

Applications of intersection Homology

R. D. MacPherson (Brown Univ.)

(谷崎隆之記)

講演の内容は、一言で言えば、complex manifold に対して $\rightarrow$ stratification を決めると各 strata の上で Σ の cohomology sheaf が locally constant になるような perverse sheaf 全体の $\subset$ abelian category の初等的記述、であった。これは K. Vilomenn A との共同研究で、論文も近日書きあがるとの事である。

§1. perverse sheaf

以下 X は n -次元の complex manifold とし、 $\mathbb{C}_X$ -Module (X 上の $\mathbb{C}$ -vector space の sheaf) の bounded complex $\mathcal{K}$ は cohomology sheaf が全て constructible であるもの $\subset$ derived category $D_c^b(X)$ と置く。

Definition 1.1 (Beilinson-Bernstein-Deligne [BBD])

$K \in D_c^b(X)$ が次の (i) (ii) (iii) を満たすとき、これは perverse sheaf とする。

- (i) $\mathcal{H}^i(K^\bullet) = 0 \quad (i < 0)$
 (ii) $\dim \operatorname{supp} \mathcal{H}^i(K^\bullet) \leq m-i \quad (i \geq 0)$
 (iii) $\dim \operatorname{supp} \mathcal{H}^i((K^\bullet)^*) \leq m-i \quad (i \geq 0)$

$$(S \subseteq (K^\bullet)^* = \operatorname{RHom}_{\mathcal{O}_X}(K^\bullet, \mathcal{O}_X)) \quad \downarrow$$

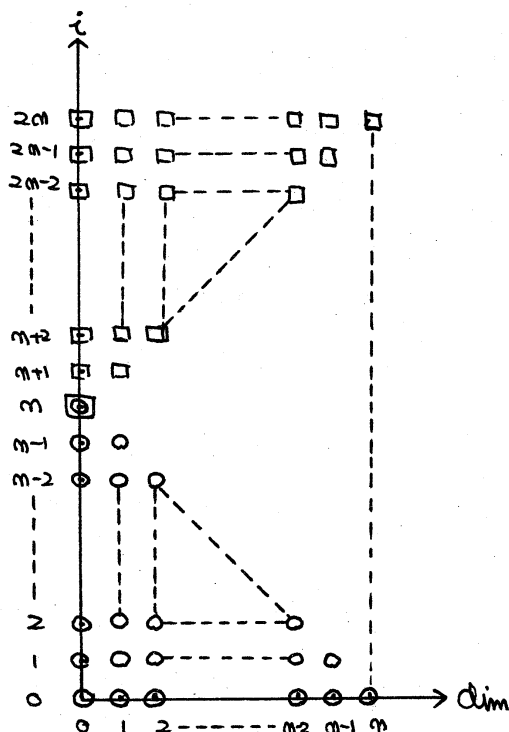
各 $p \in X$ に対し, $p \in \operatorname{supp} \mathcal{H}^i(K^\bullet)$ とする十分小さい正開球 B_p

をとるとき

$$\begin{cases} \mathcal{H}^i(K^\bullet)_p = H^i(B_p, K^\bullet) \\ \mathcal{H}^i((K^\bullet)^*)_p = H^i(B_p, (K^\bullet)^*) = (H_c^{2m-i}(B_p, K^\bullet))^* \end{cases}$$

である。そこで $\dim \{p \in X \mid H^i(B_p, K^\bullet) \neq 0\}$, $\dim \{p \in X \mid H_c^{2m-i}(B_p, K^\bullet) \neq 0\}$

のとり得る値を ∞ 以下にとると次のようになる。



○ ... $\dim \{p \in X \mid H^i(B_p, K^\bullet) \neq 0\}$
 のとり得る値

□ ... $\dim \{p \in X \mid H_c^{2m-i}(B_p, K^\bullet) \neq 0\}$
 のとり得る値.

Notation 1.2 perverse sheaf 全体からなる $D_c^b(X)$ の full subcategory $\mathcal{P}(X)$ と書く。また X の Whitney stratification $X = \bigsqcup_{d \in A} S_d$ であるとき, $K \in \mathcal{P}(X)$ で $\mathcal{H}^i(K)|_{S_d}$ が d 次元 a の c と d による $\llcorner$ locally constant になる $\mathbb{C}$ の全体の $\llcorner$ である full subcategory $\mathcal{P}(X, S)$ と書く。

Example 1.3

$G \in \mathbb{C}$ の 連結半単純 Lie 群, $B \in G$ の Borel 部分群と $(\geq X = G/B$ (flag manifold) とおく。Weyl 群 W の元 w に対して $S_w = BwB/B$ とおくとき, $X = \bigsqcup_{w \in W} S_w$ である (Bruhat 分解)。このとき $\mathcal{P}(X, S)$ は Brylinski-Kashiwara [BK] の $\mathcal{D}_G$ $\mathfrak{g}$ -module の category $\mathcal{D}_{\text{triv}}$ と同値である ($\mathfrak{g} = \text{Lie } G$)。またこの同値で "highest weight $-\rho_S - \rho$ である irreducible highest weight module" に対応する $\mathcal{P}(S_w[-\text{codim } S_w])$ である。ここで ρ は正 root の和の半分, $\mathcal{P}(S_w)$ は S_w の DGM-複素, $[-\text{codim } S_w]$ は chain complex として ρ degree の shift である。

Example 1.4

$\mathbb{C}$ の例で $G = \text{SL}_2(\mathbb{C})$ のとき $X = \mathbb{P}^1$ であり, $X = \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$ は Bruhat 分解である。この場合を後で具体例として用いるので記号を導入しておく。 $S_\alpha = \{\infty\}$, $S_\beta = \mathbb{C} = X - \{\infty\}$, $L_0 = \mathbb{C}_{\{\infty\}}[-1]$, $L_1 = \mathbb{C}_X$, $M = \mathbb{C}_{X - \{\infty\}}$ とおく。 L_0, L_1 は self-dual であり, M は self-dual ではない。実際 $(M^\vee)^\vee$ は, chain complex

$$\left[\cdots \rightarrow 0 \rightarrow \begin{array}{c} \text{(degree 0)} \\ \mathbb{C}_X \oplus \mathbb{C}_{X-1} \\ \downarrow (a,b) \end{array} \xrightarrow{\text{(degree 1)}} \begin{array}{c} \mathbb{C}_X \\ \downarrow b \end{array} \rightarrow 0 \cdots \right]$$

この \$S^1\$ 表現は

$$\mathcal{H}^i(\mathcal{M}^*) = \begin{cases} \mathbb{C}_X & (i=0) \\ \mathbb{C}_b & (i=1) \\ 0 & (i \neq 0, 1) \end{cases}$$

となる。

\$L_0, L_1, M^*, (M^*)^*\$ は \$P(X, S)\$ の object である。

Theorem 1.5 ([BBD])

\$P(X), P(X, S)\$ は abelian category であり、各 object は有限の組成列を持つ。

§2. \$P(X, S)\$ の初等的記述

\$m\$-次元 complex manifold \$X\$ の Whitney stratification \$X = \bigcup_{\alpha \in A} S_\alpha\$
 について固定するとき、次の問題を考える。

Problem 2.1

\$P(X, S)\$ の "elementary description" を与える。

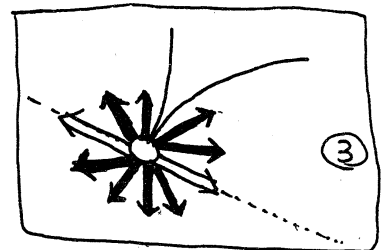
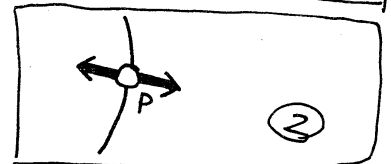
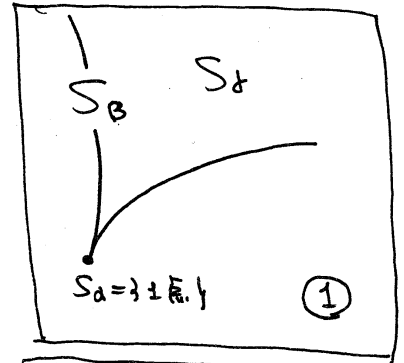
[2.1] system of vanishing cycle sheaves of micro-solution.

\$T^*X \xrightarrow{\pi} X\$ は cotangent bundle である。\$S_\alpha\$ は conormal bundle \$\in T^*_S X\$ として

$$C_\alpha := T^*_S X - \overline{\bigcup_{S_\beta \subsetneq S_\alpha} T^*_{S_\beta} X}$$

とある。直観的な絵を描くと図①のような場合には次のようになる

- $p \in S_\beta$ のときは $C_\beta \cap \pi^{-1}(p) = \emptyset$ かつ $C_\beta \cong S_\beta$
- $p \in S_\beta$ のとき, $C_\beta \cap \pi^{-1}(p)$ は S_β の接方向と直交する方向のベクトルで 0 以外のものをとる。(図②)
- $p \in S_\alpha$ のとき, $C_\alpha \cap \pi^{-1}(p)$ は図③の点線方向と向 || 2 || 向 || 全 || のベクトルをとる



Definition 2.1

$k^* \in \mathcal{P}(X, S)$ のとき, 各 $\alpha \in A$ に対して C_α 上 a local system $\mathcal{V}_\alpha(k^*)$ が次のようにして定まる。

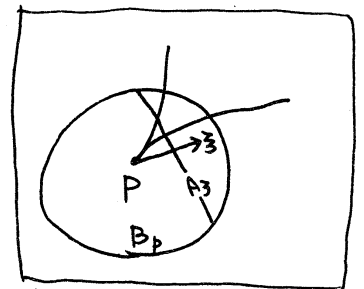
$(p, \xi) \in C_\alpha$ とする ($p \in S_\alpha, \xi \in C_\alpha \cap \pi^{-1}(p)$)。

このとき, p を中心とする十分小さい開球 B_p をとり,

B_p 上 a C^0 -函数 f で $df = \xi$ なるものをに対して

$A_\xi := \{x \in B_p \mid f(x) = \varepsilon\}$ ($0 < \varepsilon \ll 0$) とおく。

$\mathcal{V}_\alpha(k^*)_{(p, \xi)} := H^{d_\alpha}(B_p, A_\xi; k^*)$ ($d_\alpha = \text{codim } S_\alpha$)



$= \cup V_d(K) \in$ system of vanishing cycle sheaves of micro-solution $\subset \mathcal{D}^b(\mathcal{A}^*)$.

Remark 2.2 $B_p - A_3 \xrightarrow{c} B_p \hookrightarrow \mathbb{A}^1$

$H^i(C_{B_p, A_3}; K) := H^i(C_{B_p}; R\hat{c}_! c^* K)$ である。このとき exact sequence を得る。

$$\cdots \rightarrow H^i(C_{B_p, A_3}; K) \rightarrow H^i(C_{B_p}; K) \rightarrow H^i(A_3; K) \rightarrow H^{i+1}(C_{B_p, A_3}; K) \rightarrow \cdots$$

Example 2.3 example 1.4 の場合を考える。このとき,

$$C_B \cong X - \{0\} \cong \mathbb{C}, \quad C_d \cong T_{1/4}^* X - \{0\} = \mathbb{C} - \{0\} \text{ である}$$

K	$V_d(K)$	$V_B(K)$
L_0	$\mathbb{C}_d$	0
L_1	0	0
M	$\mathbb{C}_d$	0
$(M)^*$	$\mathbb{C}_d$	0

2.2 sheaves of nearby cycles

2.1 により functor

$$\begin{array}{ccc} P(X, S) & \longrightarrow & \{(V_d)_{d \in A} \mid V_d: \text{local system on } C_d\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ K & \longmapsto & (V_d(K))_{d \in A} \end{array}$$

が定義されるが、これは exact である。しかし example 2.3

からわかるように、これは category 同値ではない。

$P(X, S)$ を記述するにはもう少し詳しく情報が必要である。

以下 $S_d \in$ closed strata とし $X - S_d = \bigcup_{\beta \neq d} S'_\beta$ ($S'_\beta = S_\beta$)

$I \Rightarrow II$ $PCX-S, S')$ の "elementary description" がわかると
 3 とする。 $I \Leftarrow II$ $PCX, S)$ の "elementary description" を与えるには
 2 II。 実際 X は open strata に S の strata を次元の元 $\pi \in II$ の π の
 III 順には II 合わせで得られる。

Definition 2.4 $L' \in PCX-S_d, S')$ に対して $C_d \subset \mathbb{A}^n$ の $2 \times$
 の local system $N^{\text{closed}}(L')$, $N^{\text{compact}}(L')$ が次のように与えられ
 3 4 5。 definition 2.1 の記号を用いて、

$$\begin{cases} N^{\text{closed}}(L')_{(C_d, \mathbb{A}^n)} := H^d(B_d - S_d, \mathbb{A}^n; L') \\ N^{\text{compact}}(L')_{(C_d, \mathbb{A}^n)} := H^{d-1}(\mathbb{A}^n; L') \end{cases} .$$

2 4 3 $\in$ sheaves of nearby cycles と呼ぶ。 また自然に
 sheaf isomorphism $N^{\text{compact}}(L') \xrightarrow{\text{var}} N^{\text{closed}}(L')$ が定まる。

$I \Leftarrow K' \in PCX, S)$ とすると自然に commutative diagram

$$(\star) \quad \begin{array}{ccc} N^{\text{compact}}(K' | X-S) & \xrightarrow{\text{var}} & N^{\text{closed}}(K' | X-S) \\ & \searrow \Phi_1(K') & \nearrow \Phi_2(K') \\ & T_d(K') & \end{array}$$

が得られる。 $\mathcal{E} = \mathcal{Z}$ category $\mathcal{E}$

$$\mathcal{E} = \left\{ (L', T_d, \Phi_1, \Phi_2) \mid \begin{array}{l} L' \in PCX-S) \\ T_d: \text{local system on } C_d \\ N^{\text{compact}}(L') \xrightarrow{\text{var}} N^{\text{closed}}(L') \\ \Phi_1 \searrow \quad \nearrow \Phi_2 \\ \quad T_d \end{array} \right\}$$

により定めるとき, functor

$$\begin{array}{ccc} P(X, S) & \longrightarrow & \underline{E} \\ \downarrow & & \downarrow \\ K & \longrightarrow & (K[X-S, \nabla_0(K), \mathcal{G}_1(K), \mathcal{G}_2(K)]) \end{array}$$

が得られる。

Proposition 2.5

ci) $\underline{E}$ は abelian category

cii) $P(X, S) \longrightarrow \underline{E}$ は abelian category の embedding $\downarrow$

Example 2.6

example 1.4 の場合に $(\otimes)$ を具体的に計算すると次のとおり。

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & 0 \\ & \searrow & \nearrow \\ & \mathbb{C}_\alpha & \end{array}$$

L_0

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}_\alpha & \xrightarrow{0} & \mathbb{C}_\alpha \\ & \searrow & \nearrow \\ & 0 & \end{array}$$

L_1

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}_\alpha & \xrightarrow{0} & \mathbb{C}_\alpha \\ \downarrow \text{id} & & \uparrow 0 \\ & \mathbb{C}_\alpha & \end{array}$$

M

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}_\alpha & \xrightarrow{0} & \mathbb{C}_\alpha \\ \downarrow 0 & & \uparrow \text{id} \\ & \mathbb{C}_\alpha & \end{array}$$

$(M')^\perp$

2.3 monodromy

一般に $P(X, S) \longrightarrow \underline{E}$ は category 同値 $\exists$ する。実際

example 2.6 の場合 $\pi_1(\mathbb{C}_\alpha) \cong \mathbb{Z}$ なる $\mathbb{C}_\alpha$ 上には monodromy

表現が自明で存在 local system が存在するが, $K \in P(X, S)$ に

対応 $\nabla_0(K)$ の monodromy 表現は trivial である。 $\varepsilon = \varepsilon'$

monodromy に用いる条件を述べる。

$\mathbb{C}_\alpha$ 上の local system L があるとき, 各 $(p, \xi) \in \mathbb{C}_\alpha$ に対

して $L_{(p, \xi)}$ に 基本群 $\pi_1(\mathbb{C}_\alpha)$ が働く。 $\pm$ には sheaf isomorphism

$L_1 \longrightarrow L_2$ があるとき, $L_{1, (p, \xi)} \longrightarrow L_{2, (p, \xi)}$ は $\pi_1(\mathbb{C}_\alpha)$ -equivariant

である。

Proposition 2.7 $(p, \xi) \in \mathcal{C}_d$, $\sigma \in \Pi_1(\mathcal{C}_d)$ とする。

(i) $L \in \text{PCX-S, S'}$ に対して canonical $\mapsto$

$$N^{\text{compact}}(L)_{(p, \xi)} \xleftarrow{I_\sigma(L)} N^{\text{closed}}(L)_{(p, \xi)}$$

が定まり,

$$\text{var} \circ I_\sigma(L) = 1 - \sigma, \quad I_\sigma(L) \circ \text{var} = 1 - \sigma.$$

(ii) $K \in \text{PCX-S, S'}$ に対して

$$\mathcal{G}_1(K) \circ I_\sigma(K|X-S) \circ \mathcal{G}_2(K) = 1 - \sigma$$

$\Sigma = \Sigma^I \subseteq$ a full-subcategory $\subseteq^I \Sigma$

$$\Sigma^I = \left\{ (L, \mathcal{V}_d, \mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2) \in \Sigma \mid (\mathcal{G}_1 \circ I_\sigma(L) \circ \mathcal{G}_2)_{(p, \xi)} = 1 - \sigma \begin{array}{l} \forall (p, \xi) \in \mathcal{C}_d \\ \forall \sigma \in \Pi_1(\mathcal{C}_d) \end{array} \right\}$$

により定める。このとき

Main theorem

$\text{PCX, S} \longrightarrow \Sigma^I$ は category 同型である。 $\perp$

example 2.8 example 2.6 の場合 $\mapsto$ $\mathcal{C}_d$ $\mapsto$ $I_\sigma = 1$ である。

(記録係注)

講演では全て Homology 群の言葉を用いたが、ここでは cohomology 群を用いた。従って $\mathcal{V}_d(K)$, $N^{\text{compact}}(L)$, $N^{\text{closed}}(L)$ は本来は, $\mathcal{V}_d(C(K)^*)^\perp$, $N^{\text{compact}}(C(L)^*)^\perp$, $N^{\text{closed}}(C(L)^*)^\perp$

にあきかえ, morphism の矢印も逆方向にしなさいといけません。

また本稿では集例として $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ に対する flag manifold を用いたが, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ で同様の計算を $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ が出来るように合厚い preprint は存在する, と Brylinski A が言っていたようです。

最後に, 記録係のわかる方だった点などを教えて頂いた
柏原正樹氏に感謝します。

References

[BBD] A. Beilinson, J. Bernstein, P. Deligne: Faisceaux pervers

Asterisque 100 (1982)

[BK] J.-L. Brylinski, M. Kashiwara: Kazhdan-Lusztig conjecture and Holonomic systems; Invent math. 64 (1981), 387-410.

[GM] M. Goresky and R. MacPherson: Intersection Homology theory II, Invent. math. 72 (1983), 77-103.

[MV] R. MacPherson, K. Uilonen: Construction élémentaire des faisceaux pervers; in preparation.