

1 人の強力なプレイヤーが存在するゲームについて

東北大経済 武藤滋夫 (Shigeo Muto)

1 はじめに

本研究の目的は、その協力なしには何の便益も得られないような1人の強力な主体が存在する状況における、各主体間の協力関係の形成および協力することによって得られる便益の分配の問題を、協力ゲームとその解を用いて考察することである。

このような状況の協力ゲームによる分析はこれまでいくつか行われてきてはいるものの、分析に用いられている解は限られ、また各々の分析において異なった解が用いられているため、解相互の関連などが不明確なまま残されている。

本研究では、従来分析が行われてきた状況を包括するような、より広く一般的なゲーム（以下では、big boss game と呼ぶ）のクラスを考え、その広い枠組みのもとで、協力ゲームのさまざまな解の性質を考察すると共に、解相互の関連を明らかにする。

2 Big Boss Game

(N, v) を特性関数形の協力ゲームとする。 $N = \{1, 2, \dots, n\}$ ($n \geq 3$) はプレイヤーの集合であり、 v は N の部分集合（以下、提携と呼ぶ）全体の上の実数値関数（特性関数）である。各 $S \subseteq N$ について $v(S)$ は S に属するメンバーが協力したときに得られる便益の値を表す。空集合 ϕ については $v(\phi) = 0$ とする。以下では、簡単化のため v 自身をゲームと呼ぶ。

ゲーム v のうち、任意の2つの提携 S, T ($S \subseteq T$) について $v(S) \leq v(T)$ となるものを単調ゲーム、任意の相交わらない2つの提携 S, T ($S \cap T = \phi$) について $v(S) + v(T) \leq v(S \cup T)$ となるものを優加法的ゲーム、各プレイヤー $i \in N$ と $i \in S \subseteq T$ となる任意の2つの提携 S, T に対して $v(S) - v(S - \{i\}) \leq v(T) - v(T - \{i\})$ となるものを凸ゲームと呼ぶ。

定義: 単調ゲーム v において、1人のプレイヤー（一般性を失うことなく、以下このプレイヤーをプレイヤー 1 とする）が存在し、次の2つの条件が満たされるとき、このゲームを big boss game という。

条件 1: 1 を含まないすべての提携 S について、

$$v(S) = 0.$$

条件 2: 1 を含むすべての提携 S について、

$$v(N) - v(S) \geq \sum_{i \in N - S} (v(N) - v(N - \{i\})).$$

条件 1 は、プレイヤー 1 の協力なしには何の便益も得られないことを表しており、条件 2 は、他の（弱い）プレイヤーは、提携を組むことにより、各々が独自に行動するときよりも全員提携における彼らの貢献度を増しうることを表している。単調性及び条件 1 より、big boss game は優加法的ゲームとなる。

3 協力ゲームの解

ゲーム v において、 n 次元の実数値ベクトル $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ （利得ベクトル）で、 $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$ かつ、すべての $i \in N$ について $x_i \geq v(\{i\})$ を満たすものを配分と呼び、配分の全体を $A(v)$ と表す。 $v(N) \geq \sum_{i \in N} v(\{i\})$ であれば、 $A(v)$ は常に非空である。

各提携 S と配分 x について、 $e(S, x) = v(S) - \sum_{i \in S} x_i$ とする。

コア: $C(v) = \{x \in A(v) : \text{すべての } S \subseteq N \text{ について } e(S, x) \leq 0\}$ をコアという。コアは常に存在するとは限らず、空集合

となることもある。

交渉集合: 配分 x をとる。2人のプレイヤー i^* と j^* について、 $i^* \in S$, $j^* \notin S$ となる提携 S と、 S に関する利得ベクトル $y = (y_i)_{i \in S}$ で、すべてのプレイヤー $i \in S$ に対して $y_i \geq x_i$ 、かつ $\sum_{i \in S} y_i \leq v(S)$ となるものが存在するとき、 i^* は配分 x において j^* に対して異議をもつという。いま、 $j^* \in T$, $i^* \notin T$ となる提携 T と T に関する利得ベクトル $z = (z_i)_{i \in T}$ で、すべての $i \in S \cap T$ について $z_i \geq y_i$ 、すべての $j \in T - S$ について $z_j \geq x_j$ 、かつ $\sum_{i \in T} z_i \leq v(T)$ となるものが存在するとき、 j^* は配分 x における i^* の異議 (S, y) に対して逆異議をもつという。各プレイヤーが他のプレイヤーに対してもつ如何なる異議に対してもそれに対する逆異議が存在するような配分の全体を交渉集合といい、 $M(v)$ と表す。交渉集合は必ず存在する。

カーネル: 配分 x をとる。2人のプレイヤーの組 (i, j) について、 $s_{i,j}(x) = \max\{e(S, x) : i \in S, j \notin S\}$ 、 $s_{j,i}(x) = \max\{e(S, x) : i \notin S, j \in S\}$ とする。配分 x で、 $x_j > v(\{j\})$ となるような任意のプレイヤーの組 (i, j) について $s_{i,j}(x) \leq s_{j,i}(x)$ となるものの全体をカーネルといい、

$K(v)$ と表す。カーネルは必ず存在する。

シャープレイ値: プレイヤーを並べ変えて得られる順序の全体を Σ とする。順序 $\sigma \in \Sigma$ においてプレイヤー i が k 番目に位置する ($i = \sigma(k)$ である) とし、 σ における i の貢献度 $v(\{\sigma(1), \dots, \sigma(k-1), \sigma(k)\}) - v(\{\sigma(1), \dots, \sigma(k-1)\})$ を $m(\sigma, i)$ と表す。このとき、

$$\psi(v) = (\psi_i(v))_{i \in N},$$

$$\psi_i(v) = (\sum_{\sigma \in \Sigma} m(\sigma, i)) / n!$$

で与えられる $\psi(v)$ をシャープレイ値という。 $\psi_i(v)$ は

$$\psi_i(v) = \sum_{S \subseteq N - \{i\}} s!(n-s-1)!(v(S \cup \{i\}) - v(S)) / n!$$

となる。ここで、 s は S に属するプレイヤーの数である。

仁: 配分 x に対し、 $e(S, x)$ ($S \subseteq N$) を非増加な順に並べた 2^n 次元のベクトルを $\theta(x)$ とする。2つの配分 x, y について、 $\theta(x), \theta(y)$ を辞書的順序に従って比較し、 x の方が y よりも小さいとき、 x は y よりも受容的であるといい、より受容的である配分が存在しない配分の全体を仁という。仁は必ず存在し、しかも1つの配分からなる。仁(の配分)を $\nu(v)$ と表す。

タウ値: 各プレイヤー i について、その全員提携 N への貢献度 $v(N) - v(N - \{i\})$ を $M_i(v)$ とし、 $M(v) = (M_i(v))_{i \in N}$ とする。各プレイヤー i と i を含む提携 S について、 $R(S, i) = v(S) - \sum_{j \in S - \{i\}} M_j(v)$, $m_i(v) = \max\{R(S, i) : S \subseteq N, i \in S\}$ とし、 $m(v) = (m_i(v))_{i \in N}$ とする。このとき、 n 次元ベクトル $r(v) = (r_i(v))_{i \in N}$ で $\sum_{i \in N} r_i(v) = v(N)$ かつ $M(v)$ と $m(v)$ の凸結合で与えられるものをタウ値という。コアが非空であれば、タウ値は必ず存在する。

解相互の一般的な関連: 一般のゲームにおいて、以下の関係が成り立つ。

- 1 $C(v) \subseteq M(v)$
- 2 $v(v) \in K(v) \subseteq M(v)$
- 3 $C(v) \neq \phi \longrightarrow v(v) \in C(v)$

4 Big Boss Game における解の性質と相互の関連

big boss game における上記の解の性質及び相互の関連について、以下の定理が成り立つ。以下では、ゲーム v は常に big boss game であるとする。

定理 1: $H(v) = \{x \in R^n : \sum_{i \in N} x_i = v(N), 0 \leq x_i \leq M_i(v)\}$

$i \in N - \{1\}$ とするとき、コア $C(v) = H(v)$ である。従って、

コアは非空であり、 2^{n-1} 個の頂点

$$(u_1, u_2, \dots, u_n) \quad u_1 = v(N) - \sum_{i \in N - \{1\}} u_i$$

$$u_i = 0 \text{ または } M_i(v) \quad i = 2, \dots, n$$

をもつ $(n-1)$ 次元の平行多面体となる。

注意: コアにおいては、各弱いプレイヤー $2, \dots, n$ の受け取る利得は、高々全員提携に対する彼の貢献度である。

注意: コアは準安定集合となり、通常よりも強い安定性をもつ。また、「コアがそれ自身安定集合 $\longleftrightarrow$ 凸ゲーム」が成り立つ。(準安定集合、安定集合の定義については、本要旨末尾の参考文献 1 を参照されたい。)

定理 2: 交渉集合 $M(v) = C(v)$ 。

注意: より広いクラスのゲームで(単調性と条件 1 が成り立つゲームにおいて)、 $M(v) = C(v)$ が成り立つ。

定理 3: タウ値 $\tau(v)$ は

$$\tau_1(v) = v(N) - \left(\sum_{i \in N - \{1\}} M_i(v)/2 \right)$$

$$\tau_i(v) = M_i(v)/2 \quad i = 2, \dots, n$$

で与えられる。従って、タウ値はコアの中心に位置する。

定理 4: 仁 $\nu(v) = \tau(v)$ 。さらに、カーネル $K(v)$ は 1 つの配分からなり、 $K(v) = \{\tau(v)\}$ 。

注意: タウ値、仁、カーネルのいずれにおいても、各弱いプレイヤー $2, \dots, n$ は、全員提携に対する彼の貢献度の半分を利得として受け取る。

定理 5: シャープレイ値 $\psi(v)$ について、

$$(1) \quad \psi_1(v) \leq \tau_1(v)$$

$$(2) \quad \psi_1(v) = \tau_1(v) \longleftrightarrow \psi(v) = \tau(v)$$

$$\longleftrightarrow v \text{ は凸ゲーム}$$

が成り立つ。

注意: 強いプレイヤーにとっては、タウ値、仁、カーネルによる配分の方がシャープレイ値による配分より好ましく、

弱いプレイヤー全体としてみれば、シャープレイ値の方が好ましい。ただし、弱いプレイヤーの中に、シャープレイ値による利得の方が小さくなるものが存在する場合もある。

注意: 条件 2 を、より強い条件

「 $1 \in S \subseteq T$ となる任意の 2 つの提携 S, T について、

$$v(T) - v(S) \geq \sum_{i \in T - S} M_i(v)」$$

で置き換えたゲーム (strong big boss game) においては、 $\psi_i(v) \geq \tau_i(v) \quad i = 2, \dots, n$ が成り立つ。従って、すべての弱いプレイヤーにとって、シャープレイ値の方が好ましいこととなる。

5 結び

本研究では 1 人の強力なプレイヤーが存在するゲームにおける解について考察し、上記の結果を得た。これらの結果は、独占的に所有されている財、設備、情報などの共同利用における便益分配、費用分担などの計画問題を考える際の基礎となると思われる。いくつかのこうした例については、以下の参考文献 1 を参照されたい。

6 参考文献

1. Muto S., M.Nakayama, J.Potters and S.Tijs, "On Big Boss Games," TM&ARG Discussion Paper No.7, Faculty of Economics, Tohoku University, 1987.
2. Potters J., S.Muto and S.Tijs, "Bargaining Set and Kernel of Big Boss Games," Internal Report 88NIC110, Department of Mathematics, Catholic University (the Netherlands), 1988.