

二部グラフの最長初等道と

最長初等閉路について

都留文科大学

植村 憲治

1 はじめに

$G(V, E) = B(n, n)$ を各々の部分が n 頂点をもつ二部グラフとする。 V の全ての頂点の次数が $n/2$ より大きい時には G がハミルトン閉路を持つ事は容易に示される [1]。

本稿では頂点の次数が $n/2$ 以上の時最長初等道, 最長初等閉路の長さについて述べ, 又ハミルトン道, ハミルトン閉路が存在するための必要十分条件を示す。

2 ハミルトン道を持つための必要十分条件

n が奇数の時には [1] に帰着するので今後 $G(V, E) = B(2n, 2n)$ とする。又 $V = X \cup Y$, $X \cap Y = \emptyset$, G の全ての辺は X の頂点と Y の頂点を結ぶものとする。断るな限り G の各頂点の次数は n 以上とする。

[補題 1] $B(2n, 2n)$ の最長初等道の長さは $2n-1$ 以上である。 証明はあきらかゆえ省略。

[補題2] $B(2n, 2n)$ の長さ $2l$ の初等道に対して長さ $2l+1$ 以上の初等道が存在する。

証明 $x_1 y_1 x_2 y_2 \cdots x_l y_l x_{l+1}$ が長さ $2l$ の初等道とする ($x_i \in X, y_i \in Y$)。もし $x_l y_{l+1}, x_{l+1} y_{l+1}$ のどちらかが G の辺であれば、補題は成り立つ。よってこれらは E の元でないとしてよい。この時添字が $\{2, 3, \dots, l, l+2, \dots, 2n\}$ のどれかである n 個以上の x_i が y_{l+1} と辺を成している。一方 $x_{l+1} y_i$ ($i \geq l+1$) が辺の時も補題が成り立つ。よって ($x_{l+1} y_i$ が辺となる場合を考えて) 添字が $\{2, 3, \dots, l\}$ のどれかである $n-1$ 個の y_i と x_{l+1} が辺を成している。よって $x_{l+1} y_m, x_{m+1} y_{l+1} \in E$ となる数 m ($m < l$) が存在する。この時 $y_{l+1} x_{m+1} y_{m+1} \cdots x_l y_l x_{l+1} y_m x_m y_{m-1} x_{m-1} \cdots y_1 x_1$ は長さ $2l+1$ の初等道である。記終。

この補題より $B(2n, 2n)$ の最長初等道の長さは奇数であることがわかる。

[補題3] $P = x_1 y_1 x_2 y_2 \cdots x_l y_l$ ($n \leq l \leq 2n-1$) が $B(2n, 2n)$ の最長初等道であれば長さ $2l$ の初等閉路が存在する。

証明 P が最長であるから x_i は $Y - \{y_1, \dots, y_l\}$ の元とは隣接していない。即ち x_i は $\{y_1, \dots, y_l\}$ の少なくとも n 個の元と隣接している。同じことが y_i についても言えて y_i は $\{x_1, \dots, x_l\}$ の少なくとも n 個の元と隣接している。 $l \leq 2n-1$ より

$x_1, y_m, x_m, y_\ell \in E$ となる数 m が存在する。

この時 $x_1, y_1, \dots, y_{m-1}, x_m, y_\ell, x_\ell, y_{\ell-1}, x_{\ell-1}, \dots, y_{m+1}, x_{m+1}, y_m$ は長さ 2ℓ の初等閉路である。

[補題4] $x_1, y_1, x_2, \dots, x_\ell, y_\ell$ ($n < \ell \leq 2n-1$) が $B(2n, 2n)$ の初等閉路であれば長さ $2\ell+1$ の初等道が存在する。

証明 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_\ell\}$, $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_\ell\}$ とする。

$x \in X - X'$ の時 $\ell > n$ より x は Y' の元と隣接している。

即ち $xy_i \in E$ for some $y_i \in Y'$. この時 $xy_i, x_{i+1}, \dots, x_\ell, y_\ell, x_1, y_1, \dots, x_i$ は長さ 2ℓ の初等道となり, 補題2より長さ $2\ell+1$ の初等道が存在する。

補題3, 4より次の定理が導かれる。

[定理1] $B(2n, 2n)$ が各頂点の次数が n 以上の二部グラフとする。この時最長初等道の長さは $2n-1$ 又は $4n-1$ (ハミルトン道) であり, 最長初等閉路の長さは, $2n$, $4n-2$, 又は $4n$ (ハミルトン閉路) である。

簡単な事実として $G = B(2n, 2n)$ が連結でないのは $G = K_{n,n} \cup K_{n,n}$ の時だけである事が連結成分にふくまれる頂点の数を考えれば分る。

この事より次の定理が得られる。

[定理2] $B(2n, 2n)$ が各頂点の次数が n 以上の二部グラフとする。この時ハミルトン道を持つための必要十分

条件は $B(2n, 2n)$ が $K_{n,n} \cup K_{n,n}$ に同型でない事である。

証明 必要性は明らか。十分性を調べるのに

$B(2n, 2n)$ の最長初等閉路の長さが $2n$ の時を考えればよい。

$K_{n,n} \cup K_{n,n}$ に同型でない事より連結であり、最長初等閉路の外の頂点と隣接する閉路内の点がある。即ち長さ $2n$ 以上の初等道があり、定理1より最長初等道の長さは $4n-1$ となる。

【系1】 $B(2n, 2n)$ がハミルトン道を持つ必要十分条件は連結である事である。

3 ハミルトン閉路を持つための必要十分条件

【補題5】 $P = x_1 y_1 x_2 y_2 \cdots x_{2n} y_{2n}$, $P' = x'_1 y'_1 x'_2 y'_2 \cdots x'_{2n} y'_{2n}$ が $B(2n, 2n)$ の2つのハミルトン道とする。 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ の元が $\{y_{n+1}, y_{n+2}, \dots, y_{2n}\}$ の元と隣接していないなら

$\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \{x'_1, x'_2, \dots, x'_n\}$ である。

証明 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ の元は $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ の元としか隣接していないから、 P' の中に表われる x_i ($1 \leq i \leq n$) に対してその直前の元も直後の元も $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ の元になる。よって $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \{x'_1, x'_2, \dots, x'_n\}$

【定理3】 $P = x_1 y_1 x_2 y_2 \cdots x_{2n} y_{2n}$ が $G = B(2n, 2n)$ ($n \geq 3$) のハミルトン道とする。 $B(2n, 2n)$ がハミルトン閉路をもつための必要十分条件は $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ の元のうちで $\{y_{n+1}, y_{n+2}, \dots, y_{2n}\}$ と隣接しているものが存在する事である。

証明 必要性. 対偶を示す. $P' = x'_1 y'_1 x'_2 y'_2 \cdots x'_{2n} y'_{2n}$ をハミルトン道とする. 補題5より $\{x'_1, \dots, x'_n\} = \{x_1, \dots, x_n\}$ $\{y'_{n+1}, \dots, y'_{2n}\} = \{y_{n+1}, \dots, y_{2n}\}$. よって $x'_1 y'_{2n}$ は辺でない. 即ちハミルトン閉路は存在しない.

十分性 x_i が $\{y_{n+1}, y_{n+2}, \dots, y_{2n}\}$ のどの元とも隣接していないと、 x_i ($2 \leq i \leq n$) がそれらのどれかと隣接しているとする. この時 $x_i y_{i-1} x_{i-1} \cdots y_1 x_1 y_i x_{i+1} y_{i+1} \cdots x_{2n} y_{2n}$ を又ハミルトン道にする. よって x_i が $\{y_{n+1}, y_{n+2}, \dots, y_{2n}\}$ のどれかと隣接しているとしてよい. 同様に y_{2n} が $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ のどれかと隣接しているとしてよい. $x_1 y_1, x_n y_{2n}$ が辺となるものが存在する時は $x_n y_{n-1} x_{n-1} \cdots y_1 x_1 y_n x_{n+1} y_{n+1} \cdots x_{2n} y_{2n}$ がハミルトン閉路となる. よってすべての i ($1 \leq i \leq 2n$) に対して $x_i y_i \in E$ か $x_i y_{2n} \in E$ のどちらか一つのみがかならず成り立つとしてよい. $x_1 y_n \in E, x_n y_{2n} \in E, n \geq n+1, n \leq n$ をみたす n, n が存在することより, $x_1 y_{j+1} \in E, x_j y_{2n} \in E$ をみたす数 j が存在する. この時 $C = x_1 y_1 x_2 y_2 \cdots x_j y_{2n} x_{2n} y_{2n-1} x_{2n-1} \cdots y_{j+2} x_{j+2} y_{j+1}$ は長さ $4n-2$ の初等閉路であり, これに含まれる二点 y_j, x_{j+1} は隣接している. y_j と隣接している C の頂点のうちで C における直前, 又は直後の頂点 x_{j+1} と隣接しているものが存在する時にはハミルトン閉路が存在する. そうでない時にこの点に留意して番号を付け直す.

$$C = x'_2 y'_2 x'_3 y'_3 \cdots x'_{2n} y'_{2n} \quad x'_i y'_i \in E \quad 1 \leq i \leq n-1, \quad x'_i y'_i \in E$$

$n+1 \leq i \leq 2n$ ここで x'_3 の代りに x'_1 を用いて C と同様の閉

路ができ, $x'_3 y'_1 \notin E$ より, 閉路に含まれない2点 x'_3, y'_1 は

辺になっていない. よってこの2点と隣接する点の中には互

いに隣接するものが存在する. 以上によりさらに番号を付け

直す. $C' = y''_1 x''_2 y''_2 \cdots x''_{2n-1} y''_{2n-1} x''_{2n} \quad x''_1 y''_1 \in E$

$x''_{2n} y''_{2n} \in E$. よって $x''_1 y''_1 \cdots x''_{2n} y''_{2n}$ は初等道であり,

補題5より $\{x''_1, x''_2, \dots, x''_n\} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

$\{y''_{n+1}, y''_{n+2}, \dots, y''_{2n}\} = \{y_{n+1}, y_{n+2}, \dots, y_{2n}\}$.

よって $x''_i y''_i \in E$ とする $1 \leq i \leq n, n+1 \leq i \leq 2n-1$ が存在

し, この証明の最初の部分と同様にして $x''_i y''_i \in E$ としてよ

い. 同様に $y''_{2n} x''_n \in E$ とする $2 \leq n \leq n$ が存在するとしてよ

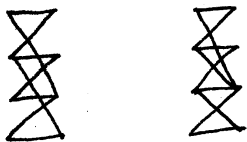
い. 又 n をその様な最小の数とすると $x''_n y''_{n-1} \in E$ であり,

n をその様な最大の数とすると $x''_{n+1} y''_{2n} \in E$ である. この時

$x''_1 y''_1 x''_2 y''_2 \cdots x''_{n-1} y''_{n-1} y''_n x''_n y''_{2n} x''_{n+1} y''_{n+1} \cdots x''_{2n} y''_{2n} x''_1 y''_1$

はハミルトン閉路となっている.

注 $n=2$ の時には次の様な例外がある



定理4 $P = x_1y_1, x_2y_2, \dots, x_{2n}y_{2n}$ が $B(2n, 2n)$ のハミルトン道とする。最長初等閉路の長さが $4n-2$ であるための必要十分条件は、定理3の条件を満たさず、かつ $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ と $\{x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{2n}\}$ の間の辺で独立な2本の辺が存在することである。

証明。必要性は明らか。十分性。定理3の条件を満たさないか？ y_i ($1 \leq i \leq n$) はすべての x_j ($1 \leq j \leq n$) に隣接しており、又 x_k ($n+1 \leq k \leq 2n$) はすべての y_k ($n+1 \leq k \leq 2n$) に隣接しており、これより容易にわかる。

文献

[1] J. Moon & L. Moser, On Hamiltonian bipartite graphs.

Israel J. Math. 1. (1963) p/63-65.