

Noether 一様連接環について

日大 文理 後藤 四郎

1. 序文.

A は可換環として, $\mathbb{N}$ によって自然数の全体のなす集合をあらわす。 A -加群 M に対して, $\bigcup_A(M)$ により M を生成するのに必要な元の最小の個数をあらわす。 各 $n \in \mathbb{N}$ について

$$\varphi_A(n) = \sup_{0 \neq f \in \text{Hom}_A(A^n, A)} \bigcup_A(\text{Ker } f)$$

とおき, この $\varphi_A(n)$ がすべての $n \in \mathbb{N}$ について有限であるとき, A は一様連接であるということにする。一様連接であれば, 連接である。付値環や絶対平坦環は, 必ずしも Noether ではない, 一様連接環の典型的なものではある。もっとも, この講演では Noether 一様連接環 を主に, とりあつかう。

一様連接の概念は, Soublin [8] により導入され,

環 A が一様連接であるためには、直積 $A^{\mathbb{N}}$ が連接であることが必要にして十分であることが示された。Quentel [6] は、Soublin の研究を引き継いで、もし A が Noether 一様連接であれば、

$$\sup_{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A} \nu_A(\mathfrak{p}) \leq \varphi_A(1) + \varphi_A(4)$$

なることを指摘した。 $(\sup \nu_A(\mathfrak{p}))$ が有限という性質は、非常に強い条件であって、次元が 3 以上の Noether 環でこの性質をもつものは、知られていない。) Quentel の証明は、Noether 環の素イデアルは、三つの元で生成されたイデアルの素因子になるという Gulliksen [3] の結果の応用であって、私は他にこの Gulliksen の定理の応用例を知らない。Quentel は更に、一次元の Noether 局所環は一様連接であると指摘している。後に、Sally [7] によって、これは 2 次元以下で常に正しいことが示された。

上に述べた様に、 A が一様連接であれば、 A の素イデアルの生成元の個数には、上限がある。従って、Macaulay の有名な例が示す様に、体 k の上の多項式環 $k[x_1, \dots, x_d]$ や巾級数環 $k[[x_1, \dots, x_d]]$ は $d \geq 3$ なら一様連接ではないのだから、Noether 一様連接環の次元は高々 2 であると予想するのは大変に自

然であって、この講演の目的も、このことを証明することにある。結果は、

定理(1.1). Noether 環 A について、次の二つの条件は同値である。

- (1) A は 一様連接である。
- (2) $\dim A \leq 2$ であってかつ、すべての $n \in \mathbb{N}$ について

$$\sup_{\mathfrak{m} \in \text{Max } A} g_{A_{\mathfrak{m}}}(n)$$

は有限である。

上の定理の条件(2)の後半は、一般には、不可欠である(例も第3節で与える)が、 A に適当な有限性の仮定を付加しておけば、代りにこの部分もとりに除くことができる。

系(1.2). A は semi-local であるか、 A 上の有限生成代数であると仮定せよ。すると、

A が一様連接である $\iff \dim A \leq 2$
となる。

(1.1) と (1.2) の証明は、次の節ですることにする。

2次元以下の局所環が一様連接であるという事実は、Sally [7] の中にも応用例があるが、鈴木の講演内にも決定的に使われている。もともと、そこから本研究が出發したのであるから、興味をお持ちの読者は、是非参照されたい。

以下 A は可換環を、 $\mathbb{N}$ は自然数の全体のなす集合をあらわす。

2. 定理 (1.1) の証明.

まず Quentel [6] による、次の二つの結果を記録しておく。((2.2) のくわしい証明が、Sally [7] の中に再録されている)

(2.1). S は A 内の乗法系とすれば、すべての n について、

$$\varphi_{S^{-1}A}(n) \leq \varphi_A(n)$$

である。とくに、 A が一様連接であれば、 $S^{-1}A$ もそうなる。

(2.2). $A \xrightarrow{f} B$ は可換環の射で、 B は有限表示 (finitely presented) な A -加群になっているものと仮定せよ。このとき、 A が一様連接であれば

ば、 B も一様連接である。更に、もし $\ker f$ が中零でかつ A -加群として有限表示であれば、逆も正しい。

さてしばらくの間、 A は極大イデアル $\mathfrak{m}$ の局所環で $\dim A = 3$ のものとする。 $\underline{a} = a_1, a_2, a_3, a_4$ は $\mathfrak{m}$ の元の列で $\dim A/(\underline{a}) = 0$ のものとせよ。 $K = K(\underline{a}; A)$ によえ、 $\underline{a}$ によえ得られる Koszul 複体を、 $H(\underline{a}; A)$ によりその homology をあらわす。今 $f: A^4 \rightarrow A$ を、 A -加群の射で $f(e_i) = a_i$ なるもの ($\{e_i\}_{i=1,2,3,4}$ は A^4 の自然な基底をあらわす。) とする。もちろん、

$$U_A(H_1(\underline{a}; A)) \subseteq U_A(\ker f) \subseteq U_A(H_1(\underline{a}; A)) + \mathfrak{m}$$

である。

$$s(A) = \sup_{\underline{a}} U_A(H_1(\underline{a}; A))$$

と置く。 $s(A) = \infty$ なら、 A は一様連接ではないことに注目せよ。

補題 (2.3). ① $\hat{A}$ を A の完備化とすると、

$$s(\hat{A}) = s(A) \text{ である。}$$

② A 内に正則局所環 R が部分環とに含まれて、

A は R -加群として有限型でかつ $R \not\leq A$ ならば,
 $s(A) = \infty$ である。

証明. ① $\underline{b} = b_1, \dots, b_4$ は $U\hat{A}$ の元で, $\underline{b}\hat{A}$
 は $U\hat{A}$ -primary なものであるとすれば, $\underline{a} = a_1, \dots, a_4$ は
 U の元で $\underline{a}\hat{A} = \underline{b}\hat{A}$ となるものが必ずとれる。もち
 ろも, $K(\underline{a}; \hat{A}) \cong K(\underline{b}; \hat{A})$ だから,

$$H_1(\underline{b}; \hat{A}) \cong \hat{A} \otimes_A H_1(\underline{a}; A)$$

である。よって $\bigcup_{\hat{A}} (H_1(\underline{b}; \hat{A})) = \bigcup_{\hat{A}} (H_1(\underline{a}; A))$. 従
 って, $s(\hat{A}) \leq s(A)$. 逆向きの不等号も同様にして
 示される。

② $\underline{a}$ を R の元の列とせよ。すると,
 $K(\underline{a}; R) \leq K(\underline{a}; A)$ だから

$$\begin{aligned} \bigcup_R (H_1(\underline{a}; R)) &\leq \bigcup_R (H_1(\underline{a}; A)) \\ &\leq \bigcup_R (A) \cdot \bigcup_A (H_1(\underline{a}; A)). \end{aligned}$$

故に $s(R) \leq \bigcup_R (A) \cdot s(A)$. 従って $s(R) = \infty$ を
 示せば十分である。

U により R の極大イデアルをあらわし, $U = (x, y, z)$
 とかいておく。 $n \geq 5$ は奇数として, H_n によって
 n 次の交代行列で次のように定まるものを表す:

$$[H_n]_{ij} = \begin{cases} x & (i \text{ odd, } j=i+1) \\ y & (i \text{ even, } j=i+1) \\ z & (i+j = n+1) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

($1 \leq i < j \leq n+1$). I_n により H_n の $n-1$ 次の Pfaffian 全体の生成する R のイデアルをあらわす。すると I_n は $\mathcal{U}$ -準素 ($I_n \ni x^{\frac{n-1}{2}}, y^{\frac{n-1}{2}}, z^{\frac{n-1}{2}}$) であるから [1] により, R/I_n は Gorenstein で $\mathcal{U}_R(I_n) = n$ である。 $J_n = (f_n, g_n, h_n) : I_n \subsetneq \cdot$ (但し f_n, g_n, h_n は I_n の極小生成系の一部で R -列をなすものとする。もちろん $f_n = x^{\frac{n-1}{2}}, g_n = y^{\frac{n-1}{2}}, h_n = z^{\frac{n-1}{2}}$ ととるよい。) すると, [5] により, $\mathcal{U}(R/J_n) = n-3$ でさらに $\mathcal{U}_R(J_n/(f_n, g_n, h_n)R) = 1$ がいえる。従って, R/J_n は R の形 a minimal free resolution

$$0 \rightarrow R^{n-3} \rightarrow R^n \rightarrow R^4 \xrightarrow{f} R \rightarrow R/J_n \rightarrow 0$$

をもつことがわかる。よって

$$\mathcal{U}_R(\ker f) = n$$

で, 従って

$$\mathcal{U}_R(H_1(f_n, g_n, h_n, \ell_n; R)) \leq n-6$$

(但し $J_n = (f_n, g_n, h_n, \ell_n) \subsetneq \cdot$). よって $\mathcal{U}(R) = \infty$ //

命題(2.4). A は, $\text{depth } A \geq 2$ であつ $H_m^2(A)$ が有限生成であると仮定せよ。 a, b, c は A の $\mathbb{P}^3$ -タ-系で $(a, b) \cdot H_m^2(A) = (0)$ であるとする。 n を $\mathbb{Z}$ の $n \geq 2$ についで,

$$(a^n, b^n, c^n) : (abc)^{n-1} = [(a, c) : b] + [(b, c) : a] + [(a, b) : c]^{n-1}$$

証明. まず

$$\textcircled{1} \quad (a^l, b^m) : c^n = (a^l) + b^{m-1} [(a^l, b) : c^n] \quad (l, m, n > 0)$$

を示す。 f は左 $\mathbb{Z}$ の元とて, $c^n f = a^l g + b^m h$ とかくて,

$h \in (a^l, c^n) : b^m$ である。 b の逆元はない, $(a, c^n) : b^m = (a, c^n) : b$ だから, $bh = a^l x + c^n y$ とかく。 よつて $c^n(f - b^{m-1}y) \in (a^l)$ 。 従つて $f - b^{m-1}y \in (a^l)$ 。

すなわち $f \in (a^l) + b^{m-1} [(a^l, b) : c^n]$

$$\textcircled{2} \quad (a^l, b^m) : c^n = (a^l, b^m) + a^{l-1} b^{m-1} [(a, b) : c^n]$$

これは, a, b の対称性より, $\textcircled{1}$ に従ふ。

さて $f \in A$ と $(abc)^{n-1} f = a^n x + b^n y + c^n z$ とかくておこす。 すると $(ab)^{n-1} [f - cz] \in (a^n, b^n) : c^{n-1}$

だから, $\textcircled{2}$ より $(ab)^{n-1} [f - cz] \in (a^n, b^n) + (ab)^{n-1} [(a, b) : c^{n-1}]$

よつて $g \in (a, b) : c^{n-1}$ とて $(ab)^{n-1} (f - g) \in (a^n, b^n) + (c)$

とできる。 A/cA 上では, $(\bar{a}^n, \bar{b}^n) : (\bar{a}\bar{b})^{n-1} = [(\bar{a}) : \bar{b}] + [(\bar{b}) : \bar{a}]$

であることは、比較的容易に確かめられるので、

$$f \in [(a, c): b] + [(b, c): a] + [(a, b): c^{n-1}].$$

系 (2.5)^{*} (2.4) の状況下で、

$$(abc)^{n-1} \notin (a^n, b^n, c^n) \quad (n > 0).$$

定理 (1.1) の証明

(2) $\Rightarrow$ (1) $f: A^n \rightarrow A$ を A -加群の射とすれば、仮定により $\bigcup_{A_m} (\ker(A_m \otimes_A f)) \subseteq s(n)$ がすべての $\mathcal{U} \in \text{Max} A$ について正しい。但し

$$s(n) = \sup_{\mathcal{U} \in \text{Max} A} \mathcal{J}_{A_m}(n).$$

よって [2] の Satz 2 によれば、 $\bigcup_A (\ker f) \subseteq s(n) + 2$.

(1) $\Rightarrow$ (2) (2.1) より 後半をうる。一方でもし $\dim A \geq 3$ であれば、(2.1) より $\dim A = 3$ であり、 A は局所として反例があるはずである。 $\mathcal{U}$ を A の

* (1.1) の証明に必要なのは (2.5) のみである。この事実は、Direct summand conjecture の研究に従事したことの
ある人にはよく知られていることであるらしい (吉野)。

極大イデアルとせよ。もし $\hat{A}$ が体を含むなら, k を $\hat{A}$ の係数体とし, x, y, z を $\hat{A}$ のプロキター系とて

$$R = k[x, y, z] \subset \hat{A}$$

を考えると, R は $\hat{A}$ の直和因子である ([4]).

よて $s(A) = \infty$ が (2.3) に従う。故に $\hat{A}$ は体をも含まない。

$\mathfrak{p} = \text{ch } A_{\mathfrak{m}}$ とおき $0 \neq \mathfrak{p} \in \mathcal{U}$ に注目せよ。

(2.2) によれば, $A/\mathfrak{p}A$ も一樣連接だから, 上の結果より $\dim A/\mathfrak{p}A \leq 2$. $\mathfrak{p}$ は $\hat{A}$ の素イデアルと, $\dim \hat{A}/\mathfrak{p} = 3$ にとて, B により $\hat{A}/\mathfrak{p}$ の正規化をあらわせば, B は (2.4) の仮定をみたすので, A のプロキター系 p, x, y をとてこれが B 内で x, y につれて (2.4) の仮定をみたす様になる。 W を $\hat{A}$ の係数環とて $R = W[x, y] \subset \hat{A}$ とおくと, R は B に対しては, (2.5) と [4] の主定理より, 直和因子である。故に $R \not\subset \hat{A}$. 従って (2.3) より $s(A) = \infty$. すなわち A は一樣連接でない (矛盾). //

系(2.6). A は regular とせよ。このとき,
 A が一樣連接である $\iff \dim A \leq 2$.

証明. $\Rightarrow$ は (1.1) による。 $\Leftarrow$ は, Soublin [8] に示されている。 //

系 (1.2) の証明

A が semi-local のときは (1.1) そのもの。 A は体 k 上の有限生成代数とする。 $d = \dim A$ とおくと, 正規化定理より, $x_1, \dots, x_d \in A$ をとて, A は多項式環 $R = k[x_1, \dots, x_d]$ 上 k -加群として有限生成にできる。 (2.2) によれば, A が一様連接であることは, R が一様連接であることは, 同値であって (2.6) によれば 後者は $d \leq 2$ と同値である。 //

3. 例.

k を代数閉体とせよ。 すると Noether 整域 A を, k を含むようにつくり, その上次の性質をもつ様にする。

① A は可算無限個の極大イデアル $\{\mathfrak{m}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ をもつ。

② $\dim A_{\mathfrak{m}_n} = 2 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$.

③ すべての $n \in \mathbb{N}$ について A -加群の射 $f_n: A^2 \rightarrow A$ が存在して,

$$V_A(\ker f_n) = V_{A_n}(\ker(A_n \otimes_A f_n)) = n+1$$

 となっている。

この例によつて我々は (1.1) の条件 (2) の後半が、
 一般には、不可欠であることも知る。

構成 α による

$n \in \mathbb{N}$ とすると 多項式環 $S = k[x_1, x_2, x_3, x_4]$
 内に 齊次素イデール p_n をおいて、 $\dim S/p_n = 2$ と、

$$H_M^1(S/p_n) = k^n(3-5n)$$

(但し $M = S_+$) とできる。 $R_n = S/p_n$ と

おき x_n, y_n を R_n の 一次の $\mathbb{P}^1$ - x - y -系と

$$g_n: R_n^2 \longrightarrow R_n$$

を $g_n\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = ax_n + by_n$ で定めると、

$$V_{R_n}(\ker g_n) = n+1$$

となる。 $Q_n = (R_n)_+$ とおき、

$$B = \bigotimes_{n=1}^{\infty} R_n$$

とせよ。 $A = T^{-1}B$ ($T = B \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n B$)

とおけば、 $\{f_n = A \otimes_{R_n} g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ と共に

収束した性質をもつことがたしかめられる。

//

References

- [1] D. Buchsbaum and D. Eisenbud, Algebra structures for finite free resolutions and some structure theorems for ideals of codimension 3, Amer. J. Math. 99 (1977), 447-485.
- [2] O. Forster, Über die Anzahl der Erzeugenden eines Ideals in einem Noetherschen Ring, Math. Z. 84 (1964), 80-87.
- [3] T. H. Gulliksen, Tout idéal premier d'un anneau noethérien est associé à un idéal engendré par trois éléments, C. R. Acad. Sc. Paris, 271 (1970), 1206-1207.
- [4] M. Hochster, Contracted ideals from integral extensions of regular rings, Nagoya Math. J. 51 (1973), 25-43.
- [5] E. Kunz, Almost complete intersections are not Gorenstein rings, J. Algebra, 28 (1974), 111-115.
- [6] Y. Quentel, Sur l'uniforme cohérence des anneaux noethériens, C. R. Acad. Sc. Paris, 275 (1962), 753-755.
- [7] J. Sally, Numbers of generators of ideals in local rings, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics 35, Marcel Dekker.
- [8] J.-P. Soublin, Anneaux et modules cohérents, J. Algebra, 15 (1970), 455-472.