

On Spectral Manifolds of S -decomposable Operators

東北薬科大学 棚橋浩太郎 (Kôtarô Tanahashi)

§1 序. ヒルベルト空間上の正規作用素については, そのスペクトル分解はよく知られている。

Dunford は, この分解をバナッハ空間で考えて, spectral operator の理論をつくった。さらに Foias らは, もっとゆるやかな "分解" を考え, decomposable operator の理論をつくり, その解析を行なった。

ここでは, 更に一般化された S -decomposable operator を考えるが, まず, その由来を簡単に説明しよう。例として, ヒルベルト空間 H 上の有界自己共役作用素 T のスペクトル分解 $T = \int \lambda dE_\lambda$, $\sigma(T) \subset [a, b]$ を考える。このとき, $[a, b]$ の分割 $\Delta: a = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n = b$ に対し, $H = E(\sigma(T))H = E([\lambda_0, \lambda_1])H + E([\lambda_1, \lambda_2])H + \dots + E([\lambda_{n-1}, \lambda_n])H$ なので, $H_i = E([\lambda_{i-1}, \lambda_i])H$ とおくと,

$$(i) H = H_1 + H_2 + \cdots + H_n$$

$$(ii) \sigma(T|H_i) \subset [\lambda_{i-1}, \lambda_i] \quad i=1, 2, \dots, n$$

と T がゆるやかに "分解" されることになる。ここで各 H_i は、もちろん、 T の不変部分空間であるが、それだけではなくて、

$$\sigma(T|Y) \subset \sigma(T|H_i) \Rightarrow Y \subset H_i$$

という性質をもち (T の *spectral maximal space*) ,
また、

$$H_i = \{ x \in H \mid \exists f \text{ analytic ; } (\lambda - T)f(\lambda) \equiv x \\ \text{on } [\lambda_{i-1}, \lambda_i]^c \}$$

とも表される (T の *spectral manifold*) ことが分っている。このように、 $\sigma(T)$ の任意の "分割" に対し、(i), (ii) をみたすような T の *spectral maximal space* の族が存在するような作用素 T を、Foias は *decomposable operator* とよんで、その性質を調べたわけだが、そのなかで、次の問題を提出した ([4])。以下、特に断わらない限り、複素バナッハ空間 X 上の有界線形作用素 T を考える。

問題 Y が *decomposable operator* T の *spectral maximal space* なら、 $T|Y$ は *decomposable operator* か。

この問題は, Albrecht ([1]) が反例をつく, て, 否定的に解かれたが, しばらくた, て, Bacalu が次のような興味ある結果をだした。

定理([2]) Y が decomposable operator T の spectral maximal space なら, $T|_Y$ は $\sigma(T/Y) \cap \partial\sigma(T|_Y) \equiv S$ の部分を除いて decomposable の性質をもつ。(T は S -decomposable という。) 但, T/Y は T の X/Y への商作用素で, ∂ は境界を表す。

その後, S -decomposable operator と decomposable operator の関係が調べられ, Nagy, Bacalu, Vasilescu Erdelyi, Lang, Shengwang らによ, て,

定理([7]) 任意の T に対し, T が S -decomposable operator となるような最小の S (spectrum residuum S_α) が存在する。

定理([3]) T が S -decomposable operator で $\dim S = 0$ ならば, $S_\alpha = \emptyset$, つまり, T は decomposable operator である。

定理([8]) ヒルベルト空間上の有界作用素 T が

isometry であるが unitary ではないならば, $S_\alpha = \sigma(T) = \text{unit disc}$ である。

定理 ([9]) T が X 上の S -decomposable operator であること, 共役作用素 T' が X' 上の S -decomposable operator であることは同値である。

などの結果が得られている。ここでは、 Y が S -decomposable operator T の spectral manifold である場合に, $T|Y, T/Y, (T|Y)', (T/Y)'$ のスペクトルとその "duality" を調べ, その応用として, S -decomposable operator の特徴づけを行なう。

§2 主な結果. 以下、複素バナッハ空間 X 上の有界線形作用素 T を考える。

定義 1. T の不変部分空間 Y が T の spectral maximal space であるとは,

$$\sigma(T|Z) \subset \sigma(T|Y) \Rightarrow Z \subset Y$$

をみたすときをいう。 T の spectral maximal space の全体を $SM(T)$ と表す。

定義 2. $S \subset \sigma(T)$, S は閉集合とする。閉集合の族 $\{G_1, \dots, G_n; G_0\}$ が S -covering of $\sigma(T)$ とは,

$$(i) G_1 \cup \dots \cup G_n \cup G_0 \supset \sigma(T)$$

$$(ii) \overline{G_i} \cap S = \emptyset, \quad i=1, \dots, n.$$

をみたすときをいう。Tが *S-decomposable operator* とは、任意の *S-covering of $\sigma(T)$* $\{G_1, \dots, G_n; G_0\}$ に対し、

$$(i) X = X_1 + \dots + X_n + X_0$$

$$(ii) \sigma(T|_{X_i}) \subset G_i \quad i=0, 1, \dots, n$$

をみたすようなTの *spectral maximal space* の族 $\{X_1, \dots, X_n; X_0\}$ が存在するときをいう。

定義3. 閉集合Fに対し

$$X_T(F) = \{x \in X \mid \exists f \text{ analytic}, (\lambda - T)f(\lambda) \equiv x \text{ on } F^c\}$$

と定める。また、任意の集合Eに対し

$$X_T(E) = \bigcup \{X_T(F) \mid F \subset E, F \text{ is closed}\}$$

と定め、これらをTの *spectral manifold* という。

たとえば、Tが *spectral operator* であれば、その *spectral measure* を $E(\cdot)$ とおくと、任意の閉集合Fに対して、

$$X = E(F)X \oplus E(F^c)X = X_T(F) \oplus \overline{X_T(F^c)}$$

である。但、 $\overline{}$ は $Y \subset X$ の (強)-閉包である。また、Tが *decomposable operator* なら、

定理 ([4]) 任意の閉集合 F に対し, $X_T(F)$ は閉で, T の spectral maximal space であり, $\sigma(T|X_T(F)) \subset F$ をみたす。

定理 ([6]) 任意の閉集合 F に対して, $X_T(F^c)^\perp = X_{T'}(F)$ が成立する。

が知られてゐる。本稿の最初の結果は, この定理に対応するものであるが, S -decomposable operator では次の定理が成立することである。

定理 1. T が S -decomposable operator なら

(i) $F \supset S$, F 閉 $\Rightarrow X_T(F)$ 閉, $\in SM(T)$,

$$\overline{(F^c \setminus S) \cap \sigma(T)} \subset \sigma(T|X_T(F)) \subset F \cap \sigma(T)$$

$$\overline{\sigma(T) \setminus F} \subset \sigma(T/X_T(F)) \subset \overline{\sigma(T) \setminus F} \cup S$$

(ii) $G \supset S$, G 開 $\Rightarrow X_T(\bar{G})$ 閉, $\in SM(T)$,

$$\overline{G \cap \sigma(T)} \subset \sigma(T|X_T(\bar{G})) \subset \bar{G} \cap \sigma(T)$$

$$\sigma(T/X_T(\bar{G})) = \overline{\sigma(T) \setminus \bar{G}}$$

(iii) $F \cap S = \emptyset$, F 閉 $\Rightarrow X_T(F)$ 閉, $\in SM(T)$

$$\overline{F^c \cap \sigma(T)} \subset \sigma(T|X_T(F)) \subset F \cap \sigma(T)$$

$$\sigma(T/X_T(F)) = \overline{\sigma(T) \setminus F}$$

が成立する。(但, F^c は F の内点の集合である。)

定理2. T が S -decomposable operator で、 F が $F \cap S$ または $F \cap S = \emptyset$ をみたす閉集合ならば、
 $X_T(F')^\perp = X_{T'}(F)$ が成立する。

注. これらの結果はいずれも部分的には知られている。たとえば、定理1の(iii)については、 $\sigma(T/X_T(\bar{G})) \subset G^c$ を Shengwang と Guangyu ([9]) が、また定理2については、 $F \cap S$ の場合に Vasilescu ([10]) が証明している。このほかについても同様なので、ここでは、いちいち書かないことにする。(参照, [2], [3], [5], [7], [8], [9].)

従、て、 $Y \subset X$ に対して、

$$(X/Y)' = Y^\perp, \quad X/Y^\perp = Y', \quad \sigma(T') = \sigma(T)$$

の関係式が成立すること、定理1, 2より次の結果が成立する。

定理3. T が S -decomposable operator で、 G が $G \cap S$ または $G \cap S = \emptyset$ をみたす閉集合ならば、

$$\sigma(T| \overline{X_T(G)}) = \overline{G \cap \sigma(T)}$$

$$\overline{\sigma(T) \setminus \overline{G \cap \sigma(T)}} \subset \sigma(T/X_T(G)) \subset \sigma(T) \setminus G$$

が成立する。

従って, $X_T(\bar{G})$, $\overline{X_T(G)}$ の場合が得られたわけだが, 特にこの間にある $X_T(\overline{G \cap \sigma(T)})$ は興味ある性質をもっていて, 次の結果が得られる。

定理4. T が S decomposable operator で, G が $G \cap S$ または $\bar{G} \cap S = \emptyset$ をみたす開集合ならば, $X_T(\overline{G \cap \sigma(T)})$ は閉, $\in SM(T)$ で,

$$\sigma(T|X_T(\overline{G \cap \sigma(T)})) = \overline{G \cap \sigma(T)}$$

$$\sigma(T/X_T(\overline{G \cap \sigma(T)})) = \overline{\sigma(T) \setminus G \cap \sigma(T)}$$

が成立する。

また, これらの定理の逆として, 次の定理が成立する。

定理5. (i) $G \cap S$ をみたす任意の開集合 G に対して, $\sigma(T|Y) \subset \bar{G}$, $\sigma(T/Y) \subset G^c \cup S$ をみたす T の不変部分空間 Y が存在する, または, (ii) $\bar{G} \cap S = \emptyset$ をみたす任意の開集合 G に対して, $\sigma(T|Y) \subset \bar{G} \cup S$, $\sigma(T/Y) \subset G^c$ をみたす T の不変部分空間

が存在する, のいずれかが成り立てば, T は S -decomposable operator である。

注. 従, て, 定理 1, 3, 4 の逆が成り立つし, また, 定理 1, 4 では, 逆をいうとき, " $\in SM(T)$ " の条件は不必要であることがわかる。

また, 定理 2 と次の定理 6 をあわせて, 定理 7 が得られる。

定理 6. T が S -decomposable operator で F が $F \supset S$ または $F \cap S = \emptyset$ をみたす閉集合ならば、 $JX_T(F) = JX \cap X''_T(F)$ が成り立つ。(但し、 $J: X \rightarrow X''$ は自然な写像である。)

定理 7. T が S -decomposable operator で F が $F \supset S$ または $F \cap S = \emptyset$ をみたす閉集合ならば、 $X_T(F)^\perp = X'_T(F^c)$ の w -閉包 が成り立つ。

参考文献

1. E. Albrecht, On two questions of I. Colojoară and C. Foias, Manuscripta Math., 25 (1978) 1-15.
2. I. Bacalu, On restrictions and quotients of decomposable operators, Rev. Roum. Math. Pures et Appl. 18 (1973) 809-813.
3. I. Bacalu, Some properties of decomposable operators, Rev. Roum. Math. Pures et Appl. 21 (1976) 177-194.
4. I. Colojoară and C. Foias, Generalized spectral operators, Gordon and Breach, New York, 1968.
5. I. Erdelyi and W. Shengwang, On strongly decomposable operators, Pacific J. Math., 110 (1984) 287-296.
6. S. Frunză, A duality theorem for decomposable operators, Rev. Roum. Math. Pures et Appl. 16 (1971) 1055-1058.
7. B. Nagy, On S-decomposable operators, J. Operator Theory 2 (1979) 277-286.
8. B. Nagy, Local spectral theory, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 37 (1981) 433-443.

9. W. Shengwang and L. Guangyu, On the duality theorem of Bounded S -decomposable operator, J. Math. Anal. and Appl. 99 (1984) 150-163.
10. F. H. Vasilescu, On the residual decomposability in dual spaces, Rev. Roum. Math. Pures et Appl. 16 (1971) 1573-1587.