

Pisot 数による β -展開 (期) の周期小生について

伊藤 俊之 (金沢大)

Shunji ITO (Kanazawa Univ.)

Pisot 数 $\beta > 1$ による $x \in [0, 1)$ の β -展開

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(x)}{\beta^n}$$

の digit 列 $(a_1(x), a_2(x), \dots)$ が x がどのような数か

に依るとき 純周期的となるが, 以下多くの研究が積みあがってきて来たが, この必要十分な証明が簡素化されたのでここに報告する.

0. β -展開の定義

$\beta > 1$ に対して定まる β -変換 $T_\beta: [0, 1) \rightarrow [0, 1)$

と $T_\beta x = \beta x - [\beta x]$ と digit (整数) $a(x)$ と

$$a(x) = \begin{cases} i & \text{if } [\frac{i}{\beta}, \frac{i+1}{\beta}) \\ [\beta] & \text{if } [\frac{[\beta]}{\beta}, 1) \end{cases} \quad i=0, \dots, [\beta]-1$$

とする. このとき $x \in [0, 1)$ の digit 列 $(a_1(x), a_2(x), \dots)$ は

$$a_n(x) := a(T_\beta^{n-1} x)$$

により与えられる. このとき x は digit 列 $(a_n(x))_{n=1}^{\infty}$ により

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(x)}{\beta^n}$$

と β -展開されることは容易に分かる.

1. Pisot 数と Schmidt の結果

$\beta > 1$ の Pisot 数であるとは β は代数的整数で

その共役数の絶対値 ≈ 1 より小さいときをいう。

このとき 2 次の結果が知られている。

定理 (Schmidt, Bull. London Math. Soc. 12 (1980))

$\beta > 1$, β は Pisot 数のとき, 以下が成り立つ:

$$\{x \in [0, 1) \mid (a_1(x), a_2(x), \dots) \text{ is periodic}\} \\ = \mathbb{Q}(\beta) \cap [0, 1)$$

このことはこの定理から自然に生じる, 「無問題性の必要条件」
によって述べることも Schmidt の定理の別言正法に触れる。

2. Digit 列からつくられる記号文字系

$$\varphi(x) = (a_1(x), a_2(x), \dots) \in \prod_{n=1}^{\infty} \{0, 1, \dots, [\beta]\} \in V$$

$$(a_1^*, a_2^*, \dots) := \lim_{x \rightarrow 1} \varphi(x)$$

と定義する. $\left(1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^*}{\beta^n} \text{ であり, } \beta \text{ は Pisot 数なら } (a_1^*, a_2^*, \dots) \text{ は 1 列問題の解である}\right)$

$$\Omega_\beta := \left\{ (\dots a_{-k} a_{-k-1} \dots a_{-1} a_0 a_1 a_2 \dots) \mid (a_j a_{j+1} \dots) \leq (a_1^* a_2^* \dots), \forall j \in \mathbb{Z} \right\}$$

とすると, Ω_β は $\prod_{n=-\infty}^{\infty} \{0, 1, \dots, [\beta]\}$ の shift 不変な closed set となる

(Ω_β は T_β の定義記号文字系の natural extension である)

$$\Omega_\beta \ni (\dots a_{-1} a_0 a_1 a_2 \dots) = \bar{u} \bar{v}$$

$$u = (a_1, a_2, a_3, \dots), v = (a_0, a_{-1}, a_{-2}, \dots)$$

と定義し $(v, u) \in (\dots a_{-1} a_0 a_1 a_2 \dots)$ と見做す。

3. Realization of Ω_β

以後 $\beta > 1$ は Pisot 数とある。その共役数 $\bar{\beta}$

$$\beta = \beta_1, \underbrace{\beta_2, \dots, \beta_r}_{\text{実共役数}}, \underbrace{\beta_{r+1}, \beta_{r+2}, \dots, \beta_{r+s}}_{\text{複素共役数}}, \dots, \beta_{r+2s-1}, \beta_{r+2s}$$

と置く。

定義 $P: \Omega_\beta \rightarrow \mathbb{R}^r \times \mathbb{C}^s$ と

$$\Omega \ni (v, u) = (\dots a_1, a_0, a_1, a_2, \dots) \text{ に対し}$$

$$P(v, u) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \beta_1^{-k}, -\sum_{k=0}^{\infty} a_{-k} \beta_2^{-k}, \dots, \sum_{k=0}^{\infty} a_{-k} \beta_r^{-k}, -\sum_{k=0}^{\infty} a_{-k} \beta_{r+1}^{-k}, \dots, -\sum_{k=0}^{\infty} a_{-k} \beta_{r+2s-1}^{-k} \right)$$

$$= (x_1, y_2, y_3, \dots, y_r, y_{r+1}, \dots, y_{r+s}) \in \mathbb{R}^r \times \mathbb{C}^s$$

と定義する。

$P(\Omega_\beta)$ は この形式の、有界閉集合 $\subset \mathbb{C}^s$ 。

また $\beta = \beta_1$ とする。 $\beta_1 > 1$

定義 $\bar{T}_\beta: K \rightarrow K$ と

$$\bar{T}_\beta(x, y_2, \dots, y_r, y_{r+1}, \dots, y_{r+s}) := (\beta x - a_1, \beta y_2 - a_1, \dots, \beta y_r - a_1, \beta y_{r+1} - a_1, \dots, \beta y_{r+s} - a_1)$$

と定義する。 $\beta_1 > 1$

Proposition 3.1

$$\begin{array}{ccc} \Omega_\beta & \xrightarrow{\text{shift}} & \Omega_\beta \\ P \downarrow & & \downarrow P \\ K & \xrightarrow{\bar{T}_\beta} & K \end{array} \quad \text{any } \beta > 1$$

$\bar{T}_\beta$ が β -座標への制約は T_β に一致すること、及び $\bar{T}_\beta$ は本質的に bijective であることは $\bar{T}_\beta$ は T_β の natural extension と呼ばれ、 $\beta > 1$ 主定理の証明に準備となる。

定理 $\beta > 1$ は Pisot 数 ならば単数となる。このとき
 $x \in \mathbb{Q}(\beta) \cap [0, 1)$ の β -展開の digit $(a_1 a_2(x) \dots)$
 が 糸状周期的 ならば 必要十分条件は x の 共役数 の 組
 $(x, x_2, \dots, x_r, \dots, x_{r+s}) \in \mathbb{R}^r \times \mathbb{C}^s$ かつ
 $(x, x_2, \dots, x_r, \dots, x_{r+s}) \in K$
 となること。

4 言正日月

定理の言正日月のスケッチと説明を 5.2.3 に与える。

(糸状周期 $\Rightarrow (x, x_2, \dots, x_{r+s}) \in K$ の言正日月)

$x \in \mathbb{Q}(\beta) \cap [0, 1)$ の digit $(a_1 a_2 \dots a_L a_1 a_2 \dots a_L \dots)$ とする。

$(v, u) = (\dots a_1 a_2 a_L a_1 a_2 \dots a_L \dots) \in \Omega_\beta$

$u = (a_1 a_2 \dots) \quad v = (a_L a_{L-1} \dots a_1 a_L \dots)$

とする。 x は

$$x = \frac{a_1}{\beta} + \dots + \frac{a_L}{\beta^L} + \frac{a_1}{\beta^{L+1}} + \dots$$

$$= \frac{a_1 \beta^{L-1} + a_2 \beta^{L-2} + \dots + a_L}{\beta^L - 1}$$

一方 $f(v, u)$ の j 番目の値は f の定義から

$$-(a_L + a_{L-1} \beta_j + a_{L-2} \beta_j^2 + \dots + a_1 \beta_j^{L-1}) - \beta_j^L (a_L + \dots) - \dots$$

$$= -(a_L + a_{L-1} \beta_j + \dots + a_1 \beta_j^{L-1}) (1 + \beta_j^L + \beta_j^{2L} + \dots)$$

$$= \frac{-(a_L + a_{L-1} \beta_j + \dots + a_1 \beta_j^{L-1})}{1 - \beta_j^L}$$

$= x_j$ (x の j 番目の 共役数)

よって $f(v, u) = (x, x_2, \dots, x_{r+s})$

又 $f(v, u) \in K$ より

x の digit 列が 糸状周期 ならば $(x, x_2, \dots, x_{r+s}) \in K$

が示せる。

($x \in \mathbb{Q}(\beta) \cap [0, 1)$, $(x, x') \in K \Rightarrow x$ a digit β^{-1} (or periodic proof))
 x a digit β^{-1} and $(x, x_2, \dots, x_{n+s}) \in K$ simple: (x, x') is digit β^{-1} or β^{-1} .

$x \in \mathbb{Q}(\beta) \cap [0, 1) = \{x \mid \exists z \in \mathbb{Z} : \exists b \in \mathbb{N} : bx \in \mathbb{Z}[\beta], z \in \mathbb{Z}\}$

$$R_b := \{(y, y') : y \in b^{-1}\mathbb{Z}[\beta] \} \cap K$$

is defined. $\Rightarrow$ as K is bounded, R_b is a finite set.
 is $\{x \mid \exists z \in \mathbb{Z} : (x, z) \in R_b\}$

is $\{x \mid \exists z \in \mathbb{Z} : (x, z) \in R_b\}$ is $\overline{T}_\beta : R_b \rightarrow R_b$ is well defined
is bijective and $\overline{T}_\beta$ is $\mathbb{Z}$ -linear.

(i) $(y, y') \in R_b$ is $\{y, y'\}$

$$y = \frac{m_0 + m_1\beta + \dots + m_d\beta^{d-1}}{b}, m_i \in \mathbb{Z}, \text{ is } \{y, y'\} \text{ is } \{y, y'\}$$

$$\beta y = \frac{\beta m_0 + m_1\beta^2 + \dots + m_d\beta^d}{b} \text{ is}$$

$$\beta y - a_1 \in b^{-1}\mathbb{Z}(\beta) \quad (a_1 \text{ is } y \text{ a } \beta\text{-digit, not 1 digit})$$

$$\text{is } \overline{T}_\beta(y, y') = (T_\beta y, (T_\beta y)') \text{ is } \{y, y'\}$$

$$\text{is } (y, y') \in R_b \text{ is } \{y, y'\} \text{ is } \overline{T}_\beta(y, y') \in R_b$$

(ii) $\overline{T}_\beta : R_b \rightarrow R_b$ is surjective is $\{y, y'\}$

$(y, y') \in R_b$ is $\{y, y'\}$. $\Rightarrow$ as $\exists (v, u) \in \mathbb{Z}_\beta :$

$$S(v, u) = (y, y'), \quad v = (v_0, v_1, v_2, \dots), u = (u_1, u_2, \dots)$$

is $\{y, y'\} \text{ is } \{y, y'\} \text{ is } \{y, y'\} \text{ is } \{y, y'\} \text{ is } \{y, y'\}$

$$z = \beta^{-1}(y + v_0) \in b^{-1}\mathbb{Z}[\beta] \quad (\text{is } \beta \text{ a unit in } \mathbb{Z}_\beta)$$

- is

$$S((v, u) \text{ a 1 digit } v) = (z, z') \in K$$

$$\text{is } \overline{T}_\beta(z, z') = (y, y')$$

is $\overline{T}_\beta$ is R_b is surjective.

以上 $\overline{T}_\beta$ は R_b 上 $\mathbb{Z}$ -bijective. 以上 $(x, x') \in R_b$ は $\overline{T}_\beta$ による $\mathbb{Z}$ -periodic, 以下 $\exists n_0: \overline{T}_\beta^{n_0}(x, x') = (x, x')$ 以上 x は $\overline{T}_\beta$ による $\mathbb{Z}$ -periodic. $\square$

5. Remark

Remark 1 ここでの主定理から Schmidt の定理と得ることは
 ほとんど真実にはなる. $x \in \mathbb{Q}(\beta) \cap [0, 1)$ の反定のため

$$(x, x') \in [0, 1) \times \mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{C}^s$$

$$\mathbb{Z} \ni \overline{T}_\beta(x, x') = (\beta x - a_1, \beta x - a_2, \dots, \beta x - a_r)$$

$\in [0, 1) \times \mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{C}^s$ 上の変換と見做す. ϕ は bijective
 にはなるが $\exists N = N(x): \overline{T}_\beta^N(x, x') \in K$ を示せる.

ϕ は x の digit の周期性に外ならない.

Remark 2 上述の ϕ は 証明は簡単で ϕ による集合
 $K = \mathcal{P}(\Omega_\beta)$ の形になる. 実は ϕ は fractal 境界を
 含む領域であることが知られている. とするならば

$$(x, x') \in K$$

かどうかは判定出来ない(?). この意味で面白い定理といえる.

詳しくは (内容) は Rao-ITO "purely periodic β -expansion with Pisot Unit base (to appear in Proceedings AMS.)
 を参照せよ.