

# Polynomial fibre rings of algebras over noetherian rings

富山大学教育学部 浅沼照雄

序.  $R$  を noetherian ring とする.  $R$  の prime ideal  $\mathfrak{p}$  について  $k(\mathfrak{p})$  で  $\mathfrak{p}$  の residue field  $R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$  を表わす.  $R^{[n]}$  は polynomial ring in  $n$ -variables を表わす. この Note では  $A \otimes k(\mathfrak{p}) \cong k(\mathfrak{p})^{[n]}$  が任意の prime ideal  $\mathfrak{p} \subset R$  についてなりたつような  $R$ -algebra  $A$  について調べる. 便宜上このような  $A$  を pseudopolynomial algebra in  $n$  variables ということにする. 次の2つの定理が主要な結果である.

定理1.  $A$  が flat な pseudopolynomial algebra でその differential module  $\Omega_R(A)$  が finitely generated (f.g. for short)  $A$ -module とする. すると  $\Omega_R(A)$  は projective  $A$ -module である. 又ある整数  $m$  について injection  $A \hookrightarrow R^{[m]}$  が存在して

$$A^{[m]} \cong_R \operatorname{Sym}_A(\Omega_R(A)) \otimes_A R^{[m]}$$

をみたす。ここで  $\otimes_A R^{[m]}$  は上記の injection で define されたもので  $\text{Sym}_A$  は symmetric  $A$ -algebra を表わす。

定理 2.  $R$  は integral domain で  $R \not\subset \mathbb{Q}$  : rational number field とする。すると pseudopolynomial algebra over  $R$  in two variables  $A$  が存在して次をみたす。

$$(1) \quad A^{[1]} \cong R^{[3]}$$

$$(2) \quad A \not\cong R^{[2]}.$$

定理 1 を証明するための補題として

補題 1.  $R$  が discrete valuation ring,  $\pi R$  がその maximal ideal とする。integral  $R$ -domain  $A$  が

$$A[\pi^{-1}] \cong R[\pi^{-1}]^{[n]} \quad \text{かつ} \quad A/\pi A \cong (R/\pi R)^{[n]}$$

をみたせば  $A^{[n]} \cong R^{[2n]}$  である。

一般に 2つの  $R$ -algebra  $A$  及び  $B$  が stably isomorphic であるとはある  $m$  が存在して  $A^{[m]} \cong B^{[m]}$  かなりたつことである。ゆえに補題 1 は  $R$  が discrete valuation ring なるとき pseudopolynomial  $R$ -algebra が integral domain であるならば stably isomorphic to  $R^{[n]}$  であることを示し

ている。  $A$  が integral domain という仮定をはずせば次の例に示すように補題1はなりたたない。

例1.  $A = R[X, \pi^{-1}X, \pi^{-2}X, \dots][Y]/(\pi Y = 0)$

とおく。すると  $A[\pi^{-1}] \cong R[\pi^{-1}][X]$  かつ  $A/\pi A \cong (R/\pi R)[X]$  ここで  $X, Y$  は indeterminates を表わす。  $A$  は integral domain ではないから stably isomorphic to  $R[X]$  となることはない。

補題1は定理1を証明するための key step である。さて定理1の系として

系1.  $A$  は定理1のものとする。  $R$  が regular local ring ならば  $A$  は stably isomorphic to  $R^{[n]}$ .

Grothendieck により  $R$  が regular local ならば  $R^{[n]}$  上の f.g. projective module は stably free すなわちこの  $R^{[n]}$ -module と十分 rank の高い free  $R^{[n]}$ -module の直和は free になる。ゆえに定理1より  $\Omega_R(A) \otimes_A R^{[m]}$  は stably free  $R^{[m]}$ -module. ゆえ

$$\Omega_R(A) \otimes_A R^{[m]} \oplus R^{[m]} r \cong R^{[m]n+r}$$

が十分大なる整数  $r$  についてなりたつ。ここで  $R^{[m]} r$  は rank  $r$  の free  $R^{[m]}$ -module を表わす。ゆえに

$$\mathrm{Sym}_{R^{[m]}}(\Omega_R(A) \otimes_A R^{[m]} \oplus R^{[m]} r) \cong \mathrm{Sym}_{R^{[m]}}(R^{[m]n+r})$$

そこで左辺は

$$\mathrm{Sym}_{R^{[m]}}(\Omega_R(A) \otimes_A R^{[m]}) \otimes_{R^{[m]}} R^{[m+r]} \cong A^{[m+r]}$$

右辺は  $R^{[m]n+r} = R^{[m+n+r]}$  であるから結局  $A^{[m+r]} \cong R^{[m+n+r]} \cong R^{[n]m+r}$  を得る。これは  $A$  と  $R^{[n]}$  が stably isomorphic に外ならない。こゝで系 1 が定理 1 より出ることが示される。この証明でわかるように一般に定理 1 において  $\Omega_R(A)$  が stably free ならば  $A$  は stably isomorphic to  $R^{[n]}$  なることがわかる。定理 2 より  $R$  が  $\mathbb{Q}$  を含まなければ  $R$  が discrete valuation ring (d.v.r. in short) であっても系 1 の  $A$  は polynomial ring なるとはかぎらない。ゆえに  $R \not\supset \mathbb{Q}$  なるとき系 1 から “stably” という語をはぶくことができない。

問題 1.  $R \supset \mathbb{Q}$  ならば系 1 から “stably” という語を

はぶくことが出来るか？

問題1は  $A$  が *in one variable* のときは肯定的である。

より一般的に

系2.  $R$  が *seminormal local ring* (i.e.  $Pic(R) = Pic(R^{[n]})$ )  
で  $A$  が *flat pseudopolynomial  $R$ -algebra in one variable*  
であれば  $A \cong R^{[1]}$ .

系2においては  $R \supset \mathbb{Q}$  なる条件は本質的でない。次の定理は Sathaye 及び Kambayashi による。

定理3. (Sathaye-Kambayashi)  $R$  が *discrete valuation ring* で  $R \supset \mathbb{Q}$  とする。  $A$  は *affine  $R$ -domain* で *pseudopolynomial ring in two variables* とすると  $A \cong R^{[2]}$ .

補題1をもちいるとこの定理より次の系をうる。

系3. Sathaye-Kambayashi の定理から "affine" という条件をはぶくことができる。

この系3を用いると 問題2は  $\text{Knull dim } R=1$  かつ  $A$  が in two variable なるとき肯定的である。問題2に関して はこれ以外なにもわかっていない。

定理1と定理3を用いると次の定理が得られる。

定理4  $\text{Knull dim } R=1$  かつ  $R \supset \mathbb{Q}$  とする。  $A$  は flat pseudopolynomial ring in two variables and  $\Omega_R(A) \cong A^2$  とする。すると  $A \cong R^{[2]}$ 。

以下定理1及び定理2の証明の outline を述べる。くわしくは

T. Asanuma. Polynomial fibre rings of algebras over noetherian rings, preprint.

を参照してください。

### 1. Lifting lemma.

この section では  $R$  は local ring,  $\pi \in R$  は non-unit かつ non-zero divisor とする。任意の  $R$ -algebra  $A$  について  $A^\wedge$  は  $\pi$ -adic completion を表わす。すなわち

$$A^\wedge = \varprojlim_{\leftarrow m} A/\pi^m A = \text{inductive limit}$$

である。とくに  $A$  が noetherian ならば

$$A^\wedge = A[[X]] / (X - \pi) = A[[\pi]]$$

であることに注意しておく。ここで  $A[[X]]$  は power series ring in one variable  $X$  を表わしている。ゆえ  $A^\wedge$  の任意の元  $f$  は  $f = f^{(0)} + f^{(1)}\pi + \dots + f^{(i)}\pi^i + \dots$  ( $f^{(i)} \in A$ ) と表わすことができる。

1.1. Proposition.  $R^{[n]}^\wedge \subset R^{[n]}^\wedge[[\pi^{-1}]]$ .

Prop. 1.1 は canonical な map  $R^{[n]}^\wedge \rightarrow R^{[n]}^\wedge \otimes_R R[[\pi^{-1}]]$  が injection であることを示している。Prop. 1.1 の cor. として

1.2. Corollary.  $R^{[n]} = R^{[n]}^\wedge \cap R^{[n]}[[\pi^{-1}]]$ .

ところで  $R^{[n]}^\wedge = R^{[n]}[[\pi]]$  であるから 前にのべたように  $\forall f \in R^{[n]}^\wedge$  は  $f = f^{(0)} + f^{(1)}\pi + \dots$  ( $f^{(i)} \in R^{[n]}$ ) と表わせる。そこで  $R^{[n]} = R[x_1, \dots, x_n]$  とおけば

$$\begin{aligned} R^{[n]}^\wedge &= R[x_1, \dots, x_n][[\pi]] \subset R[[\pi]][[x_1, \dots, x_n]] \\ &= R[[\pi]][[x_1, \dots, x_n]] \end{aligned}$$

が自然になりたつから  $f$  は  $R[[\pi]] = R^\wedge$  上の power series と考えて  $f = f(x_1, \dots, x_n)$  と表わせる。  $R^{[n]}^\wedge[[\pi^{-1}]]$  の元も

同様に表わす。  $V^n(A)$  で環  $A$  上の  $n$  次元 vector space を表わす。

$$V_0^n = V^n(R^{[n]} \wedge [\pi^{-1}])$$

$$V_1^n = V^n(R^{[n]} \wedge)$$

$$V_2^n = V^n(R^{[n]} [\pi^{-1}])$$

とかく。  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ ,  $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n) \in V_0^n$  により  
 $\psi_i(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in R^{[n]} \wedge [\pi^{-1}]$  ( $i=1, \dots, n$ ) が welldefined なる  
 とす  $\varphi$  と  $\psi$  の積を

$$\varphi\psi = (\psi_1(\varphi_1, \dots, \varphi_n), \dots, \psi_n(\varphi_1, \dots, \varphi_n))$$

で def する。とくに  $\varphi\psi = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  なる  $\psi$  が存在する  
 とき  $\varphi$  を right invertible といい  $\varphi^{-1} = \psi$  とかく。

$\varphi^{-1}$  を right inverse といふ。  $\varphi \in V_1^n$  又は  $\psi \in V_2^n$  なる  
 ば  $\varphi\psi$  はつねに welldefined であることに注意する。

$\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in V_0^n$  に対し Jacobian matrix  $J(\varphi)$  は  
 $J(\varphi) = (\partial \varphi_i / \partial \alpha_j)_{ij}$  で define される。  $\varphi, \psi \in V_0^n$  に  
 $\varphi\psi \in V_0^n$  ならば  $J(\varphi\psi) = J(\varphi)^{\varphi} J(\psi)$  がなりたつ。ここで  
 ${}^{\varphi}J(\psi)$  は  $\varphi$  による  $J(\psi)$  への usual な action とする。と  
 くに  $\varphi$  が right invertible ならば  $J(\varphi\varphi^{-1}) = J(\varphi)^{\varphi} J(\varphi^{-1})$   
 がなりたつ。から  $J(\varphi)$  は general linear group

$GL_n(R^{[n]} \wedge [\pi^{-1}])$  の元で  $J(\varphi)^{-1} = {}^{\varphi}J(\varphi^{-1})$  である。

任意の  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  及び  $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n) \in V_0^n$

について  $\varphi_i - \psi_i \in \pi^m R^{[n]} \wedge$  なるとき

$$\varphi \equiv \psi \pmod{\pi^m} \quad \text{とかく。さて}$$

$$R^{[2n]} = R[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n] = R[x, y] \quad \text{とかく。}$$

$$x = (x_1, \dots, x_n), \quad y = (y_1, \dots, y_n) \in V^{2n}(R^{[2n]}) \quad \text{である。}$$

$\varphi \in V_0^n$  を right invertible とするとき

$$\varphi' \in V^{2n}(R^{[n]} \wedge [\pi^{-1}][y])$$

を

$$\varphi' = (\varphi, \psi) \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & J(\varphi)^{-1} \end{pmatrix}$$

で define する。ここで  $I$  は  $n \times n$  identity matrix

で右辺の積は matrix の product を相加している。

$$\begin{aligned} R^{[n]} \wedge [\pi^{-1}][y] &= R[x][[\pi]] [\pi^{-1}][y] \\ &= R[x_1, \dots, x_n][[\pi]] [\pi^{-1}][y_1, \dots, y_n] \\ &\subset R[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n][[\pi]] [\pi^{-1}] \\ &= R^{[2n]} \wedge [\pi^{-1}] \end{aligned}$$

であるから  $\varphi' \in V_0^{2n}$  かなりたつ。次は定理1の証明の

Key lemma である。Lifting lemma といわれる。

1.3. Proposition.  $\varphi \in V_0^n$  は right invertible で

$\varphi^{-1} \in V_2^n$  とする。すると  $\varphi_i \in V_i^{2n}$  ( $i=1, 2$ ) が存在

して  $\varphi_i^{-1} \in V_i^{2n}$  かつ  $\varphi = \varphi_1 \varphi_2$  をみたす。

## 2. Strongly projective algebras

この section では  $R$  は noetherian local domain

$\pi$  は  $R$  の maximal ideal の元で  $\pi \neq 0$  なるものとする。

$A$  は integral  $R$ -domain で

$$(1) \quad A[\pi^{-1}] \cong R^{[n]}[\pi^{-1}]$$

$$(2) \quad A/\pi A \cong (R/\pi R)^{[n]}$$

をみたすものと仮定する。  $R^{[n]} = R[x_1, \dots, x_n] = R[x]$  とあ

いて  $R^{[n]}/\pi R^{[n]} = R/\pi R^{[n]} = (R/\pi R)[x]$  とする。

$\sigma: A \rightarrow A/\pi A = (R/\pi R)[x]$  を canonical projection と  
すると  $f_i \in A$  が存在して  $\sigma(f_i) = x_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) がな  
りたつ。

2.1. Proposition.  $R[f_1, \dots, f_n] \cong R^{[n]}$

Prop. 2.1 より  $R[f_1, \dots, f_n] = R^{[n]} = R[x]$  とおいて

$A = R^{[n]} + \pi A$  か、  $R^{[n]} \cap \pi A = \pi R^{[n]}$  と仮定(てよい)。

2.2. Proposition  $A^\wedge = R^{[n]}^\wedge$ .

Prop. 2.2 は

$$\lim_{\infty \leftarrow m} A/\pi^m = \lim_{\infty \leftarrow m} R^{[n]}/\pi^m R^{[n]}$$

すなわち canonical な projection

$$R^{[n]}/\pi^m R^{[n]} \rightarrow A/\pi^m A$$

が任意の  $m$  について同型なることを示している。

2.3. Proposition.  $A$  は  $A^\wedge$  の subring.

(2) の条件より  $A[\pi^{-1}] = R[\varphi_1, \dots, \varphi_n][\pi^{-1}]$  と表わせて

$R[\varphi_1, \dots, \varphi_n] \cong R^{[n]}$ . とくに  $\varphi_i \in A$  と仮定してよい。Prop. 2.2

及び 2.3 から  $\varphi_i \in R^{[n]}^\wedge$  である。すなわち  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  と

おくと  $\varphi \in V_1^n \subset V_0^n$  かなりたつ。さらに  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  は

$A$  の元ゆえ  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in R[\varphi_1, \dots, \varphi_n][\pi^{-1}]$  かなりたつから

$\psi_i \in R^{[n]}[\pi^{-1}]$  が存在して  $\psi_i(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = \alpha_i$  とできる。す

なわち  $\varphi$  は right invertible で  $\varphi^{-1} = \psi = (\psi_1, \dots, \psi_n) \in V_2^n$

である。  $R[\varphi_1, \dots, \varphi_n] = R[\psi]$  とおく。

2.4. Proposition.  $\varphi \in V_1^n$  が存在して  $\varphi^{-1} \in V_2^n$  及び

$A = R^{[n]}^\wedge \cap R[\psi][\pi^{-1}]$  を満たす。

上で示したように  $A \subset R^{[n]}^\wedge \cap R[\psi][\pi^{-1}]$  なることはす

わかる。Prop 2.4 は  $A$  がちょうど  $R^{[n]} \wedge \cap R[\varphi][\pi^{-1}]$  なることを示している。ゆえ  $A$  を調べるかわりに Prop 2.4 をみたす  $R^{[n]} \wedge \cap R[\varphi][\pi^{-1}]$  を調べればよい。

$B$  を任意の  $S$ -algebra,  $f = (f_1, \dots, f_n) \in V^n(B)$  とする。

$f_1, \dots, f_n$  で generate された  $B$  の  $S$ -submodule を

$Sf = Sf_1 + \dots + Sf_n$  で表わす。とくに  $Bf$  は  $B$  の ideal である。 $R^{[2n]}$  を section 1 と同様に  $R^{[2n]} = R[x, y]$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n)$  とおく。

2.5. Proposition.  $M = R^{[n]} \wedge y \cap R[\varphi][\pi^{-1}] J(\varphi)^{-1}$

$$N = R^{[n]} \wedge y \cap R[\varphi][\pi^{-1}] J(\varphi)$$

とみると  $M, N$  は  $A$ -module で  $M \oplus N \cong A^{2n}$  をみたす。

Prop. 2.5 の証明の outline をのべる。 $R^{[3n]} = R[x, y, z]$ ,

$z = (z_1, \dots, z_n)$  とおく。すると

$$N \cong R^{[n]} \wedge z \cap R[\varphi][\pi^{-1}] J(\varphi)$$

で

$$M \oplus N \cong R^{[n]} \wedge (y, z) \cap R[\varphi][\pi^{-1}] (y, z) \begin{pmatrix} J(\varphi)^{-1} & 0 \\ 0 & J(\varphi) \end{pmatrix} \dots (*)$$

がなりたつ。ところで

$$\begin{pmatrix} J(\varphi)^{-1} & 0 \\ 0 & J(\varphi) \end{pmatrix} = \Phi_1 \Phi_2 \text{ for } \Phi_1 \in GL_{2n}(R^{[n]} \wedge),$$

$\Phi_2 \in GL_{2n}(R^{[n]}[\pi^{-1}])$  と表わせる。  $\varphi^{-1} \in V_2^n$  に注意すれば  $\varphi^{-1}\Phi_2 \in GL_{2n}(R[\varphi^{-1}][\pi^{-1}]) \subset GL_{2n}(R^{[n]}[\pi^{-1}])$  ゆえ

$$\Phi_2 = \varphi \cdot \varphi^{-1}\Phi_2 \in GL_{2n}(R[\varphi][\pi^{-1}])$$

かなりたつ。 ゆえに (\*) は

$$\begin{aligned} & R^{[n]} \wedge (\varphi, \pi) \cap R[\varphi][\pi^{-1}](\varphi, \pi) \Phi_1 \Phi_2 \\ &= \Phi^{[n]} \wedge (\varphi, \pi) \Phi_1 \cap R[\varphi][\pi^{-1}](\varphi, \pi) \Phi_1 \\ &= (R^{[n]} \wedge \cap R[\varphi][\pi^{-1}])(\varphi, \pi) \Phi_1 \\ &\cong A^{2n} \end{aligned}$$

となつて Prop. 2.5 が示される。

$$A' = R^{[n]} \wedge [\varphi] \cap R[\varphi][\pi^{-1}][\varphi J(\varphi)^{-1}] \quad \text{と置く。}$$

$$R[\varphi][\pi^{-1}][\varphi J(\varphi)^{-1}] = R[\varphi][\pi^{-1}][\varphi J(\varphi^{-1})] \subset R[\varphi, \pi^{-1}]$$

であるから  $A'$  は

$$R^{[n]} \wedge [\varphi] \cap R[\varphi][\pi^{-1}][\varphi] = A[\varphi] \cong A^{[n]}$$

の  $A$ -subalgebra である。 ここで  $A[\varphi]$  の  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  で generate された ideal  $A[\varphi]\varphi$  を  $\mathcal{U}$  と置く。

$\mathcal{U}^i \cap A' = M_i$  とおくと  $A'$  は  $\{M_i\}_{i=0,1,2,\dots}$  による graded  $A$ -algebra

$$A' = A \oplus M_1 \oplus M_2 \oplus \dots$$

である。 尤く  $M_1$  は Prop 2.5 の  $M$  に等しい。

さらに 次 かなり たつ。

2.6. Proposition  $A' = A[M] \cong \text{Sym}_A(M)$ .

次の Proposition は基本的である。

2.7. Proposition.  $\varphi$  を  $V_0^n$  の  $\pi$  で  $\varphi = \varphi_1 \varphi_2$ ,

$\varphi_i \in V_i^n$  かつ  $\varphi_i^{-1} \in V_i$  なる  $\varphi_i$  が存在するものとする。

すると

$$R^{[n]} \wedge [\pi^{-1}] \cap R[\varphi][\pi^{-1}] \cong R^{[n]}$$

かなり たつ。

証明は簡単である。

2.8. Proposition.  $A' \cong R^{[2n]}$

Prop. 2.8 の証明の outline をのべる。

$$A' = R[\alpha][\pi][\varphi] \cap R[\varphi][\pi^{-1}, \varphi_2(\varphi)^{-1}]$$

$$= R[\alpha, \varphi_2][\pi] \cap R[\varphi, \varphi_2(\varphi)^{-1}][\pi^{-1}]$$

であるから

$$A' = R^{[2n]} \wedge \cap R[\varphi'][\pi^{-1}] \quad \text{かなり たつ。}$$

ゆえ lifting lemma と Prop. 2.7 を用いて  $A' \cong R^{[2n]}$  が示される。ゆえに Prop. 2.6 と併わせて

2.8. Proposition.  $\text{Sym}_A(M) \cong_R R^{[2n]}$ .

一般に  $S$ -algebra  $B$  が strongly projective であるとは projective  $B$ -module  $L$  が存在して  $\text{Sym}_B(L) \cong_S S^{[m]}$  for some  $m$  が必要十分条件である。すなわち Prop. 2.8 より  $A$  は strongly projective である。よって Prop. 2.5 の  $N$  は  $\Omega_R(A)$  に同型である。ゆえ  $M \oplus \Omega_R(A) \cong A^{2n}$  が必要十分条件。ゆえ

$$\text{Sym}_A(M \oplus \Omega_R(A)) \cong A^{[2n]}$$

ゆえ  $A \hookrightarrow \text{Sym}_A(M) \cong R^{[2n]}$  の injection を define すれば

$$\text{Sym}_A(M \oplus \Omega_R(A)) \cong \text{Sym}_A(M) \otimes_A \text{Sym}_A(\Omega_R(A))$$

より Cor. 2.9 が得られる。

2.9. Corollary.  $A^{[2n]} \cong_R \text{Sym}_A(\Omega_R(A)) \otimes_A R^{[2n]}$ .

### 3. Pseudopolynomial algebras over noetherian rings

この section では  $A$  は flat な pseudopolynomial  $R$ -algebra

とする。

3.1. Proposition.  $\Omega_R(A)$  が f.g.  $A$ -module ならば  
projective.

$\mathfrak{a} \in R$  の nil-radical とする。

3.2. Proposition.  $A \otimes R/\mathfrak{a}$  が strongly projective ならば  
 $A$  も strongly projective.

3.3. Proposition.  $R$  の任意の minimal prime ideal  $\mathfrak{p}$   
について  $A \otimes R/\mathfrak{p}$  が strongly projective ならば  $A$  も  
strongly projective.

Prop. 3.2 及び 3.3 から  $R$  は初めから integral domain  
としてよい。ところで Prop. 3.1 より  $\Omega_R(A) \oplus M \cong A^m$   
なる  $A$ -module  $M$  がある数  $m$  について存在する。そこで

$B = \text{Sym}_A(M)$  とおくと  $B$  は flat pseudopolynomial  
 $R$ -algebra で  $\Omega_R(B) \cong B^m$  がなりたつ。ゆえ最初か  
ら  $\Omega_R(A) \cong A^n$  と仮定してよい。そこで定理1の証明は  
 $R$  の Krull dimension  $\dim R$  による induction である。

まず  $R$  は local domain と仮定できる。 $R$  の quotient field を  $K$  とおくと  $A \otimes K \cong K^{[n]}$ 。ゆえ  $\pi \in R$  が存在して  $A[\pi^{-1}] \cong R^{[m]}[\pi^{-1}]$  と素わせる。 $\pi$  が  $R$  の unit ならば  $A[\pi^{-1}] = A \cong R^{[n]}$  であり、ゆえ  $\pi$  は non-unit ととしてよい。 $R/\pi R$  の dimension は  $R$  より小さいから induction の仮定より  $A/\pi A$  は  $R/\pi R^{[n]}$  に stably isomorphic ゆえ ある  $m$  が存在して  $A^{[m]}/\pi A^{[m]} \cong R/\pi R^{[n+m]}$ 。ゆえ  $A^{[m]}$  を  $A$  とおきかえてはいめかす  $A[\pi^{-1}] \cong R^{[n]}[\pi^{-1}]$  かつ  $A/\pi A \cong R/\pi R^{[n]}$  と仮定してよい。そこで Cor. 2.9 が適要できて  $A$  が  $R^{[n]}$  に stably isomorphic を得る。

#### 4. Pseudopolynomial algebras in two variables.

定理2の具体的な例もあげる。

例.  $R$  を integral domain で  $R \not\cong \mathbb{Q}$  とする。ここで  $R$  の characteristic が  $p$  なるときは  $\pi$  を  $R$  の unit でない non-zero element  $R$  の characteristic が zero ならば ある素数  $p$  が存在して  $p \in R$  は  $R$  の non-zero non unit が存在するかうそれを  $\pi$  とおく。

そこで

$$A = R[X, Y, Z] / (\pi^\alpha Z + Y^{pe} + X + a_1^{pe} X^p + \dots + a_r^{pe} X^{rp})$$

とおく。ここで  $R[X, Y, Z] \cong R^{[3]}$ 。  $\alpha, e, r$  は正の整数で  $pe \nmid rp$  かつ  $rp \nmid pe$  なるものとする。  $a_i$  は  $R$  の元で  $i < r$  に  $a_r$  を含まない *height one prime divisor* of  $\pi$  が存在すると仮定する。すると  $A$  は定理2の条件をみたす。

上の例の  $A$  について  $A \not\cong R^{[2]}$  を示すことはややめんどうである。これを示すためには  $R$  が d.v.r なるときの  $R[X, Y] = R^{[2]}$  の  $R$ -automorphism group の構造を調べなければならぬ。以下  $R$  を d.v.r,  $K$  を quotient field,  $k$  を residue field とする。  $G_R$  で  $R[X, Y]$  の  $R$ -automorphism group を表わす。  $G_R$  は  $R[X, Y]$  の  $R$ -endomorphism のなす semigroup を  $E_R$  とかくと  $E_R$  の subgroup である。  $E_R$  の任意の元  $g$  は  $V^2(R[X, Y])$  の元とみることが出来る。そこで

$$G_R^0 = \{ (f, g) \mid f(0, 0) = g(0, 0) = 0 \}$$

$$D^+ = \{ (x, \pi^\alpha y) \mid \alpha \in \mathbb{Z}, \alpha \geq 0 \}$$

とおく。ここで  $\pi R$  は  $R$  の maximal ideal である。このとき

4.1. Proposition.  $G_K^0 \cap E_R = G_R^0 \vee D^+$  かなりたつ。

ここで  $G_R^0 \vee D^+$  は  $G_R^0$  及び  $D^+$  で generate された  $E_R$  の subsemigroup である。

4.2. Proposition.  $g = (f, g) \in G_R$  とする。すると  $\deg f(x, 0) \mid \deg g(x, 0)$  又は  $\deg g(x, 0) \mid \deg f(x, 0)$  かなりたつ。

この2つの Prop. を用いて  $A \# R^{[2]}$  を証明する。なお 浅沼照雄, 擬多項式環について, 可換環論シンポジウム報告集, 1984年, 11月 於広島 を参照してください。