

ボース凝縮体における Bogoliubov モードの 異常トンネル効果

慶応義塾大学 理工学部, JST(CREST) 土屋 俊二 ^{*1}

(2009 年 11 月 1 日受理)

1 はじめに

Bose-Einstein 凝縮 (BEC) とは理想ボース気体の示す相転移現象であり、同一の量子状態を複数の粒子が占有しやすいというボース統計性のために、ある転移温度以下でマクロな数のボース粒子が単一の量子状態に凝縮するという現象である。BEC はほとんどの統計力学の教科書に紹介されているように学部学生にとってもなじみ深いものであるが、現実には BEC を示す物質は身の回りにほとんど存在しない。1995 年までは唯一超流動 ^4He において BEC が起きていると考えられていたが、この系においてさえもヘリウム原子間の強い相互作用や高密度のために BEC が起きている事は自明ではない。このように長い間 BEC は理論的予言にとどまっていたが、1995 年に Cornell, Wieman の JILA のグループ [1] と Ketterle の MIT のグループ [2] はほぼ同時に、磁場によって捕捉したアルカリ原子気体をレーザー冷却や蒸発冷却といった手法を駆使し、 μK 程度の極低温まで冷却することにより、初めて BEC を実現することに成功した。この冷却原子気体における BEC の実現以来、現在に至るまで冷却原子気体を舞台とした BEC の実験的、理論的研究が怒濤のように続いている [3, 4]。

冷却原子気体の BEC では原子間の相互作用や密度は非常に小さく、そのため理想ボース気体に関する BEC の理論が適用できると考えられ、例えば BEC 転移温度は理想ボース気体の理論で計算された値と良い一致を見せる。しかし、原子間の相互作用の影響は、例えばそれが小さくとも BEC の性質を劇的に変化させることが知られており、特に相互作用の影響により BEC が超流動性を獲得する [5] ことが予言されている。このような弱く相互作用する希薄 Bose 気体 (weakly interacting dilute Bose gas, 以下 WIDBG と略す)

^{*1} E-mail: tsuchiya@rk.phys.keio.ac.jp

の理論はもともと超流動 ^4He の研究において 1947 年に Bogoliubov[6] が初めてその構築に成功し、その後 Beliaev[7], Pines[8], Pitaevskii[9, 10], Nozieres[11] などの多くの理論家が発展させてきた。Bogoliubov 理論の特徴は、ミクロな立場から WIDBG の低エネルギーにおける素励起が、Bogoliubov モードと呼ばれるフォノン励起であることを示した点にある。この Bogoliubov モードは取りも直さず、BEC が起きる際の $U(1)$ 対称性の破れに伴う Nambu-Goldstone モードであり、それと同時に、WIDBG が超流動性を獲得する原因であると考えられる [5]。冷却原子気体の BEC は、このような WIDBG の理論をそのまま適用できる系であり、これまで超流動 ^4He とは比較できなかった Bogoliubov 理論などの WIDBG に関する理論を直接的に検証することが可能である。実際、これまで冷却原子気体の BEC がフォノン励起を持つ [12] ことや超流動性を示す [13] ことが観測されており、他にも Bogoliubov 理論の予言と一致する様々な実験結果が得られている。

本稿では BEC における Bogoliubov モードのトンネル効果について解説する。Bogoliubov モードは上で述べたようにフォノンのような集団モードであり、そのため個別のボース粒子とは異なる性質を持つことが考えられる。単一のポテンシャル障壁に対する Bogoliubov モードのトンネル効果においてこの性質の違いは最も顕著に表れる。以下で説明するように、Bogoliubov モードは低エネルギー領域において、入射エネルギーが低くなるにつれ透過確率を増し、よりポテンシャル障壁を透過しやすくなる。更に、入射エネルギーがゼロの極限において透過確率、位相シフトとともにゼロに近づき、Bogoliubov モードはポテンシャル障壁に全く散乱されず完全透過を示すことが理論的に示される。この Bogoliubov モードの示す目覚ましい性質は異常トンネル効果と呼ばれ、最近 BEC の研究において大きな注目を集めている。異常トンネル効果は最初に Kovrizhin をはじめとするロシアの理論家によって 2000 年に予言され [14, 15, 16]、その後、筆者を含めた日本の理論家を中心に詳しく研究され [17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29]、その起源などについての理解が深まってきた。それにより、異常トンネル効果は超流動性などの BEC の基礎的な物性を理解する上で非常に重要であり、今後 BEC の理論を発展させる上で鍵を握ると考えられている。更に異常トンネル効果は、超流動流が存在する場合 [17, 24, 26]、ポテンシャルに段差がある場合 [25, 27, 26]、有限温度 [22]、Bogoliubov モードの 3 次元的な散乱問題 [21]、周期ポテンシャル中の BEC [18, 20]、ランダムポテンシャル中の BEC [19]、スピン 1 の BEC [28]、と様々な状況に拡張されている。本稿では、Bogoliubov モードが示す異常トンネル効果について紹介し、その起源や Josephson 効果との関わりについて詳しく議論していく。なお、この記事の内容は、筆者らの論文

[23, 27] に基づいている。

2 弱く相互作用するボース気体の理論

この章ではまず、Bogoliubov 理論に基づいた非一様系における WIDBG の理論 [9, 30] を解説する。また、本稿では絶対零度におけるトンネル問題のみを扱い、以下 $T = 0$ を仮定する。

まずハミルトニアンは次のように与えられる。(以下、 $\hbar = 1$ とおく。)

$$K = \int d\mathbf{r} \psi^\dagger(\mathbf{r}) \left(-\frac{\nabla^2}{2m} + U(\mathbf{r}) - \mu \right) \psi(\mathbf{r}) + \frac{g}{2} \int d\mathbf{r} \psi^\dagger(\mathbf{r}) \psi^\dagger(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}). \quad (1)$$

ここで $\psi(\mathbf{r})$ はボース粒子の場の演算子、 m はボース粒子の質量、 μ は化学ポテンシャル、 $U(\mathbf{r})$ は外場ポテンシャルである。ボース粒子間の相互作用は接触型を仮定し、 $g\delta(\mathbf{r})$ とする。 g は相互作用定数であり s 波散乱長 a_s を用いて $g = 4\pi a_s/m$ と表される。ここでは粒子間に斥力が働いている場合のみを考え $a_s > 0$ とする。

粒子間の相互作用が十分小さいとき、絶対零度においてほとんど全ての粒子が同一の量子状態にボース凝縮していると考えられる。このとき、凝縮体を表す巨視的波動関数はボース場の演算子の平均 $\Psi_0(\mathbf{r}) = \langle \psi(\mathbf{r}) \rangle$ で与えられる。場の演算子を平均とそこからの揺らぎに分け $\psi(\mathbf{r}) = \Psi_0(\mathbf{r}) + \delta\psi(\mathbf{r})$ として (1) に代入すると

$$K = K_0 + K_1 + K_2, \quad (2)$$

$$K_1 = \int d\mathbf{r} \left[\left(\hat{T} + g|\Psi_0|^2 \right) \Psi_0 \delta\psi^\dagger + \text{H.c.} \right], \quad (3)$$

$$K_2 = \int d\mathbf{r} \left[\delta\psi^\dagger \left(\hat{T} + 2g|\Psi_0|^2 \right) \delta\psi + \frac{g}{2} \left(\Psi_0^2 \delta\psi^\dagger \delta\psi^\dagger + \text{H.c.} \right) \right], \quad (4)$$

が得られる。ここで、 $K_l (l = 0, 1, 2)$ は揺らぎに関する l 次の項であり、3 次、4 次の項は小さいとして無視した。また $\hat{T} \equiv -\nabla^2/2m + U(\mathbf{r}) - \mu$ を導入した。まず、凝縮体の安定性より揺らぎに関する 1 次の項は消えなくてはならないので、(3) より凝縮体を記述する定常的な Gross-Pitaevskii (GP) 方程式 [9, 31]

$$\left[-\frac{\nabla^2}{2m} + U(\mathbf{r}) + g|\Psi_0|^2 \right] \Psi_0 = \mu \Psi_0, \quad (5)$$

を得る。更に、揺らぎに関する 2 次の項 K_2 は、Bogoliubov 変換 [3, 4]

$$\delta\psi(\mathbf{r}) = \sum_j \left[u_j(\mathbf{r}) \alpha_j - v_j(\mathbf{r})^* \alpha_j^\dagger \right], \quad (6)$$

$$\delta\psi(\mathbf{r})^\dagger = \sum_j \left[u_j(\mathbf{r})^* \alpha_j^\dagger - v_j(\mathbf{r}) \alpha_j \right], \quad (7)$$

を用いて対角化できる。ここで、 α_j は固有状態 j にある Bogoliubov モードの消滅演算子であり、通常のボソンの交換関係 $[\alpha_i, \alpha_j^\dagger] = \delta_{i,j}$ をみたす。Bogoliubov モードのエネルギー固有値 E_j は固有関数 $(u_j(\mathbf{r}), v_j(\mathbf{r}))$ とともに、この後で導かれる Bogoliubov 方程式を解く事によって決定される。上の Bogoliubov 変換 (6), (7) を (4) に代入し、 α_j に関して対角化可能な条件から、次の Bogoliubov 方程式が導かれる。

$$\left[-\frac{\nabla^2}{2m} + U(\mathbf{r}) + 2g|\Psi_0|^2 - \mu \right] u_j - g\Psi_0^2 v_j = E_j u_j, \quad (8)$$

$$\left[-\frac{\nabla^2}{2m} + U(\mathbf{r}) + 2g|\Psi_0|^2 - \mu \right] v_j - g(\Psi_0^*)^2 u_j = -E_j v_j. \quad (9)$$

Bogoliubov 方程式は、凝縮体の素励起である Bogoliubov モードを記述する基礎方程式である。通常まず、GP 方程式 (5) を解く事により凝縮体の波動関数 $\Psi_0(\mathbf{r})$ を求め、それを Bogoliubov 方程式に代入し解くことにより Bogoliubov モードの固有エネルギー E_j や固有状態 (u_j, v_j) を求める。また以下で扱うようなトンネル問題や散乱問題の場合には適当な境界条件のもとエネルギー E の Bogoliubov モードに対する透過確率や位相シフトを求める。

後の準備のために一様系 ($U(\mathbf{r}) = 0$) の場合について GP 方程式と Bogoliubov 方程式を解いてみる。一様系では、基底状態において GP 方程式 (5) の解は $\Psi_0 = \sqrt{n_0}$ と与えられる。 $n_0 \equiv \mu/g$ は凝縮体の密度を表す。これを Bogoliubov 方程式 (8),(9) に代入し、平面波を仮定し $(u(\mathbf{r}), v(\mathbf{r})) = (u_p, v_p)e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}/\sqrt{V}$ とすると、Bogoliubov モードの励起エネルギーとして良く知られた Bogoliubov スペクトル [6]

$$E_p = \sqrt{\varepsilon_p(\varepsilon_p + 2gn_0)}, \quad (10)$$

が得られる。ここで、 V は系の体積とし、 $\varepsilon_p = p^2/2m$ とおいた。

Bogoliubov スペクトル (10) は図 1 に示されているように p が小さい領域では $E_p \simeq cp$ となり、音速 $c = \sqrt{gn_0/m}$ のフォノンスペクトルを持ち、集団励起としてのフォノンを表していることがわかる。また、平面波の係数は

$$u_p = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_p + \mu}{E_p} + 1 \right)}, \quad (11)$$

$$v_p = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_p + \mu}{E_p} - 1 \right)}, \quad (12)$$

で与えられる。ここで、交換関係から導かれる規格化条件 $u_p^2 - v_p^2 = 1$ を用いた。

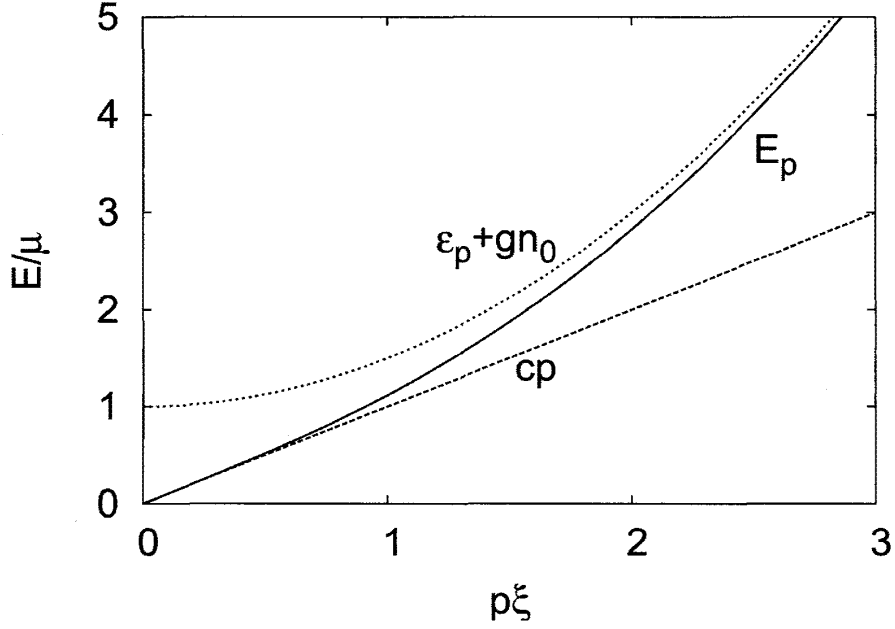


図 1: Bogoliubov スペクトル E_p . $\xi = 1/\sqrt{mgn_0}$ は回復長、 c は音速を表す。 E_p は $p \ll 1/\xi$ ではフォノンスペクトル cp に、 $p \gg 1/\xi$ では $\varepsilon_p + gn_0$ に漸近する。

ここで一般に教科書などであまり触れられていないが Bogoliubov 理論において重要と思われる点について幾つかコメントしておく。まず、一様系における基底状態は Bogoliubov モードに対する真空 $|\text{vac}\rangle$ となっており、任意の $\mathbf{p}$ に対して $\alpha_{\mathbf{p}}|\text{vac}\rangle = 0$ をみたす。真空 $|\text{vac}\rangle$ を元のボース粒子の生成、消滅演算子 $a_{\mathbf{p}}$, $a_{\mathbf{p}}^\dagger$ で表すと次のように与えられる [32]。

$$|\text{vac}\rangle = \prod_{\mathbf{p} \neq 0} \frac{1}{u_{\mathbf{p}}} \exp \left[-\frac{v_{\mathbf{p}}}{u_{\mathbf{p}}} a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{-\mathbf{p}}^\dagger \right] |0\rangle. \quad (13)$$

ここで $|0\rangle$ は任意の $\mathbf{p}$ に対して $a_{\mathbf{p}}|0\rangle = 0$ をみたす元のボース粒子の真空である。(13) を求めるためにはまず Bogoliubov 変換 $\alpha_{\mathbf{p}} = u_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}} + v_{\mathbf{p}}a_{-\mathbf{p}}^\dagger$ より $(u_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}} + v_{\mathbf{p}}a_{-\mathbf{p}}^\dagger)|\text{vac}\rangle = 0$ を得る。次に、交換関係 $[a_{\pm\mathbf{p}}, a_{\pm\mathbf{p}}^\dagger] = 1$ をみたすように、 $a_{\pm\mathbf{p}}^\dagger$ を c 数に、 $a_{\pm\mathbf{p}}$ を $\partial/\partial a_{\pm\mathbf{p}}^\dagger$ と置き換える事によって、 $|\text{vac}\rangle$ に対応する関数 $f(a_{\mathbf{p}}^\dagger, a_{-\mathbf{p}}^\dagger)$ のみたす微分方程式

$$u_{\mathbf{p}} \frac{\partial f}{\partial a_{\mathbf{p}}^\dagger} = -v_{\mathbf{p}} a_{-\mathbf{p}}^\dagger f, \quad (14)$$

が得られる。(14) は容易に解く事ができ、解を適当に規格化すると (13) が得られる。

(13) から、基底状態は運動量 $\mathbf{p}$ と $-\mathbf{p}$ のボース粒子が対を作って凝縮している状態である事がわかる。超伝導の BCS 理論の基底状態を表す BCS 波動関数にも似ているように思えるが、この場合、対形成の原因となっているのは Cooper 対の時の様に粒子間の引力相互作用ではなく、 $\mathbf{p}$ と $-\mathbf{p}$ の運動量を持つ粒子が斥力相互作用により凝縮体からはじ

き出され、その結果粒子間に相関が生じることにより対ができています。このように斥力相互作用により凝縮体の外にはじき出された成分は quantum depletion と呼ばれている。

更に、運動量 $\mathbf{p}$ の Bogoliubov モードが l 個励起された状態

$$|\Psi\rangle = \frac{(\alpha_{\mathbf{p}}^\dagger)^l}{\sqrt{l!}} |\text{vac}\rangle \quad (15)$$

に対して元のボース粒子の分布を調べてみる。 $\mathbf{p}$ と $-\mathbf{p}$ の粒子数を計算すると、それぞれ

$$n_{\mathbf{p}} = \langle \Psi | a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} | \Psi \rangle = l u_{\mathbf{p}}^2 + v_{\mathbf{p}}^2, \quad (16)$$

$$n_{-\mathbf{p}} = \langle \Psi | a_{-\mathbf{p}}^\dagger a_{-\mathbf{p}} | \Psi \rangle = (l+1) v_{\mathbf{p}}^2, \quad (17)$$

となる。基底状態 ($l = 0$) においてはともに $v_{\mathbf{p}}^2$ の粒子数を持つ事がわかる。これは quantum depletion の粒子数分布を表している。また、Bogoliubov モードが一つ励起されている場合 ($l = 1$) には、 $\mathbf{p}$, $-\mathbf{p}$ の粒子数は基底状態からそれぞれ $u_{\mathbf{p}}^2$, $v_{\mathbf{p}}^2$ だけ増えていることがわかる。従って、運動量 $\mathbf{p}$ の Bogoliubov モードを励起すると、 $\mathbf{p}$ のボソンが $u_{\mathbf{p}}^2$ 増えるだけでなく $-\mathbf{p}$ のボソンも $v_{\mathbf{p}}^2$ だけ増えることになる。Bogoliubov 変換 $\alpha_{\mathbf{p}}^\dagger = u_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^\dagger + v_{\mathbf{p}} a_{-\mathbf{p}}$ は一見すると $-\mathbf{p}$ のボソンを消しているように思えるが、実は $-\mathbf{p}$ のボソンを付け加えていることになる。この事実は実験によって実際に確かめられており、MIT の Ketterle のグループは Bragg 散乱という手法により Bogoliubov モードを励起させ、運動量分布を調べる事により、励起させた Bogoliubov モードと反対の運動量をもつボース粒子が存在する事を確認している [33]。またこの実験により、間接的に基底状態の波動関数 (13) が確かめられたと言える。

3 Bogoliubov モードのトンネル問題

この章では、いよいよ GP 方程式と Bogoliubov 方程式を解くことにより Bogoliubov モードのトンネル問題を扱う。また、Bogoliubov モードに関する保存則について議論し、異常トンネル効果の起源について詳しく議論する。

3.1 デルタ関数型ポテンシャル障壁

図 2 に表されている様な単純な 1 次元的なトンネル問題を考え、ポテンシャル障壁 $U(x)$ の左側からエネルギー E の Bogoliubov モードが定常的に入射している状況を考える。まずは、解析的に扱う事ができるデルタ関数型ポテンシャル $U(x) = V_0 \delta(x)$ ($V_0 > 0$) の場合について異常トンネル効果が起きることを確かめる [15]。

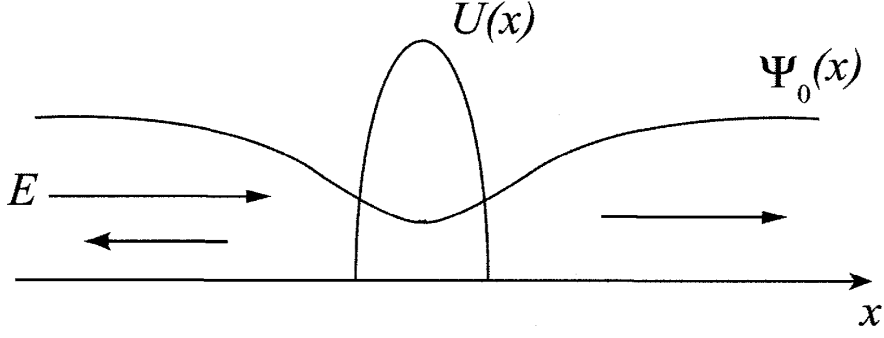


図 2: ポテンシャル障壁 $U(x)$ に対するエネルギー E の Bogoliubov モードのトンネル問題。 $\Psi_0(x)$ は凝縮体の波動関数を表す。各矢印はそれぞれ Bogoliubov モードの入射波、反射波、透過波を表す。

いま、回復長と呼ばれる、凝縮体波動関数が空間変化する特徴的な長さスケール $\xi = 1/\sqrt{mgn_0}$ を導入し、長さを ξ で、エネルギーを μ で、 (Ψ_0, u, v) を $1/\sqrt{n_0}$ で無次元化すると GP 方程式と Bogoliubov 方程式は

$$\left(-\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + U(x) + |\Psi_0|^2\right) \Psi_0 = \Psi_0, \quad (18)$$

$$\left(-\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + U(x) + 2|\Psi_0|^2 - 1\right) u - \Psi_0^2 v = Eu, \quad (19)$$

$$\left(-\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + U(x) + 2|\Psi_0|^2 - 1\right) v - (\Psi_0^*)^2 u = -Ev, \quad (20)$$

となる。 $U(x) = V_0 \delta(x)$ である。以下この章では全ての変数が無次元化されているとする。GP 方程式 (18) は凝縮体が基底状態のときに容易に解く事ができ、

$$\Psi_0(x) = \begin{cases} \tanh(x + x_0), & (x > 0), \\ \tanh(-x + x_0), & (x < 0), \end{cases} \quad (21)$$

$$x_0 = \operatorname{atanh} \left(-\frac{V_0}{2} + \sqrt{\frac{V_0^2}{4} + 1} \right). \quad (22)$$

となる。(21) より斥力ポテンシャルのために、ポテンシャル障壁の下では $\Psi_0(0) = \tanh x_0 < 1$ と波動関数が平衡値から減少していることがわかる。

次に Bogoliubov 方程式 (19), (20) を解くために新たな関数 $T(x) \equiv u(x) - v(x)$, $S(x) \equiv u(x) + v(x)$ を導入する。 T, S に関する方程式は、(19) と (20) の和と差をとることにより、次のように得られる。

$$\left(-\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + U(x) + \Psi_0^2 - 1\right) S = ET, \quad (23)$$

$$\left(-\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + U(x) + 3\Psi_0^2 - 1\right) T = ES. \quad (24)$$

上の二つの式から更に S, T それぞれに関する独立した方程式が次のように得られる。

$$\left(-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + U(x) + 3\Psi_0^2 - 1\right) \left(-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + U(x) + \Psi_0^2 - 1\right) S = E^2 S, \quad (25)$$

$$\left(-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + U(x) + \Psi_0^2 - 1\right) \left(-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + U(x) + 3\Psi_0^2 - 1\right) T = E^2 T. \quad (26)$$

$S(x)$ に関する方程式 (25) に着目し、まずはポテンシャルが無い場合 ($U(x) = 0$) のキルク解 $\Psi_0(x) = \tanh x$ に対し散乱状態の解を求める。Bargman の方法 [34] により $S(x) = (a(x) + bp)e^{ipx}$ と仮定し (25) に代入すると、結局、

$$S(x) = \left(\tanh x - \frac{i}{2}p\right) e^{ipx}, \quad (27)$$

が解となることがわかる。ただし、 p は $E = \sqrt{(p^2/2)(p^2/2 + 2)}$ と無次元化された Bogoliubov スペクトルをみだす。これを p に関して解くと

$$p = \begin{cases} \pm\sqrt{2}\sqrt{-1 + \sqrt{1 + E^2}} \equiv \pm k, \\ \pm i\sqrt{2}\sqrt{1 + \sqrt{1 + E^2}} \equiv \pm i\kappa, \end{cases} \quad (28)$$

と 4 個の解が得られる。最初の 2 個の解は右向きと左向きの平面波を表し、後の 2 個は減衰解を表す。今の場合、 $p = \pm\kappa$ の減衰解はそれぞれ $x \rightarrow \mp\infty$ で発散してしまうので物理的には許されないが、ポテンシャル障壁が存在する場合には必要となってくる。(27) の形の平面波解の存在は、Bogoliubov モードがキルクにより位相シフトは受けるが、全く散乱されないということを示している。なお、キルクはダークソリトンとも呼ばれている [3]。(27) に対応する $T(x)$ は (23) から求められて

$$T(x) = \frac{p}{2E} \left[p \left(\tanh x - \frac{i}{2}p \right) - i(1 - \tanh x^2) \right] e^{ipx} \quad (29)$$

となる。

次にポテンシャル障壁 $U(x) = V_0\delta(x)$ がある場合を考える。(21) は $x \neq 0$ においてキルクを並進移動させたものになっているので、ポテンシャル障壁がある場合の S, T の解は、上のキルクに対する S, T の解を並進移動して重ね合わせるにより次のように得られる。

$$S(x < 0) = \left(-\frac{i}{2}k - \gamma_-(x)\right) e^{ikx} + r \left(\frac{i}{2}k - \gamma_-(x)\right) e^{-ikx} + A \left(-\frac{\kappa}{2} - \gamma_-(x)\right) e^{\kappa x}, \quad (30)$$

$$S(x > 0) = t \left(-\frac{i}{2}k - \gamma_+(x)\right) e^{ikx} + B \left(\frac{\kappa}{2} - \gamma_+(x)\right) e^{-\kappa x}, \quad (31)$$

$$\begin{aligned}
T(x < 0) = & \frac{k}{2E} \left[k \left(-\frac{i}{2}k - \gamma_-(x) \right) - i(1 - \gamma_-(x)^2) \right] e^{ikx} \\
& + \frac{-k}{2E} \left[-k \left(-\frac{i}{2}k - \gamma_-(x) \right) - i(1 - \gamma_-(x)^2) \right] e^{-ikx} \\
& + A \frac{-i\kappa}{2E} \left[-i\kappa \left(-\frac{\kappa}{2} - \gamma_-(x) \right) - i(1 - \gamma_-(x)^2) \right] e^{\kappa x}, \quad (32)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T(x > 0) = & t \frac{k}{2E} \left[k \left(-\frac{i}{2}k + \gamma_+(x) \right) - i(1 - \gamma_+(x)^2) \right] e^{ikx} \\
& + B \frac{i\kappa}{2E} \left[i\kappa \left(\frac{\kappa}{2} + \gamma_+(x) \right) - i(1 - \gamma_+(x)^2) \right] e^{-\kappa x}, \quad (33)
\end{aligned}$$

r は反射係数、 t は透過係数であり、 A, B はそれぞれ $p = \pm\kappa$ の減衰成分の係数である。
 ここで、 $\gamma_{\pm}(x) \equiv \tanh(\pm x + x_0)$ とおいた。 r, t, A, B は $x = 0$ における接続条件

$$S(0-) = S(0+), \quad (34)$$

$$T(0-) = T(0+), \quad (35)$$

$$-\frac{1}{2}(S'(0+) - S'(0-)) + V_0 S(0) = 0, \quad (36)$$

$$-\frac{1}{2}(T'(0+) - T'(0-)) + V_0 T(0) = 0, \quad (37)$$

を解くことにより求められる。いま、低エネルギー領域 ($E \ll 1$) を考え、 $\kappa \simeq 2$ とすると、(34)~(37) を解く事により r, t, A, B は次のように求まる。

$$r = \frac{ik(1 - \eta^2) \{k^2 + 2(2 + \eta + \eta^2)\}}{(k - 2i) \{k^2 + 2i(1 + \eta)k - 2\eta(1 + \eta)\} \{\eta k + i(1 + \eta^2)\}}, \quad (38)$$

$$t = \frac{\eta \{k^4 + 2(3 + \eta)k^2 + 4(1 + \eta + \eta^2 + \eta^3)\}}{(k - 2i) \{k^2 + 2i(1 + \eta)k - 2\eta(1 + \eta)\} \{\eta k + i(1 + \eta^2)\}}, \quad (39)$$

$$A = B = \frac{-2\eta(1 - \eta)k}{(k - 2i) \{k^2 + 2i(1 + \eta)k - 2\eta(1 + \eta)\}}. \quad (40)$$

ここで、 $\eta \equiv \Psi(0) = -V_0/2 + \sqrt{V_0^2/4 + 1}$ とおいた。また、(38), (39) より $|r|^2 + |t|^2 = 1$ となり、確率保存則がみたされる事が確認出来る。更に、 $k \sim E \ll 1$ と近似すると、透過確率は (38), (39) より

$$\begin{aligned}
|t|^2 = 1 - |r|^2 = & \frac{16\eta^2(1 + \eta^2)^2(1 + \eta)^2 + 16(3 + \eta)(1 + \eta)(1 + \eta^2)\eta^2 k^2}{16\eta^2(1 + \eta^2)^2(1 + \eta)^2 + \{4\eta^2(1 + \eta^2)^2(1 + \eta)^2 + 16\eta^4(1 + \eta)^2 + 16(1 + \eta)(1 + \eta^2)^2\} k^2}, \quad (41)
\end{aligned}$$

となる。低エネルギー極限 ($E \sim k \rightarrow 0$) では (41) は $|t|^2 \rightarrow 1$ となり、完全透過が起きる事が確認出来た。図 3 に (34)~(37) を数値的に解いて得られた透過確率 $W \equiv |t|^2$ と位相シフト $\delta \equiv \arg(t)$ を E の関数として示してある。低エネルギー領域においてあるエネ

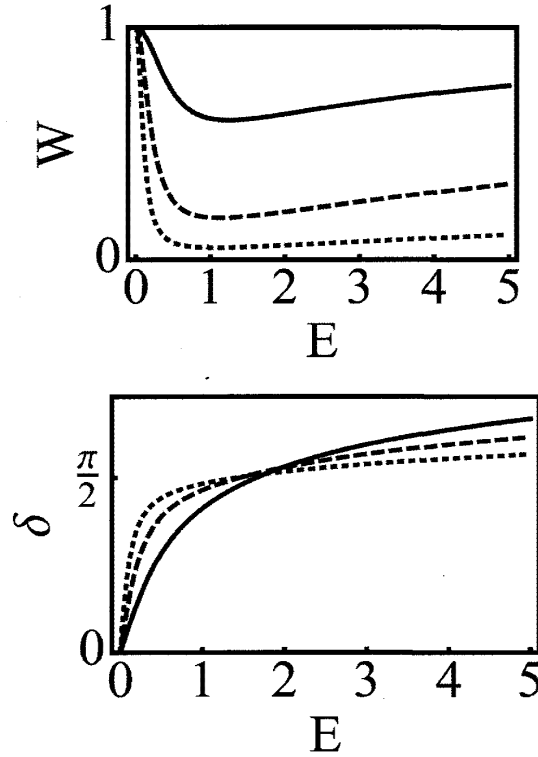


図 3: デルタ関数型ポテンシャル障壁に対する Bogoliubov モードの透過確率 W (上図) と位相シフト δ (下図) を入射エネルギー E の関数として示してある。実線、破線、点線はそれぞれポテンシャル障壁の強さが $V_0 = 2\xi\mu$, $5\xi\mu$, $10\xi\mu$ の場合を表している。入射エネルギー E は μ を単位としている。

ルギーの値を境に、エネルギーが減少するに連れて W が増加し、 $E \rightarrow 0$ で $W \rightarrow 1$ となる。また、 δ もあるエネルギーの値を境に 0 に近づいてゆき、 $E \rightarrow 0$ で $\delta \rightarrow 0$ となる事がわかる。つまり、入射エネルギーが低くなるほど、より多くの Bogoliubov モードがトンネルしていることになり、低エネルギー極限では、Bogoliubov モードはポテンシャル障壁を完全に透過することを示している。言うまでもなく、この低エネルギー領域における Bogoliubov モードの振る舞いは、低エネルギーでポテンシャル障壁を透過しにくくなる Shrodinger 方程式の結果とは正反対であり、非常に特異なものである。これで、異常トンネル効果がデルタ関数型のポテンシャル障壁の場合に起きる事がわかった。しかし、これまでの議論では低エネルギー領域において物理的に何が起きているのか不明であり、異常トンネル効果の原因についてはよくわからない。そこで、次の章で、異常トンネル効果の起源について議論する。

3.2 Bogoliubov モードに関する保存則

異常トンネル効果の起源を理解するためには Bogoliubov モードに関する保存則に立ち返って議論する必要がある。そこで、まずは Bogoliubov モードの粒子数保存とエネルギー保存について一般的な議論を行う。この章では、各物理量は次元を持つように戻してある。また、議論は 2 章と同様に 3 次元の一般的な場合について行う。

全粒子数密度 $n(\mathbf{r})$ と全カレント密度 $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ は Bogoliubov 変換 (6), (7) を用いると次のように与えられる。

$$\begin{aligned} n(\mathbf{r}) &= \langle \psi^\dagger(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) \rangle \\ &= n_s + \sum_j (n_{u_j} + n_{v_j}) \langle \alpha_j^\dagger \alpha_j \rangle + \sum_j n_{v_j}, \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{m} \text{Im} \langle \psi^\dagger(\mathbf{r}) \nabla \psi(\mathbf{r}) \rangle \\ &= \mathbf{J}_s + \sum_j (\mathbf{J}_{u_j} - \mathbf{J}_{v_j}) \langle \alpha_j^\dagger \alpha_j \rangle - \sum_j \mathbf{J}_{v_j}, \end{aligned} \quad (43)$$

ここで、 $n_s(\mathbf{r}) \equiv |\Psi_0(\mathbf{r})|^2$, $\mathbf{J}_s(\mathbf{r}) \equiv (1/m) \text{Im} [\Psi_0(\mathbf{r})^* \nabla \Psi_0(\mathbf{r})]$ はそれぞれ凝縮体の密度とカレント密度 (超流動流密度) を表す。また、

$$n_{u_j}(\mathbf{r}) \equiv |u_j(\mathbf{r})|^2, \quad (44)$$

$$n_{v_j}(\mathbf{r}) \equiv |v_j(\mathbf{r})|^2, \quad (45)$$

$$\mathbf{J}_{u_j}(\mathbf{r}) \equiv (1/m) \text{Im} [u_j(\mathbf{r})^* \nabla u_j(\mathbf{r})], \quad (46)$$

$$\mathbf{J}_{v_j}(\mathbf{r}) \equiv (1/m) \text{Im} [v_j(\mathbf{r})^* \nabla v_j(\mathbf{r})], \quad (47)$$

と定義した。(42), (43) の両式において、第一項は凝縮体からの寄与、第二項目は Bogoliubov モードからの寄与、第三項目は quantum depletion からの寄与を表している。従って、Bogoliubov モードの密度 n_j^q , カレント密度 $\mathbf{J}_j^q$ (以下、準粒子密度、準粒子カレントと呼ぶ) はそれぞれ

$$n_j^q = n_{u_j} + n_{v_j}, \quad (48)$$

$$\mathbf{J}_j^q = \mathbf{J}_{u_j} - \mathbf{J}_{v_j}, \quad (49)$$

と与えられる。(48), (49) において v 成分に対する符号が異なる事に注意しよう。これは 2 節の最後で議論したように、 v 成分が Bogoliubov モードと逆向きに運動する実粒子の成分を表している事を反映している。即ち、(48), (49) は、Bogoliubov モードを構成してる実粒子のうち u 成分は密度 n_{u_j} , カレント密度 $\mathbf{J}_{u_j}$ を持ち、 v 成分は

密度 n_{v_j} , カレント密度 $-\mathbf{J}_{v_j}$ を持つことを意味している。一様系の場合には、運動量 $\mathbf{p}$ の Bogoliubov モードが 1 個励起されていると $(u, v) = (u_p, v_p)e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}/\sqrt{V}$ より $\mathbf{J}_u = u_p^2(\mathbf{p}/mV)$, $-\mathbf{J}_v = -v_p^2(\mathbf{p}/mV)$, $\mathbf{J}^a = (u_p^2 - v_p^2)(\mathbf{p}/mV) = \mathbf{p}/mV$ となり 2 章の結果が得られる。

同様に今度は Bogoliubov モードのエネルギー密度とエネルギーフラックスの表式を導く。エネルギー密度を表すオペレーター $\hat{\rho}$ をハミルトニアン (1) から次のように定義する。

$$\hat{\rho} = \psi^\dagger T \psi + \frac{g}{2} \psi^\dagger \psi^\dagger \psi \psi. \quad (50)$$

ハイゼンベルグ方程式 $i(\partial\psi/\partial t) = T\psi + g\psi^\dagger\psi\psi$ を用い、連続の方程式 $\partial\hat{\rho}/\partial t + \nabla \cdot \hat{\mathbf{Q}} = 0$ をみたすようにエネルギーフラックスのオペレーター $\hat{\mathbf{Q}}$ を決めると

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{Q}} &= \frac{i}{2im} [(\nabla\psi^\dagger)(T\psi + g\psi^\dagger\psi\psi) - \text{H.c.}] \\ &= -\frac{1}{m} \text{Re} \left[(\nabla\psi^\dagger) \left(\frac{\partial\psi}{\partial t} \right) \right], \end{aligned} \quad (51)$$

となる。Bogoliubov 変換 (6), (7) を (50), (51) に代入し、 $O(\delta\psi^2)$ の項までを考慮して平均値 $\rho = \langle \hat{\rho} \rangle$, $\mathbf{Q} = \langle \hat{\mathbf{Q}} \rangle$ を計算すると

$$\rho = \rho_0 + \sum_j E_j (n_{u_j} - n_{v_j}) \langle \alpha_j^\dagger \alpha_j \rangle - \sum_j E_j n_{v_j} - \frac{i}{4} \sum_j S_j, \quad (52)$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0 + \sum_j E_j (\mathbf{J}_{u_j} + \mathbf{J}_{v_j}) \langle \alpha_j^\dagger \alpha_j \rangle + \sum_j E_j \mathbf{J}_{v_j}, \quad (53)$$

となる。ここで、 ρ_0 , $\mathbf{Q}_0$ はそれぞれ凝縮体のエネルギー密度、エネルギーフラックスを表し

$$\rho_0 = \Psi_0^* T \Psi_0 + \frac{g}{2} |\Psi_0|^4, \quad (54)$$

$$\mathbf{Q}_0 = \frac{i}{2m} \{ [T\Psi_0 + g|\Psi_0|^2\Psi_0] (\nabla\Psi_0^*) - \text{c.c.} \}, \quad (55)$$

と与えられる。全エネルギー密度 ρ は実数でなくてはならないので、ソースに対する条件

$$\sum_j S_j = 0, \quad (56)$$

が得られる。 Ψ_0 が GP 方程式 (5) をみたすので (55) より $\mathbf{Q}_0 = 0$ となり凝縮体はエネルギーを運ばないことがわかる。(52), (53) の第二項目はともに Bogoliubov モードからの寄与を与えるので、Bogoliubov モードのエネルギー密度 ρ_j^a 、エネルギーフラックス $\mathbf{Q}_j^a$

は

$$\rho_j^q = E_j(n_{u_j} - n_{v_j}), \quad (57)$$

$$\mathbf{Q}_j^q = E_j(\mathbf{J}_{u_j} + \mathbf{J}_{v_j}), \quad (58)$$

と与えられる。(57), (58) は、(48), (49) と比べると v 成分の符号が逆になっている。これは v 成分が負のエネルギー密度を持つ事によると考えられる。

次に Bogoliubov モードの粒子数保存則とエネルギー保存則について調べる。いま考えている Bogoliubov モードのトンネル問題は定常的な場合で時間には依存しないが、より一般的に非凝縮成分が時間変化している場合を考え、 $u(\mathbf{r}, t)$, $v(\mathbf{r}, t)$ に対する時間に依存する Bogoliubov 方程式 [35]

$$i \frac{\partial u}{\partial t} = (\hat{T} + 2g|\Psi_0|^2)u - g\Psi_0^2 v, \quad (59)$$

$$-i \frac{\partial v}{\partial t} = (\hat{T} + 2g|\Psi_0|^2)v - g(\Psi_0^*)^2 u, \quad (60)$$

を用いる。凝縮体は時間変化しないと考え $\Psi_0(\mathbf{r})$ を用いた。(59), (60) を用いて u , v の各成分に関する連続の式を作ると

$$\frac{\partial n_u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_u = \frac{S}{2}, \quad (61)$$

$$\frac{\partial n_v}{\partial t} - \nabla \cdot \mathbf{J}_v = \frac{S}{2}, \quad (62)$$

となる。ここで $S \equiv -4g\text{Im}(\Psi_0^2 u^* v)$ はソース項と呼ばれる。(61) と (62) の和をとると、Bogoliubov モードの粒子数に関する連続の式

$$\frac{\partial n^q}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}^q = S. \quad (63)$$

が得られる。(63) が右辺にソース項 S を持つことから、 $S \neq 0$ の場合には Bogoliubov モードの粒子数は保存されず、Bogoliubov モードは消滅したり生成したりすることが可能である。ただし、一様系の場合には $S = 0$ となり Bogoliubov モードの粒子数は保存される。また、エネルギーに関する連続の方程式は、(61) と (62) の差を取る事により

$$\frac{\partial \rho^q}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{Q}^q = 0, \quad (64)$$

と得られる。粒子数とは異なり Bogoliubov モードのエネルギーは保存している事がわかる。これは、 $\mathbf{Q}_0 = 0$ と凝縮体がエネルギーを運ばないことに起因している。

3.3 異常トンネル効果の起源と準粒子カレントの異常な増加

図 2 に表されているような Bogoliubov モードのトンネル問題の場合に、準粒子カレント $J^q(x)$ とエネルギーフラックス $Q^q(x)$ の振る舞いについて調べよう。ここではより一般的に、ポテンシャル障壁の形は幅 d 、高さ U_0 の箱形 $U(x) = U_0\theta(d/2 - |x|)$ を仮定する。このとき、基底状態の GP 方程式の解は [16]

$$\Psi_0(x) = \begin{cases} \sqrt{n_0} \tanh \left[(|x| - \frac{d}{2}) / \xi + C \right], & (|x| > d/2), \\ \sqrt{n_0} \beta / \text{cn} \left(\sqrt{K^2 + \beta^2} / \xi, q \right), & (|x| < d/2), \end{cases} \quad (65)$$

と求まる。ここで $\text{cn}(x, q)$ は Jacobi の楕円関数である。各定数は $K \equiv \sqrt{\beta^2 + 2(U_0/\mu - 1)}$, $q \equiv K/\sqrt{K^2 + \beta^2}$ と与えられ、 $\beta = \Psi_0(0)/\sqrt{n_0}$, $C = \Psi_0(d/2)/\sqrt{n_0}$ は $x = \pm d/2$ における接続条件をみたすように決められる。次に、ポテンシャルから離れた場所での Bogoliubov 方程式の漸近解は次のようになる。

$$\begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} e^{ikx} + r \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} e^{-ikx} + A \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} e^{\kappa x}, & (x \rightarrow -\infty), \\ t \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} e^{ikx} + B \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} e^{-\kappa x}, & (x \rightarrow \infty), \end{cases} \quad (66)$$

エネルギー E のときの平面波、減衰波の波数 k, κ は次元を戻して $k = \sqrt{2m} \sqrt{\sqrt{E^2 + (gn_0)^2} - gn_0}$, $\kappa = \sqrt{2m} \sqrt{\sqrt{E^2 + (gn_0)^2} + gn_0}$ と与えられる。また、

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{2V} \left(\frac{\varepsilon_p + gn_0}{E} + 1 \right)} \\ \sqrt{\frac{1}{2V} \left(\frac{\varepsilon_p + gn_0}{E} - 1 \right)} \end{pmatrix}, \quad (67)$$

と定義した。局在成分の場合の振幅が $(u_p, v_p) = (-b, a)$ であることに注意してほしい。

(66) の漸近的な振る舞いを仮定して Bogoliubov 方程式を解き、各係数 r, t, A, B を求める。いまの場合、解析的に扱うのは困難なので、有限要素法と呼ばれる方法を用いて Bogoliubov 方程式を数値的に解いた [27]。図 4 に透過確率 W と位相シフト δ がいくつかの異なるポテンシャル障壁の形状について示してある。デルタ関数型ポテンシャルの場合と同様に異常トンネル効果が起きていることがわかる。また、ポテンシャル障壁の高さと幅が増すにつれ、異常トンネル効果が起き始めるエネルギーの値が低くなることがわかる。

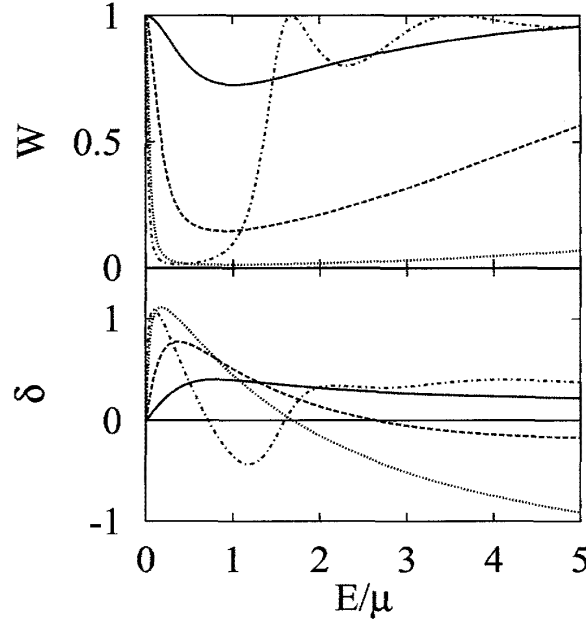


図 4: 箱形ポテンシャル障壁 $U(x) = U_0\theta(d/2 - |x|)$ に対する Bogoliubov モードの透過確率 W (上図) と位相シフト δ (下図) を入射エネルギー E の関数として示してある。実線、破線、点線、破点線はそれぞれ $(d, U_0) = (\xi, 2\mu), (\xi, 5\mu), (\xi, 10\mu), (4\xi, 2\mu)$ の場合を表している。低エネルギーで異常トンネルが、 $(d, U_0) = (4\xi, 2\mu)$ の場合には共鳴トンネルが起きていることが見て取れる。

次に Bogoliubov モードの粒子数保存とエネルギー保存について調べる。(66) の漸近形を用いて準粒子カレント J^q 、エネルギーフラックス Q^q を計算すると

$$J^q = \begin{cases} (k/mV)(1 - |r|^2), & (x \rightarrow -\infty), \\ (k/m)V|t|^2, & (x \rightarrow \infty), \end{cases} \quad (68)$$

$$Q^q = \begin{cases} E(k/mV)(a^2 + b^2)(1 - |r|^2), & (x \rightarrow -\infty), \\ E(k/mV)(a^2 + b^2)|t|^2, & (x \rightarrow \infty), \end{cases} \quad (69)$$

と得られる。定常的な場合に $Q^q(x)$ は空間的に一定であることから確率保存則

$$|r|^2 + |t|^2 = 1, \quad (70)$$

が得られる。一方、 $J^q(x)$ は保存しないことがわかっているが、(68), (70) より $J^q(x = -\infty) = J^q(x = \infty)$ となりポテンシャル障壁から十分離れた場所では準粒子カレントはポテンシャル障壁の左右で等しい値になる。

準粒子カレントの空間変化を調べるために Bogoliubov 方程式の解を用いて準粒子カレントの増加分 $\Delta J^q(x) \equiv J^q(x) - J^q(x = -\infty)$ を計算してみる。 $\Delta J^q(x)$ とソース項

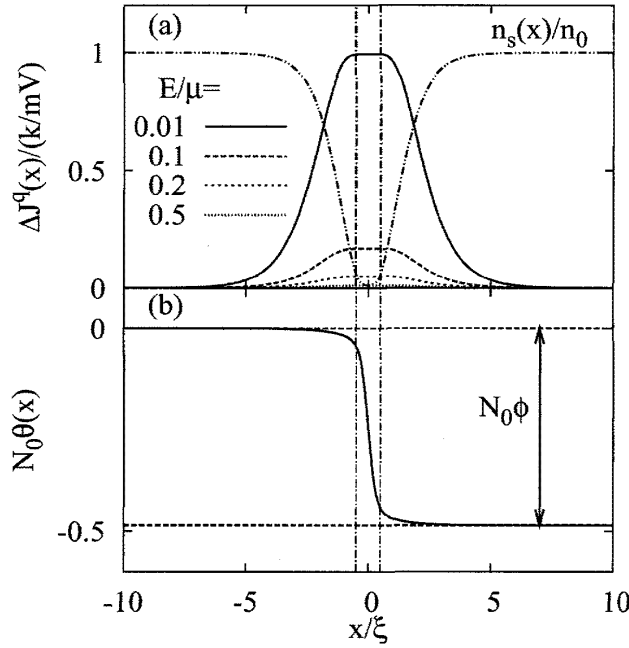


図 5: (a) 準粒子カレントの増加分 $\Delta J^q(x)$ の空間変化と (b) 凝縮体波動関数の位相 $\theta(x)$ の空間変化。(a), (b) においてポテンシャル障壁の形状は $(d, U_0) = (\xi, 10\mu)$ とし、点破線はポテンシャルの領域を示している。また、(b) では入射エネルギーは $E = 0.01\mu$ とし、 ϕ は Bogoliubov モードがトンネルすることにより生じた左右の凝縮体の位相差を表す。 $N_0 = n_0V$ は凝縮体の粒子数を与える。

$S(x)$ の間の関係は、(63) を定常的かつ 1 次元的な場合について空間積分する事により

$$\Delta J^q(x) = \int_{-\infty}^x S(x') dx', \quad (71)$$

と求まる。図 5(a) に、入射波の準粒子カレント (k/mV) で規格化した $\Delta J^q(x)$ の空間変化がプロットしてある。図 5(a) より $\Delta J^q(x)$ はポテンシャルの近傍において増加していることがわかる。また、その増加分は入射エネルギー E が下がるにつれて大きくなる。 $\Delta J^q(x)$ はポテンシャルの左側で増加し、ポテンシャル障壁の内部では一定となる。そして右側では、ポテンシャルから離れるにつれて減少し 0 に近づく。更に、図 4 と図 5(a) を比べると、ちょうど透過確率が増加し始め異常トンネル効果の振る舞いを示すエネルギー領域において、準粒子カレントの増加が顕著になることがわかる。即ち、低エネルギーの Bogoliubov モードの準粒子カレントはトンネルする過程においてポテンシャル障壁の手前で増加し、より多くの Bogoliubov モードがポテンシャル障壁に入射しており、そのために Bogoliubov モードの透過確率が上昇し、異常トンネル効果が起きることになる。従って、異常トンネル効果はこの準粒子カレントの増加に起因していることがわかった。この準粒子カレントの振る舞いはポテンシャル障壁の形状によらないことが確認でき、ポ

テンシャルが高くなるほどポテンシャル内部における準粒子カレントの増分 $\Delta J^a(x=0)$ は増加する。

次にこの準粒子カレントの増分がどこから供給されているかということが問題になる。これを理解するためにまず Bogoliubov 理論において粒子数保存則が破れていることを明らかにする。(43) と (61), (62) より

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = \nabla \cdot \mathbf{J}_s + \sum_j S_j \langle \alpha_j^\dagger \alpha_j \rangle + \frac{1}{2} \sum_j S_j, \quad (72)$$

が得られる。他方、GP 方程式 (5) より $\nabla \cdot \mathbf{J}_s = 0$ が導かれ超流動流密度はそれ自身で保存するため、(72) の右辺第一項は消える。また (56) より (72) の右辺第 3 項も消える。これより、Bogoliubov モードが励起され $\langle \alpha_j^\dagger \alpha_j \rangle \neq 0$, $S_j \neq 0$ となる場合には $\nabla \cdot \mathbf{J} \neq 0$ となり全カレント密度が保存しない。従って、Bogoliubov 理論では粒子数保存則がみだされていないということがわかった。このような矛盾が起きる理由は、Bogoliubov モードから凝縮体への影響 (back-reaction と呼ばれる) を無視したことにある。GP 方程式は、ハミルトニアンを揺らぎ $\delta\psi$ に関して展開しその 1 次の係数から得られているため、凝縮体 Ψ_0 についての閉じた方程式になっており、Bogoliubov モードから凝縮体への影響は完全に無視されている。そこで、back-reaction を考慮に入れると $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ が導け、粒子数保存則が成り立つことを示そう。back-reaction の効果は GP 方程式を次のように修正することにより取り入れる事ができる。

$$\left(-\frac{1}{2m} + U(\mathbf{r}) + g|\Psi_0|^2 \right) \Psi_0 - 2g \sum_j u_j v_j^* \langle \alpha_j^\dagger \alpha_j \rangle \Psi_0^* = \mu \Psi_0. \quad (73)$$

(73) の左辺の最後の項を付け加えたわけだが、この項が励起された Bogoliubov モードから凝縮体への影響を表していることは容易に見て取れる。その由来については後ほど議論する。(73) から凝縮体に関する連続の方程式を作ると

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_s = - \sum_j S_j \langle \alpha_j^\dagger \alpha_j \rangle, \quad (74)$$

が得られ、これを (72) に代入すると $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ が導かれる。したがって、back-reaction を考慮することにより全粒子数が保存することがわかった。

(73) において付け加えた左辺最後の項の由来について述べる。GP 方程式を導くときには $\delta\psi$ についての 3, 4 次の項を無視したが、有限温度の場合など揺らぎの高次の効果を取り入れる必要があるときには 3 次の項を

$$\delta\psi^\dagger \delta\psi \delta\psi \simeq 2\tilde{n}\delta\psi + \tilde{m}\delta\psi \quad (75)$$

と平均場近似する [36, 37]。ここで、 $\tilde{n} \equiv \langle \delta\psi^\dagger \delta\psi \rangle$ は非凝縮成分の密度を表し、 $\tilde{m} \equiv \langle \delta\psi \delta\psi \rangle$ は異常平均と呼ばれる量である。その結果、GP 方程式 (5) の左辺に $2g\tilde{n}\Psi_0 + g\tilde{m}\Psi_0^*$ という項が付け加わる。 $\tilde{n}$ からの寄与は凝縮体の連続の方程式を変えないのでいまは簡単のため無視するとして、 $\tilde{m}$ からの寄与は

$$g\tilde{m}\Psi_0^* = -2g \sum_j u_j v_j^* \langle \alpha_j^\dagger \alpha_j \rangle \Psi_0^* - g \sum_j u_j v_j^* \Psi_0^*, \quad (76)$$

となる。(76) の右辺第一項目は励起された Bogoliubov モードからの寄与を、第二項目は quantum depletion からの寄与を表す。ここでは、Bogoliubov 励起から受ける凝縮体の影響のみを取り入れたいので (76) の右辺第一項目だけを残すと (73) が得られる。

いまの 1 次元的なトンネル問題の場合について (74) を $x = -\infty$ から x まで積分すると (71) より

$$\Delta J_s(x) + \sum_j \Delta J_j^q(x) \langle \alpha_j^\dagger \alpha_j \rangle = 0, \quad (77)$$

が得られる。(77) において準粒子カレントの増分 ΔJ^q と back-reaction による超流動流の増分 ΔJ_s はお互い打ち消し合うことがわかる。つまり、これは準粒子カレントの増分が凝縮体から供給されていることを意味しており、Bogoliubov モードのソース S の実体は凝縮体である事がわかった。

図 5(a) で示したように、Bogoliubov モードの準粒子カレント $J^q(x)$ は低エネルギーにおいてポテンシャル障壁の近傍で増加する。上の議論から、全カレントを保存するため超流動流は準粒子カレントの増分を打ち消すように流れなくてはならない。したがって、ポテンシャル障壁の近傍では準粒子カレントとは逆向きに超流動流が流れていることになる。最初の仮定では、凝縮体が基底状態にあり超流動流が流れていない状況における Bogoliubov モードのトンネル問題を考えていたが、Bogoliubov モードが異常トンネル効果を示すときには、トンネルする Bogoliubov モードの back-reaction により超流動流が誘起されることがわかった。

更に、この超流動流が誘起される原因について考察する。いま、少数の Bogoliubov モードが励起されている場合 ($\langle \alpha_j^\dagger \alpha_j \rangle \simeq 1$) を考えると、凝縮体における back-reaction の影響は非常に小さいと考えられる。そのため back-reaction を考慮しない場合の凝縮体の波動関数を $\Psi_0(x)$ として、back-reaction により

$$\Psi_0(x) \rightarrow \Psi_0(x) e^{i\theta(x)}, \quad (78)$$

と凝縮体の波動関数が位相 $\theta(x)$ だけ変化すると仮定する。一般に波動関数の振幅の変化はより高次の補正となるため、この仮定は励起された Bogoliubov モードが少数で $\theta(x)$

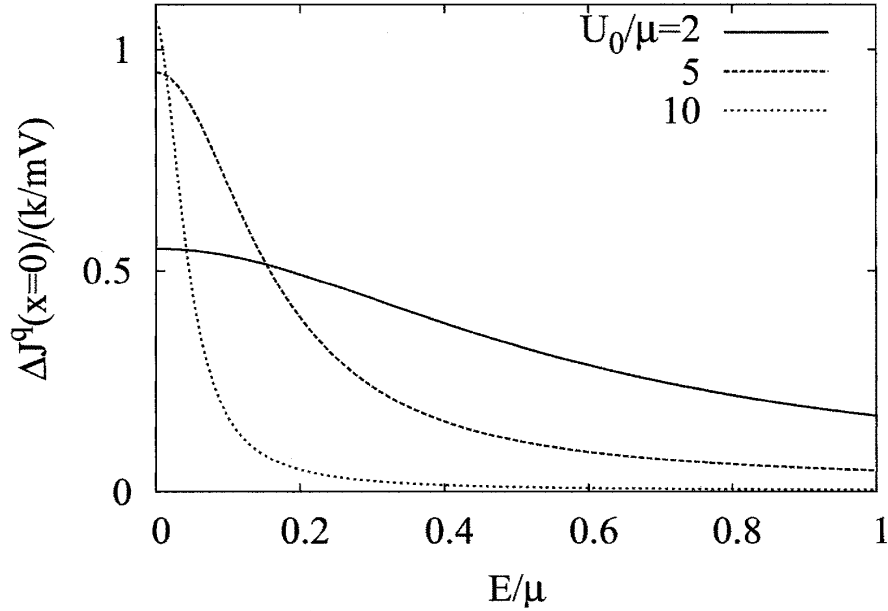


図 6: Bogoliubov モードがトンネルすることにより生じた左右の凝縮体の位相差 ϕ をエネルギー E の関数として示してある。低エネルギーになるにつれ、位相差 ϕ は増大する。

が小さい限りは成り立つと考えられる。このとき、超流動流の変化分は

$$\Delta J_s = \frac{n_s}{m} \frac{\partial \theta(x)}{\partial x}, \quad (79)$$

と与えられる。(77), (79) より、back-reaction による凝縮体の位相のずれは準粒子カレントを用いて

$$\theta(x) = -m \sum_j \left(\int_{-\infty}^x dx' \frac{\Delta J_j^q(x')}{n_s(x')} \right) \langle \alpha_j^\dagger \alpha_j \rangle, \quad (80)$$

と表される。

図 5(b) に (80) を用いて計算した $\theta(x)$ の空間変化を示す。Bogoliubov モードが 1 個トンネルする場合を考え $\langle \alpha_j^\dagger \alpha_j \rangle = 1$ としてある。図 5(b) において、 $\theta(x)$ はポテンシャル障壁の領域で大きく変化し、左右の凝縮体に位相差 ϕ が生じていることがわかる。この位相差はトンネルする Bogoliubov モードにより生じたものである。したがって、Bogoliubov モードが back-reaction により凝縮体の位相を捻るという性質を持つ事が明らかになった。図 6 に位相差 ϕ を Bogoliubov モードのエネルギー E の関数として示してある。まず、低エネルギーになるほど ϕ が増加することがわかる。これは、低エネルギーになるほど Bogoliubov モードが集団励起としての性質を帯び、凝縮体と強く結合するようになることを反映していると考えられる。また、ポテンシャル障壁が高いほど低エネルギーにお

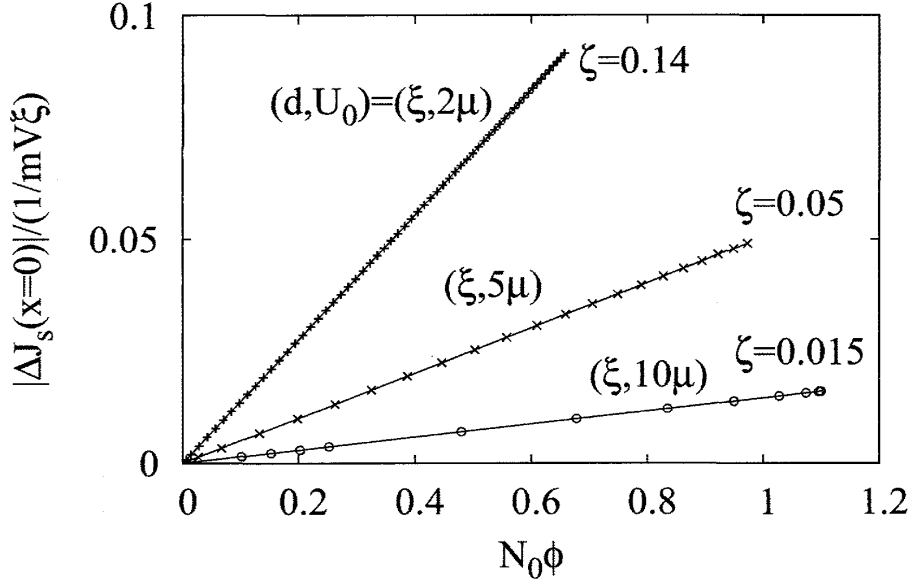


図 7: トンネルする Bogoliubov モードにより誘起されたポテンシャルの領域における超流動流 $\Delta J_s(x=0)$ を位相差 ϕ の関数として示してある。低エネルギーにおいて $\Delta J_s(x=0)$ が ϕ に比例していることがわかる。 ζ は各直線の傾きを表す。

いて ϕ は増加する。これは、ポテンシャル障壁が高くなると左右の凝縮体の結合が弱まり、そのためトンネルする Bogoliubov モードによって、より大きな左右の凝縮体の位相差が生じることを表している。

ポテンシャル障壁を隔てて凝縮体に位相差がある場合には Josephson 効果が起きることが考えられ、従って、ポテンシャル障壁の近傍で誘起された超流動流 $\Delta J_s(x)$ はこの凝縮体の位相差に伴う Josephson カレントとみなすことができるはずである。いま、位相差 ϕ は凝縮体の粒子数 $N_0 \equiv n_0 V$ として $\phi \simeq 1/N_0$ のオーダーであるから、非常に小さく、そのため、Josephson カレントは

$$\Delta J_s(x=0) = I_J \sin \phi \simeq I_J \phi, \quad (81)$$

となり ϕ に比例しているはずである。ここで I_J は Josephson の臨界流を表す。このことを確かめるために、図 7 に低エネルギーにおける誘起された超流動流 $\Delta J_s(x=0)$ を位相差 ϕ の関数として示す。図 9 において $\Delta J_s(x=0)$ は確かに ϕ に比例しており、したがって ΔJ_s は ϕ に伴う Josephson カレントとみなすことができる。また、図 7 の直線の傾き ζ から、Josephson 臨界流も $I_J = \zeta(n_0/m\xi)$ と求めることができる。

以上の考察から得られた異常トンネル効果の物理的な描像をまとめると次のようになる。まず、入射された低エネルギーの Bogoliubov モードは、ポテンシャル障壁をトンネ

ルする過程で凝縮体の位相を捻り、ポテンシャル障壁を隔てて凝縮体に位相差を生じさせる。この位相差に伴い Josephson 効果が起き、Josephson カレントとして超流動流が誘起される。超流動流はポテンシャルの領域を、入射する Bogoliubov モードと反対方向に流れる。そして、全カレントを保存するために Bogoliubov モードの準粒子カレントもポテンシャル障壁の近傍で増加する。その結果、Bogoliubov モードの透過確率が増加し異常トンネル効果が起きる。このように、異常トンネル効果は、低エネルギーにおいて Bogoliubov モードと凝縮体が結合することにより生じることがわかった。

ここでは、粒子数保存をみたすように back-reaction による補正を GP 方程式に加え Bogoliubov 理論を修正したが、その際、back-reaction の効果を摂動的に扱っていることに注意してほしい。即ち、まず第 0 近似として GP 方程式 (5) と Bogoliubov 方程式 (8), (9) を解き、その解を用いて back-reaction による凝縮体波動関数の補正 (80) を求めた。また、Bogoliubov モードが凝縮体へ及ぼす影響は取り入れたが、back-reaction による Bogoliubov モード自身への影響は無視した。つまり、back-reaction を含んだ凝縮体波動関数を用いて Bogoliubov 方程式を解き直すことは行わなかった。これらの近似は全て、いま考えているような励起している Bogoliubov モードの数が小さく back-reaction の影響が小さい場合には妥当であると考えられる。しかし、多数の Bogoliubov モードが励起されていたり、有限温度で揺らぎが大きい場合には上の近似は成り立たず、このような場合を扱うためには Bogoliubov モードと凝縮体の間の相互作用を self-consistent に扱った理論 [36, 37] を用いる必要がある。しかし、そのような理論にはまだ問題点があり発展途上である [37] ことを最後に指摘しておきたい。

4 まとめと今後の課題

本稿では、ボース凝縮体における Bogoliubov モードのトンネル問題を解説し、低エネルギーの Bogoliubov モードが示す異常トンネル効果について紹介した。また、異常トンネル効果の起源について考察し、Bogoliubov モードの準粒子カレントが低エネルギーにおいてポテンシャル障壁近傍で増加することにより、透過確率が低エネルギーにいくにつれ増加することを明らかにした。更に、凝縮体に対する Bogoliubov モードの back-reaction の効果を取り入れ GP 方程式を修正し、粒子数保存が成り立つように Bogoliubov 理論を修正した。これによって、Bogoliubov モードがトンネルする過程で凝縮体の位相を捻り、ポテンシャル障壁を隔てた左右の凝縮体に位相差が生じていることがわかった。そのた

め、Josephson 効果が起き、超流動流が Bogoliubov モードとは反対向きに誘起されていることを見出した。

本稿では、低エネルギー領域における Bogoliubov モードの特徴的な振る舞い、即ち、エネルギーが減少するに連れてポテンシャル障壁に対する透過確率が増加する事実に着目し、異常トンネル効果の起源について考察してきた。しかし、ここで得られた理解ではゼロエネルギー極限における完全透過については満足に説明する事ができない。ゼロエネルギー極限における完全透過については、これまで幾つかの論文で議論されている [16, 22, 24]。文献 [16] では、Bogoliubov モードの共鳴トンネルが異常トンネル効果の原因として挙げられているが、これについて筆者らが検討したところ [27]、共鳴トンネルと異常トンネルが起きるときの波動関数の振る舞いに明らかな違いがあるため、両者は同一の現象とはみなすことはできず、否定的な結論が得られている。文献 [22] では、Bogoliubov 方程式のゼロモード解が凝縮体自身の波動関数に一致することが完全透過の一因である事が指摘されており、また、文献 [24] では、低エネルギーにおける Bogoliubov モードの波動関数 (u, v) が超流動流を担う凝縮体の波動関数と一致することにより、Bogoliubov モード自身が低エネルギーにおいて超流動性を獲得する可能性について指摘されている。本稿で得られた異常トンネル効果の物理的描像とゼロエネルギーにおける完全透過に関するこれらの理解との融合は今後の大きな課題である。

また、本稿で指摘したように Bogoliubov 理論は粒子数を保存しないという致命的な欠陥をもつ。異常トンネル効果自身は Bogoliubov 理論による帰結であり、このような欠陥を持つ Bogoliubov 理論の結果を信用して良いかは本当はわからない。従って今後、Bogoliubov 理論とは違う理論により異常トンネル効果を確かめることが強く望まれる。これについて、1 次元の Tomonaga-Luttinger 流体のポテンシャル障壁に対する完全透過 [38] と異常トンネル効果との興味深い類似性が指摘されており [25]、両者の比較から異常トンネル効果に対する新しい理解が得られる可能性がある。

これまで見て来たように、異常トンネル効果は BEC の基礎的な物性に関わる大きな問題であり、BEC の超流動性などの理解のためにも更なる発展が望まれる。しかし、これまでの異常トンネル効果に関する研究は全て理論サイドに限られており、実験により異常トンネル効果を検証することは、研究の進展に必要不可欠であると思われる。今後、実験家が異常トンネル効果に興味を持ちその検証に取り組むことを期待したい。

最後に、本解説は慶應義塾大学の大橋洋士先生とともに行った共同研究の成果に基づくものであり、異常トンネル効果の物理的な解釈はお互いにあらゆる角度から議論を尽くし

た末にたどり着いたものである。この場を借りてこれまでの共同研究に対し大橋先生に深く感謝します。また、段下一平氏は異常トンネル効果の研究の先駆者であり、氏による様々な有益な助言なしにはこのような研究はなし得なかったと考えており、深く感謝します。また、有意義な議論をして頂いた加藤雄介先生、栗原進先生、二国哲朗先生、井上慎先生、Franco Dalfovo 先生、上田正仁先生、鈴木徹先生、町田昌彦先生、上出健仁氏、余越伸彦氏、渡部昌平氏、高橋大輔氏に感謝します。

参考文献

- [1] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, *Science*, **269**, 198 (1995).
- [2] K. B. Davis, M.-O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3969 (1995).
- [3] L. P. Pitaevskii and S. Stringari, *Bose-Einstein Condensation* (Oxford Science Publications, Oxford, 2003).
- [4] C. Pethick and H. Smith, *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases* (Cambridge University Press, New York, 2002).
- [5] L. D. Landau, *J. Phys. (USSR)* **5**, 71 (1941).
- [6] N. N. Bogoliubov, *J. Phys. (USSR)* **11**, 23 (1947).
- [7] S. T. Beliaev, *Sov. Phys. JETP* **7**, 289 (1958).
- [8] N. M. Hugenholtz and D. Pines, *Phys. Rev.* **116**, 489 (1959).
- [9] L. P. Pitaevskii, *Sov. Phys. JETP* **13**, 451 (1961).
- [10] E. M. Lifshitz and L. P. Pitaevskii, *Statistical Physics* (Pergamon Press, Oxford, 1980).
- [11] J. Gavoret and P. Nozieres, *Ann. Phys. (N.Y.)*, **28**, 349 (1964).
- [12] M. R. Andrews, D. M. Kurn, H. J. Miesner, D. S. Durfee, C. G. Townsend, S. Inouye, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 553 (1997).
- [13] R. Onofrio, C. Raman, J. M. Vogels, J. Abo-Shaeer, A. P. Chikkatur, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 2228 (2000).
- [14] D. L. Kovrizhin and L. A. Maksimov, *Dokl. Phys.* **46**, 328 (2001).

- [15] D. L. Kovrizhin, Phys. Lett. A **287**, 392 (2001).
- [16] Yu. Kagan, D. L. Kovrizhin, and L. A. Maksimov, Phys. Rev. Lett. **90**, 130402 (2003).
- [17] I. Danshita, S. Kurihara, and S. Tsuchiya, Phys. Rev. A **72**, 053611 (2005).
- [18] I. Danshita, N. Yokoshi, and S. Kurihara, New J. Phys. **8**, 44 (2006).
- [19] N. Bilas and N. Pavloff, Eur. Phys. J. D **40**, 387 (2006).
- [20] I. Danshita and S. Tsuchiya, Phys. Rev. A **75**, 033612 (2007).
- [21] 藤田朗文, 修士論文 (東京大学, 2007).
- [22] Y. Kato, H. Nishiwaki, and A. Fujita, J. Phys. Soc. Jpn. **77**, 013602 (2008).
- [23] S. Tsuchiya and Y. Ohashi, Phys. Rev. A **78**, 013628 (2008).
- [24] Y. Ohashi and S. Tsuchiya, Phys. Rev. A **78**, 043601 (2008).
- [25] S. Watabe and Y. Kato, Phys. Rev. A **78**, 063611 (2008).
- [26] D. Takahashi and Y. Kato, J. Phys. Soc. Jpn. **78**, 023001 (2009).
- [27] S. Tsuchiya and Y. Ohashi, Phys. Rev. A **79**, 063619 (2009).
- [28] S. Watabe and Y. Kato, arXiv:0909.2478.
- [29] D. Takahashi, arXiv:0909.1068.
- [30] A. L. Fetter, Ann. Phys. **70**, 67 (1972).
- [31] E. P. Gross, Nuovo Cim. **20**, 454 (1961).
- [32] K. Huang, *Statistical Mechanics* (John Wiley & Sons, 1963).
- [33] J. M. Vogels, K. Xu, C. Raman, J. R. Abo-Shaeer, and W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **88**, 064042 (2002).
- [34] G. L. Lamb, *Elements of Soliton Theory* (Dover, 1994).
- [35] Y. Castin and R. Dum, Phys. Rev. A **57**, 3008 (1998).
- [36] A. Griffin, Phys. Rev. B **53**, 9341 (1996).
- [37] T. Kita, J. Phys. Soc. Jpn. **65**, 1355 (1996); 北 孝文, 日本物理学会誌, **64**, 170 (2009).
- [38] C. L. Kane and M. P. A. Fisher, Phys. Rev. Lett. **68**, 1220 (1992).