

乱流中の渦構造の形成に関する粘性散逸のはたらき

京大数理研 大木谷 耕司 (Koji Ohkitani)

Research Institute for Mathematical Sciences,

Kyoto University

I. はじめに

Navier-Stokes 方程式に従う乱流に渦構造が出現することは数値実験などによってよく知られている。そして、これらの構造を数値計算データから抽出し、同定する有用な方法も種々提案されている ([1] およびその引用文献を参照)。この研究のねらいは、基礎方程式の性質に忠実な形で渦構造の特徴づけの基礎を与えることである。渦構造の出現には Navier-Stokes 方程式の下での有限時間発展が重要であることを基本方針とする。その上で、ここでは特に基礎方程式の渦伸長項および粘性拡散項のバランスに注目する。本稿の目的は、このバランスを定量的に評価する方法を提案すること、そしてそれを実際の数値計算データに適用することである。

II. 基礎方程式

非圧縮性流体に対する Navier-Stokes 方程式

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \nu \Delta \mathbf{u}, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

は渦度を用いると

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nu \Delta \boldsymbol{\omega} \quad (3)$$

と書ける。ここで

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \quad (4)$$

は物質微分である。(3) の右辺には、渦伸長項と粘性拡散項の 2 つの項がある。乱流中でこれらの項は何らかの意味で釣り合っていると期待されるが、物理空間におけるバランスを定量的に評価することは簡単なことではない。

III. CAUCHY 則とその拡張

A. 完全流体

非粘性流体の場合、良く知られている様に渦線は物質的である。このことを最も端的に表現するのが Cauchy によって得られた第一積分

$$\omega(\mathbf{a}, t) = \omega(\mathbf{a}, 0) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} \mathbf{x}(\mathbf{a}, t) \quad (5)$$

である。ここで $\mathbf{x}(\mathbf{a}, t)$ は流体粒子 $\mathbf{a}$ の位置を表す。これを Cauchy 則と呼ぶ。次に拡張を考えるので、ここで渦線が物質的であることを復習しておく [2]。 $t = 0$ で、 s を弧長として線要素 $d\mathbf{a}$ が

$$d\mathbf{a} = \omega(\mathbf{a}, 0) ds$$

であるとする、これは時刻 t では

$$d\mathbf{x} = d\mathbf{a} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} \mathbf{x} = \omega(\mathbf{a}, 0) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} \mathbf{x}$$

に発展する。これは Cauchy 則から

$$= \omega(\mathbf{a}, t) ds$$

と書くことができ、確かに渦度に接している。

B. 粘性流体

上の第一積分は粘性がある場合には無効になる。しかし、粘性がある場合にも Cauchy 則を拡張する試みがある。Cârstoiu による拡張は

$$\omega_i(\mathbf{a}, t) = \left(\omega_j(\mathbf{a}, 0) + \int_0^t D_j(\mathbf{a}, t') dt' \right) \frac{\partial x_i(\mathbf{a}, t)}{\partial a_j}, \quad (6)$$

ただし、

$$D_i(\mathbf{a}, t) = \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \nu \Delta \omega_j \quad (7)$$

である [3]。この公式は Truesdell によって、次の様により一般的に書き換えられている [4]。
([5,6] も参照のこと。)

$$\omega(\mathbf{a}, t) = \left[\omega(\mathbf{a}, 0) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} \times \underbrace{\left(\frac{D^2 \mathbf{x}(\mathbf{a}, t')}{Dt'^2} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{a}, t')}{\partial \mathbf{a}} \right)}_{\equiv \mathbf{D}(\mathbf{a}, t')} dt' \right] \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} \mathbf{x}(\mathbf{a}, t) \quad (8)$$

ただし、 $\mathbf{D}$ に対応する括弧内のスカラー積は $\mathbf{x}(\mathbf{a}, t')$ の添字についての縮約を表す。Euler 方程式（その右辺が圧力勾配のみ）の場合、(8) の $\mathbf{D}$ がゼロになることはすぐに分かる。また、この公式は粘性拡散項以外のどのような外力項があっても成立するという特徴を持つ。なお、(8) の $\mathbf{D}$ は以下の様に変換できる。

$$D_i(\mathbf{a}, t) = \epsilon_{jkl} \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{D^2 x_l(\mathbf{a}, t)}{Dt^2} \quad (9)$$

よって Navier-Stokes 方程式の場合 (6) に帰着することが見て取れる。以上にあげた公式は見かけはやや複雑だが、考え方をフォローすることはたやすい。便宜上、これらの公式の導出を付録につける。

IV. 数値計算法

(6) の右辺の第 1 項、第 2 項はそれぞれ、渦伸長項、粘性拡散項からの寄与を表すので、各々を ω_s, ω_v とおくと

$$\omega = \omega_s + \omega_v \quad (10)$$

という渦度の分解ができる。ここで、

$$\omega_s(\mathbf{a}, t) = \omega(\mathbf{a}, 0) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} \mathbf{x}(\mathbf{a}, t), \quad (11)$$

$$\omega_v(\mathbf{a}, t) = \int_0^t \mathbf{D}(\mathbf{a}, t') dt' \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} \mathbf{x}(\mathbf{a}, t) \quad (12)$$

である。伸長項からの寄与は通常の Cauchy 則と同様にその瞬間の Jacobi 行列のみで表せるが、粘性項からの寄与は流体粒子の軌道（つまり履歴）に依存する。Cauchy 公式の粘性流体への拡張は一意的には決まらないが [9]、和の形での拡張はここにあげたものしかない。(6) の形のまま数値計算に適用するのは、粒子の追跡、粒子のラベルを固定した時間積分などが必要で不便である。そこで、上に述べた考え方に従ってより簡単に ω_s, ω_v を数値計算によって評価する方法を考える。

$t = 0$ で

$$d\mathbf{a} = \omega(\mathbf{a}, 0) ds$$

ならば、時刻 t では

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} &= d\mathbf{a} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} \mathbf{x} = \omega(\mathbf{a}, 0) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} \mathbf{x} ds \\ &= \left(\underbrace{\omega(\mathbf{a}, t) - \int_0^t \mathbf{D} dt' \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} \mathbf{x}(\mathbf{a}, t)}_{= \omega_s(\mathbf{a}, t)} \right) ds \end{aligned}$$

と書くことができる。最後の括弧の部分が ω_s に等しいことから、これが物質的であること、つまり線要素の方程式

$$\frac{\partial \omega_s}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega_s = \omega_s \cdot \nabla \mathbf{u} \quad (13)$$

に従うことがわかる。よって ω_s と ω の初期条件を同じ $\omega_s(\mathbf{x}, t=0) = \omega(\mathbf{x}, t=0)$ にして渦度方程式 (3) と (13) を連立して解くことによって ω_s は計算できる。また

$$\omega_v = \omega - \omega_s$$

から、 ω_v も求めることができる。

なお、粘性項からの寄与を表す ω_v の時間発展は

$$\frac{\partial \omega_v}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega_v = \omega_v \cdot \nabla \mathbf{u} + \nu \Delta (\omega_s + \omega_v) \quad (14)$$

に従う。(13) は粘性拡散項を持たないため、数値計算の際、その精度に注意が必要である。このことに注意すれば、通常の擬スペクトル法の範疇で拡張 Cauchy 則の適用が可能になる。

V. BURGERS 渦

数値計算データに適用する前に、Navier-Stokes 方程式の厳密な解である Burgers 渦に対してこの分解を適用してみる。Burgers 渦とは、一様なストレイン $\alpha(>0)$ をもつ平均流によって駆動される解 $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})$ であり、

$$\tilde{u} = -\alpha x + u(x, y, t), \quad \tilde{v} = -\alpha y + v(x, y, t), \quad \tilde{w} = 2\alpha z$$

という形をしている。対応するスカラー渦度は

$$\omega(x, y, t) = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

である。 u, v に軸対称性を仮定し、空間座標は $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ のみに依存するとする。このとき、変数変換

$$\Omega \equiv \omega \exp(-2\alpha t), \quad R \equiv r \exp(\alpha t), \quad T \equiv \frac{\exp(2\alpha t) - 1}{2\alpha}$$

によって Navier-Stokes 方程式は拡散方程式

$$\frac{\partial \Omega}{\partial T} = \nu \Delta \Omega$$

に帰着する (例えば [7])。従って、元の変数では解は

$$\omega(r, t) = \exp(2\alpha t) \Omega \left(\exp(\alpha t) r, \frac{\exp(2\alpha t) - 1}{2\alpha} \right)$$

となり、 $t \rightarrow \infty$ のとき

$$\omega(r, t) \rightarrow \frac{\alpha \Gamma}{2\pi\nu} \exp\left(-\frac{\alpha r^2}{2\nu}\right),$$

に漸近する。ただし

$$\Gamma = 2\pi \int_0^\infty \omega_0(r) r dr$$

は循環である。以下では $\omega_0(r) > 0$ の場合のみを考える。 $\omega_s(r, t)$ の時間発展も、上の計算で $\nu = 0$ 、 ω を ω_s として同様に計算することができる。その結果は

$$\omega_s(r, t) = \exp(2\alpha t) \omega_0(\exp(\alpha t) r)$$

で、これは $t \rightarrow \infty$ のとき

$$\omega_s(r, t) \rightarrow \Gamma \delta(r)$$

となる。つまり ω_s は渦糸に漸近する。このとき、分解 $\omega = \omega_s + \omega_v$ において、十分に時間が経つと

$$\langle \omega_s \omega_v \rangle \approx -\langle \omega_s^2 \rangle, \quad \langle \omega_v^2 \rangle \approx \langle \omega_s^2 \rangle$$

となることから両者の相関係数は長時間経つと

$$\frac{\langle \omega_s \omega_v \rangle}{\sqrt{\langle \omega_s^2 \rangle \langle \omega_v^2 \rangle}} \approx -1$$

となる。つまり、Burgers 渦の場合、両成分の間に強い負の相関が生じること、言い換えると、絶対値の大きな両者の差としての高渦度領域 (Burgers 渦) が形成されることが分かる。このような見方が一般の乱流でも有効かどうかを調べるため数値計算を行う。

VI. 数値計算結果

標準的な擬スペクトル法を用いて倍精度の数値計算を行う。アライアス誤差はいわゆる $2/3$ 則で除去したので格子点 N^3 の計算の有効モード数は $(2N/3)^3$ となる。時間発展は 4 次の Runge-Kutta 法で行い、典型的な時間ステップは $\Delta t = 10^{-3}$ である。数値計算の精度の確認するため、格子点数は $N = 128, 256$ を用いている。ここではもっぱら $N = 128$ の計算を用いて結果を説明する。

初期条件としては、文献 [8] で渦のつなぎ替えの研究に用いられた、90 度の角度で交差する 2 本の渦管、ならびに滑らかな random initial condition を用いた。ここでは、前者を中心に説明する。

Fig.1a および b にエネルギーおよびエネルギー散逸率の時間発展を示す。後者は $t = 8$ あたりで最大値をもち、エネルギーは初期の半分以下に減衰している。当然ながら、これは文献 [8] による結果と同じ傾向を示している。渦度のつなぎ替えについての普通の解析結果に関してはこの論文を参照されたい。

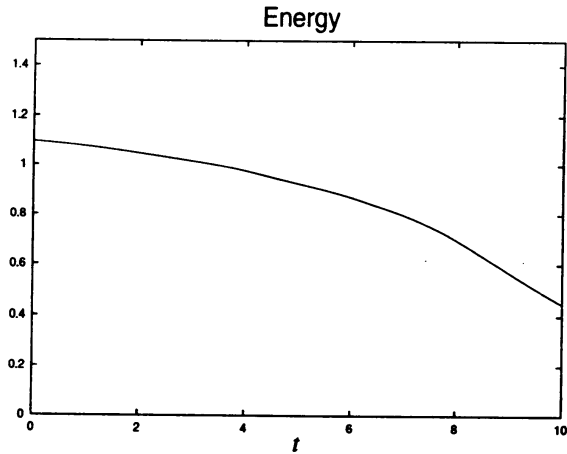


Fig.1a : Time evolution of total energy $\langle |u|^2 \rangle / 2$.

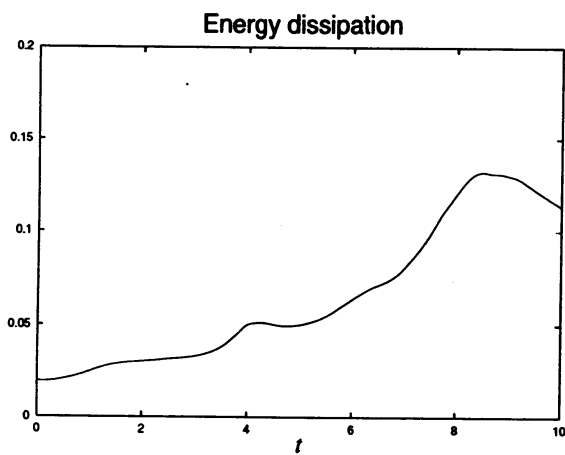


Fig.1b : Time evolution of total energy dissipation rate $\nu \langle |\omega| \rangle / 2$.

次に各成分のエネルギースペクトル $E(k)$ の時間発展を検討する。Fig.2a には $t = 2$ における ω (実線)、 ω_s (破線)、 ω_v (点線) に対応するエネルギースペクトルを示す。低い波数領域で ω に比べて ω_v の成分の大きさが小さいことが見てとれる。予想されたように ω_s のスペクトルは高い波数領域での収束が他の成分と比較して良くないことが分かる。実際、Fig.2b に示した $t = 4$ のスペクトルでは、高い波数領域は十分には解像されていない。そこで、以下では ω_s の考察については $t \leq 3$ の時間帯に限ることとする。

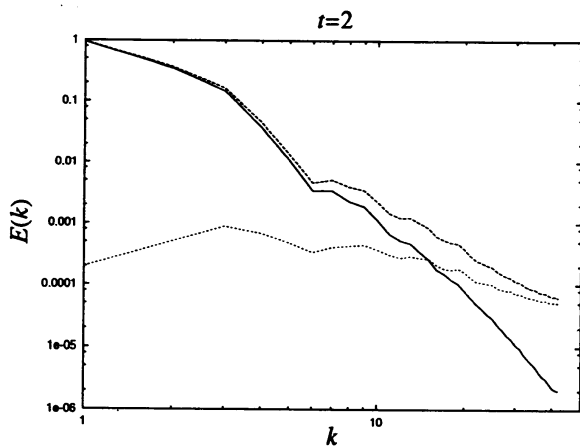


Fig.2a : Energy spectra $E(k)$ at $t = 2$ for ω (solid), ω_s (dashed) and ω_v (dotted).

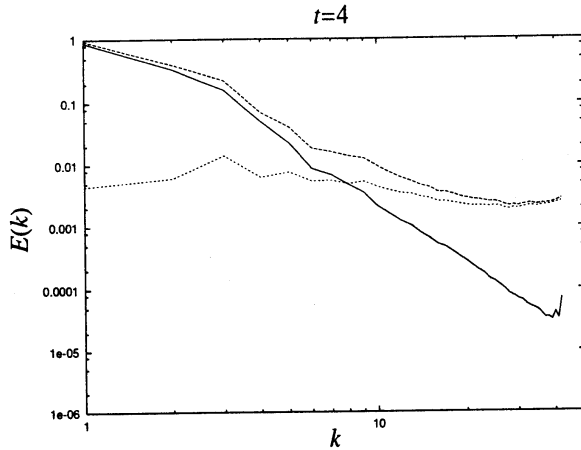


Fig.2b : Similar plots of energy spectra

 $E(k)$ at $t = 4$.

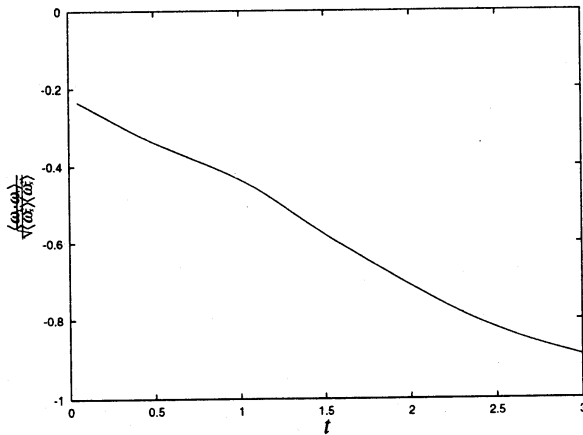
エンストロフィーの分解は、(10) から

$$\langle |\omega|^2 \rangle = \langle |\omega_s|^2 \rangle + 2 \langle \omega_s \cdot \omega_v \rangle + \langle |\omega_v|^2 \rangle \quad (15)$$

となる。ここで括弧は空間平均である。従って一般の Navier-Stokes 方程式でも (10) における渦度の伸長と粘性拡散のバランスに興味がある。Navier-Stokes の方程式のエンストロフィーが対応する Euler 方程式のそれに比べておとなしい振る舞いをするのはこのためである。この正則化の過程を調べるため、両成分の（規格化された）相関係数

$$\frac{\langle \omega_s \cdot \omega_v \rangle}{\sqrt{\langle |\omega_s|^2 \rangle \langle |\omega_v|^2 \rangle}} \quad (16)$$

を計算した。Fig.3 にその時間発展を示す。

Fig.3 : Normalized correlation coefficient
between ω_s and ω_v .

この初期条件の場合、計算精度が良好な時間帯でこれらは負の相関を持ち、それが時間とともに強くなる。このような傾向はこの初期条件のみならずランダムな初期条件でも観察されている（図省略）。

(16) から、 $\langle |\omega|^2 \rangle$ は $\langle |\omega_s|^2 \rangle$ や $\langle |\omega_v|^2 \rangle$ に比べて小さくなるのだが、それをはっきり見るため Fig.4a に $\frac{\langle |\omega_s|^2 \rangle}{\langle |\omega|^2 \rangle}$, $\frac{\langle |\omega_v|^2 \rangle}{\langle |\omega|^2 \rangle}$ を、また Fig.4b に $\frac{\langle |\omega_v|^2 \rangle}{\langle |\omega_s|^2 \rangle}$ を示した。また定義から、 $t=0$ で $\langle |\omega_v|^2 \rangle = 0$ である。

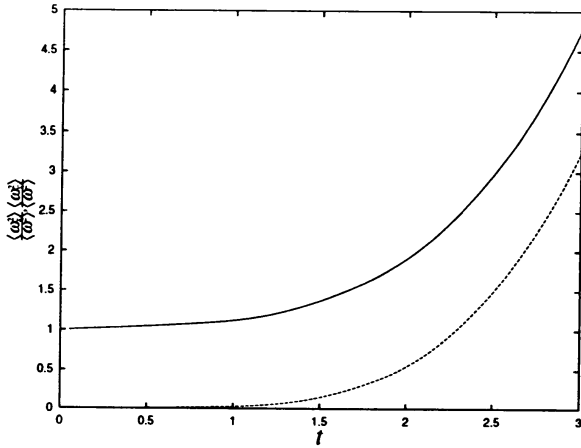


Fig.4a : Time evolution of the ratios $\frac{\langle |\omega_s|^2 \rangle}{\langle |\omega|^2 \rangle}$ (solid), and $\frac{\langle |\omega_v|^2 \rangle}{\langle |\omega|^2 \rangle}$ (dashed).

Fig.4.a から $t = 3$ で、2 乗平均の意味で ω_s は ω の約 5 倍、 ω_v は ω の約 3 倍にもなる。同じことだが、Fig.4.b から $t = 3$ では 2 乗平均の意味で ω_s と ω_v の比はおよそ 0.7 である。さらに時間が経った時、Burgers 渦の場合と同じように、これが 0.5 に近づくかどうかは興味がある問題である。しかし、この数値計算の精度上の問題からここではその傾向があることを認めるにとどめる。

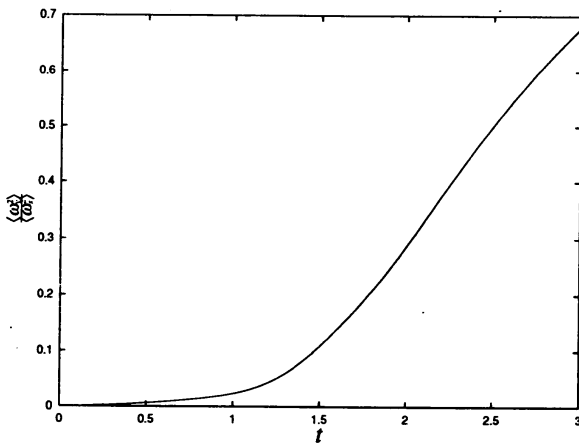


Fig.4b : Time evolution of the ratio $\frac{\langle |\omega_v|^2 \rangle}{\langle |\omega_s|^2 \rangle}$.

最後に、物理空間での渦度場の構造について簡単に触れる。Fig.5a に初期条件の渦度の大きさ $|\omega|^2$ の等値面を示す（閾値は 最大値 $|\omega|^2$ の $1/5$ ）。これはサポートがコンパクトな 2 本の直交する渦管である。Fig.5b には $t = 2$ の渦度の大きさ $|\omega|^2$, $|\omega_v|^2$ の等値面を示す（閾値は 最大値 $|\omega|^2$ の $1/10$ 、最大値 $|\omega_v|^2$ の $1/20$ ）。この時刻では $|\omega_s|$ の等値面は $|\omega|$ のものと殆んど変わらないので省略する。もとあった 2 本の渦管が互いの誘導速度で変形し、その間に細い 2 次渦が形成されてつなぎ替えの過程が始まっている。これが良く知られているブリッジ現象である。白黒の図では分かりにくいのであるが、実は $|\omega_v|^2$ はこのブリッジにおいてのみ特徴をもつことが観察される。つまり、粘性拡散の効果はブリッジ領域に卓越的に現れることを意味している。

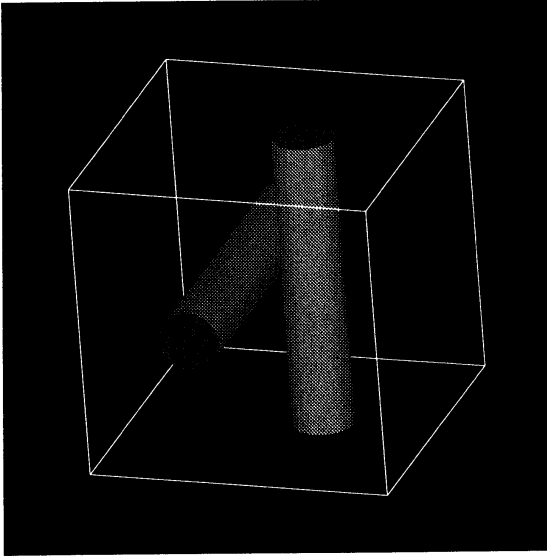


Fig.5a : Iso-vorticity surfaces of $|\omega|^2$ at $t = 0$.

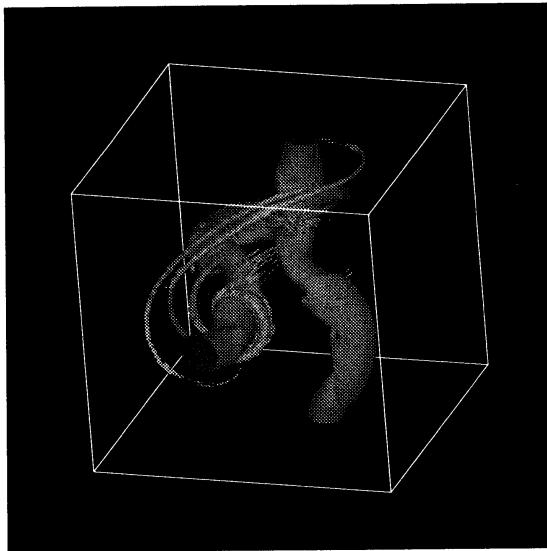


Fig.5b : Iso-vorticity surfaces of $|\omega|^2$ and $|\omega_v|^2$ at $t = 0$.

実は渦線が物質線要素からはずれる度合は、より正確には単なる $|\omega_v|^2$ ではなく

$$\left| \omega_v \times \frac{\omega}{|\omega|} \right|$$

という量によって表現される。この量の解析については他の場所に譲る。つなぎかえの指標に関しては、すでに種々の提案がなされている。たとえば、[10] では $\nu \Delta \omega|_{\perp}$ 、また [11] では $\left(\frac{\omega}{|\omega|} \cdot \nabla \right) \frac{\nu \Delta \omega|_{\perp}}{|\omega|}$ が、指標の候補としてあげられ、流れに適用されている。（ $\perp$ は渦度ベクトルとの直交成分を示す。）これらの判定基準は無限小の時間発展を考慮したものであり、拡張 Cauchy 則による基準は有限時間の時間発展に関係するため、それらの拡張になっている。

VII. まとめ

ここでは、渦度に関する拡張 Cauchy 則を用いて、渦度を伸長項からの寄与と粘性拡散項からの寄与に分解する方法を考えた。Burgers の渦でこの方法をテストしてから、実際の

数値計算にあてはめる手法を導入し、乱流の数値計算データに適用した。

2つの成分の相関を検討した結果、渦伸長と粘性拡散の balance/imbalance が高渦度領域の1つの特徴づけになり得ることを示唆する結果を得た。今後の課題としては、このバランスと渦構造との対応を詳しく調べることや、異なる初期条件、Reynolds 数依存性などを吟味することがあげられる。また、この方法の応用としては、渦のつながりかえのほか、渦構造の同定や、Navier-Stokes 方程式の解が正則性を保つ過程の特徴づけに利用することが考えられる。

ACKNOWLEDGMENTS

Burgers 渦に関して有益なコメントをいただいた 高岡正憲 氏に感謝します。

VIII. APPENDIX

まず $\frac{\partial x_i}{\partial a_k} \frac{\partial a_k}{\partial x_j} = \delta_{ij}$ を t で物質微分して Jacobian の逆行列の発展を決める方程式を準備する。

$$\frac{D}{Dt} \frac{\partial a_l}{\partial x_j} = - \frac{\partial a_l}{\partial x_i} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_j} \quad (17)$$

次に渦度方程式が粘性項ないし外力項があっても

$$\frac{D\omega_i}{Dt} = \omega_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \epsilon_{ijk} \frac{\partial \ddot{x}_k}{\partial x_j} \quad (18)$$

と書けることに注意する。その上で次の量（これは $\nu = 0$ の時ゼロとなる）を計算すると

$$\frac{D}{Dt} \left(\omega_i \frac{\partial a_l}{\partial x_i} \right) = \epsilon_{ijk} \frac{\partial \ddot{x}_k}{\partial x_j} \frac{\partial a_l}{\partial x_i} \quad (19)$$

となる。あとは時間で一度積分を行うと (9) が得られる。

最後に

$$D_i(\mathbf{a}, t) = \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial a_j} \left(\frac{D^2 x_l(\mathbf{a}, t)}{Dt^2} \frac{\partial x_l(\mathbf{a}, t)}{\partial a_k} \right) \quad (20)$$

から

$$D_i(\mathbf{a}, t) = \epsilon_{jkl} \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{D^2 x_l(\mathbf{a}, t)}{Dt^2}. \quad (21)$$

導く。(20) より

$$D_i(\mathbf{a}, t) = \epsilon_{ijk} \frac{\partial \ddot{x}_l}{\partial a_j} \frac{\partial x_l}{\partial a_k} = \epsilon_{ijk} \frac{\partial \ddot{x}_l}{\partial x_p} \frac{\partial x_p}{\partial a_j} \frac{\partial x_l}{\partial a_k} \quad (22)$$

となる。ここで、

$$\frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(a_1, a_2, a_3)} = 1$$

および

$$\epsilon_{ijk} \frac{\partial x_p}{\partial a_i} \frac{\partial x_q}{\partial a_j} \frac{\partial x_r}{\partial a_k} = \epsilon_{pqr} \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(a_1, a_2, a_3)}$$

を用いると、

$$D_i(\mathbf{a}, t) \frac{\partial x_q}{\partial a_i} = \epsilon_{qpl} \frac{\partial \ddot{x}_l}{\partial x_p} \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(a_1, a_2, a_3)} \quad (23)$$

が得られる。

REFERENCES

- [1] S. Kida & H. Miura, "Identification and analysis of vortical structures," *Eur.J. Mech.B-Fluids* **17**, 471–488(1998). and references cited therein.
- [2] J. Serrin, "Mathematical principles of classical fluid mechanics," in *Encyclopedia of Physics VIII/1*, p.125, ed. S. Flügge, (Springer Verlag, Berlin, 1959).
- [3] I. Cârstoiu, "Généralisation des formules de Helmholtz et de Cauchy pour un fluide visqueux incompressible," *C. R. Acad. Sci. Paris* **223**, 1095-96(1946).
- [4] C. Truesdell, "Généralisation de la formule de Cauchy et des théorèmes de Helmholtz au mouvement d'un milieu continu quelconque", *C. R. Acad. Sci. Paris* **227**, 757-759(1948).
- [5] C. A. Truesdell, *The Kinematics of Vorticity*, (Indiana University Press, Bloomington, 1954).
- [6] C. Truesdell & R.A. Toupin, "The Classical Field Theories," in *Encyclopedia of physics III/1*, p.380, ed. S. Flügge, (Springer Verlag, Berlin, 1960).
- [7] A. Majda, "Vorticity and the mathematical theory of incompressible fluid flow," *Commun. Pure Appl. Math.* **39**(1966)S187-220.
- [8] O.N. Boratav, R.B. Pelz & N.J. Zabusky, "Reconnection in orthogonally interacting vortex tubes: Direct numerical simulations and quantifications," *Phys. Fluids A4*(1992) 581-605.
- [9] ここで取り扱う拡張は古典的なものである。最近、Navier-Stokes 方程式の別の定式化 (Weber 変換の粘性版) を用いた別の拡張も発見された。P. Constantin, "An Eulerian-Lagrangian approach to the Navier-Stokes equations," to appear in *Commun. Math. Phys.*
- [10] S. Kida & M. Takaoka, "Breakdown of frozen motion and vorticity reconnection," *J. Phys. Soc. Jpn.* **60**(1991) 2184-96.
- [11] M. Takaoka, preprint 2000.