思想は例へば次の様にでも言ふ事が出来ようか：一つの無限に廣い結晶格子が一樣に進行運動をしてゐるならば、(最も簡單な場合として例へば結晶の軸の方向に運動してゐることとする) 此の運動は言はば一つの週期的運動である、即ち格子が丁度原子の距離だけ問題の方向に動

く度び毎に、格子が完全に規則正しく刻まれてゐるを假定してゐるので、舊状態とは全く區別する事の出来ない状態に舞戻り運動の一『週期』を完成するわけである。これに依つて見れば此の運動は量子られる事が出来る。扱て此の格子が一つの微粒子的な一物に『衝突』するをすることを、此の場合には結晶格子の量子飛躍が起る他に仕方がないではないか——アナロジーとして Franck-Hertz の電子衝突を考へよ——。

結晶の運動の量子られる事——〔譯者言ふ、Quantelung と言ふ言葉ほど譯語に困つた言葉はない。勿論此の論文の翻譯は到る所困難な譯語にあまり多く出合ふので實は此の論文を翻譯して見やうなご企てた事を私は後悔してゐる次第である。Quantelung と言ふ言葉を私は初め『量子化』と譯してみやうと思つたけれども量子化と言ふ何か變化する様な氣もするので『量子列』としやうかと思つた。けれどもこれは何だかシリーズみたいにも聞える。で前號では、連續的な價の領域のうちから或るディスプレイトなものだけが存在意義を有すると言ふやうな意味もあるので『量子撰』として置いた。がごうもあまりピッタリ來ぬので、本號では思い切つて言語學的?の翻譯で『リョウシラレルコト』とした〕——はそうすること次に導く、即ち衝突する粒子は全くきまつた力積量のみを失ひ全く決まつた方向にのみ反射する事が出来る。而も此の粒子がエネルギー $h\nu$ を有し力積 $\frac{h\nu}{c}$ を有する光量子であれば、丁度、von Laue に従つて $\lambda = \frac{c}{\nu}$ なる波が反射される方向に反射される。Epstein 及び Ehrenfest は、此の議論を有限な任意に不規則な格子の場合にも一般化する事が出来ると言ふ事を證明した。然しながら、若しその根拠が正しいならば、此れ等の議論は格子と物質の微粒子との衝突にもあてはまらなければならぬ。そして此れ等の粒子がその可能な反射の方向に關しては、相對應する de Broglie の波動の λ と言ふ波長を有してゐる波と同じやうに振舞ふと言ふ事は容易に之を納得する事が出来る。Germer 及び Davisson の研究に依れば、結晶にあつて反射する電子線のかくの如き干渉は實驗的に實際之れを證明されるやうに思はれる。Davisson 及び Kunsman の以前の實驗成績は Elsas ser が de Broglie の假説に依つて説明してゐる。(荒木俊馬譯)