

最小指数とエントロピー

北大応電研 日合文雄 (Fumio Hiai)

Jones[10] は coupling constant と Umegaki の条件付期待値 [19] を使って II_1 factor とその subfactor の間の指数理論を構築した. Pimsner-Popa[16] は Connes-Størmer[5] が導入したエントロピーを II_1 factor-subfactor に対して計算し, エントロピーと Jones 指数との関係を確立した. 他方 Kosaki[11] は Connes の spatial 理論 [3] と Haagerup の operator valued weight の理論 [6] をベースに, Jones 指数を一般の factor から subfactor への条件付期待値の指数 (Kosaki 指数) に拡張した. 筆者 [7] は factor-subfactor が与えられたとき, その間の条件付期待値の Kosaki 指数の最小化を考え, 最小指数であるための特徴づけを与えた.

以下, § 1 では [7] の結果を紹介し, § 2 では最小指数の基本性質を調べる. § 3 では, Pimsner-Popa の与えたエントロピーと Jones 指数の関係式を念頭において, 一般の v.N. 代数とその部分代数に対してエントロピーの新しい定義を導入する. § 4 では指数有限の factor-subfactor の場合に最小指数とエントロピーとの関係を明らかにする. § 2 の結果は完全な証明を付けたが, §§ 3, 4 は証明を省略した (詳細は [8]).

§ 1. 最小指数の特徴づけ

以下, v.N. 代数はすべて σ -finite とする. M を factor, N を

M の subfactor とし, M から N への条件付期待値の全体を $\mathcal{E}(M, N)$ で表す. $E \in \mathcal{E}(M, N)$ の Kosaki 指数は $\text{Index } E = E^{-1}(1)$ で定義される. ここに E^{-1} は N' から M' への operator valued weight であり, spatial derivative に関する等式

$$\frac{d\varphi \cdot E}{d\phi} = \frac{d\varphi}{d\phi \cdot E^{-1}}$$

で定まる. ただし φ, ϕ はそれぞれ N, M' 上の忠実正規な semi-finite weights (E^{-1} は φ, ϕ の取り方に依らない).

まず簡単な事実として,

- (1) $E \in \mathcal{E}(M, N)$ が $\text{Index } E < 4$ ならば, $N' \cap M = \mathbb{C}$ であり, $\mathcal{E}(M, N) = \{E\}$.
- (2) $E \in \mathcal{E}(M, N)$ が $\text{Index } E < \infty$ ならば, $N' \cap M$ は有限次元であり, すべての $F \in \mathcal{E}(M, N)$ に対して $\text{Index } F < \infty$.
- (2) より, $\text{Index } E < \infty, \forall E \in \mathcal{E}(M, N)$, または $\text{Index } E = \infty, \forall E \in \mathcal{E}(M, N)$.

定理 1.1. [7] ある $E \in \mathcal{E}(M, N)$ で $\text{Index } E < \infty$ のとき, 唯一つの $E_0 \in \mathcal{E}(M, N)$ が存在して,

$$\text{Index } E_0 = \min \{ \text{Index } E : E \in \mathcal{E}(M, N) \}.$$

さらに, $E \in \mathcal{E}(M, N)$ に対して次は同値:

- (i) $E = E_0$,
- (ii) $E|_{N' \cap M}, E^{-1}|_{N' \cap M}$ が トレース であり, $E^{-1}|_{N' \cap M} = (\text{Index } E)E|_{N' \cap M}$,
- (iii) $E^{-1}|_{N' \cap M} = (\text{Index } E)E|_{N' \cap M}$,

(iv) $E \mid N' \cap M$ がトレースであり, $N' \cap M$ の minimal central projections $q_1, \dots, q_m$ ($\sum q_i = 1$) に対し

$$E(q_i) = (\text{Index } E_{q_i} / \text{Index } E)^{1/2}, \quad 1 \leq i \leq m.$$

ここに $N' \cap M$ の projection p に対し, $E_p \in \mathcal{E}(pMp, Np)$ は

$$E_p(x) = E(p)^{-1} E(x) p \text{ で定まる.}$$

上の条件 (iv) は [7] に明示されていないが, 証明からすぐにわかる. Longo[12] もこの条件で最小指数を特徴づけている.

定理 1.1 で $N' \cap M \neq \mathbb{C}$ ならば, $\text{Index } E$, $E \in \mathcal{E}(M, N)$, は $[\text{Index } E_0, \infty)$ のすべての値を取る.

§ 2. 最小指数の基本性質

任意の factor-subfactor $M \supseteq N$ に対して, 最小指数 $[M:N]_0$ を

$$[M:N]_0 = \min \{ \text{Index } E : E \in \mathcal{E}(M, N) \}$$

で定める. ただし, $\mathcal{E}(M, N) = \emptyset$ または $\text{Index } E = \infty$ ($E \in \mathcal{E}(M, N)$) のときは $[M:N]_0 = \infty$ とする.

この節では, v.N. 代数はすべて factor とする.

命題 2.1. $[M:N]_0 = [N':M']_0$.

証明. $[M:N]_0 = \text{Index } E_0 < \infty$ とすると, $E_0' = (\text{Index } E_0)^{-1} E_0^{-1} \in \mathcal{E}(N', M')$ かつ $\text{Index } E_0' = \text{Index } E_0$ であるから, $[N':M']_0 \leq [M:N]_0$. 同じ議論で逆も成立. $\square$

命題 2.2. $M \supseteq M_1 \supseteq N_1 \supseteq N$ のとき, $[M_1:N_1]_0 \leq [M:N]_0$.

証明. $M \supseteq L \supseteq N$ に対し, 次の (1), (2) を示せばよい:

$$(1) [L:N]_0 \leq [M:N]_0,$$

$$(2) [M:L]_0 \leq [M:N]_0.$$

$[M:N]_0 = \text{Index } E_0 < \infty$ のとき, $E_0 | L \in \mathcal{E}(L, N)$ であり, 次の補題 2.3 より $\text{Index}(E_0 | L) \leq \text{Index } E_0$. よって (1) が成立. $N' \supseteq L' \supseteq M'$ に (1) と命題 2.1 を用いれば, (2) も成立. $\square$

補題 2.3. $M \supseteq L \supseteq N$, $E \in \mathcal{E}(M, N)$ のとき, $\text{Index}(E | L) \leq \text{Index } E$.

証明. $\text{Index } E < \infty$ として, M の standard 表現を取れば, N , N' 上にそれぞれ忠実正規な states φ , ϕ が存在する. $\phi_1 = \phi | M'$, $\phi_2 = \phi | L'$ とおく. [3] の記号を用いて, $M' \subseteq L'$ より $\mathcal{H}_{\phi_1} \subseteq \mathcal{H}_{\phi_2}$ かつ $D(\mathcal{H}, \phi_1) \supseteq D(\mathcal{H}, \phi_2)$. $\xi \in D(\mathcal{H}, \phi_2)$ に対して, $R^{\phi_1}(\xi) = R^{\phi_2}(\xi) | \mathcal{H}_{\phi_1}$ より $\theta^{\phi_1}(\xi, \xi) \leq \theta^{\phi_2}(\xi, \xi)$ となり,

$$\varphi \cdot E(\theta^{\phi_1}(\xi, \xi)) \leq \varphi \cdot E(\theta^{\phi_2}(\xi, \xi)).$$

よって positive quadratic forms

$$q_i(\xi) = \varphi \cdot E(\theta^{\phi_i}(\xi, \xi)), \quad \xi \in D(\mathcal{H}, \phi_i), \quad i = 1, 2,$$

の閉包について, $D(\overline{q_1}) \supseteq D(\overline{q_2})$ かつ $\overline{q_1}(\xi) \leq \overline{q_2}(\xi)$, $\forall \xi \in D(\overline{q_2})$.
つまり $d\varphi \cdot E / d\phi_1 \leq d\varphi \cdot (E | L) / d\phi_2$. 従って

$$\frac{d\varphi}{d\phi_1 \cdot E^{-1}} = \frac{d\varphi \cdot E}{d\phi_1} \leq \frac{d\varphi \cdot (E | L)}{d\phi_2} = \frac{d\varphi}{d\phi_2 \cdot (E | L)^{-1}}$$

となり $\phi_1 \cdot E^{-1} \geq \phi_2 \cdot (E|L)^{-1}$. 故に $E^{-1}(1) \geq (E|L)^{-1}(1)$. $\square$

実は, 補題 2.3 は幸崎氏により証明されている次の結果 (Pimsner-Popa 不等式) から明らか: M が有限次元でなければ, 任意の $E \in \mathcal{E}(M, N)$ に対して

$$(\text{Index } E)^{-1} = \max \{ \lambda \geq 0 : E(x) \geq \lambda x, \quad \forall x \in M_+ \}.$$

M が II_1 factor の場合, これは [16] で証明された. M が有限次元でも $E - \lambda \text{id}$ が完全正值という条件に置き換えれば, 同じ式が成立. しかし, 上の結果の証明で "右辺 $> 0 \Rightarrow \text{Index } E < \infty$ " が非常に難しいということなので, 補題 2.3 の直接の証明を与えた.

定理 2.4. $M_i \supseteq N_i$ ($i = 1, 2$) のとき,

$$[M_1 \otimes M_2 : N_1 \otimes N_2]_0 = [M_1 : N_1]_0 [M_2 : N_2]_0.$$

証明. まず, $\mathcal{E}(M_1 \otimes M_2, N_1 \otimes N_2) \neq \emptyset \Leftrightarrow \mathcal{E}(M_i, N_i) \neq \emptyset$ ($i = 1, 2$) はすぐにわかる. 次に $E \in \mathcal{E}(M_1 \otimes M_2, N_1 \otimes N_2)$, $\text{Index } E < \infty$ とすると, $(\text{Index } E)^{-1} E^{-1} \in \mathcal{E}(N_1' \otimes N_2', M_1' \otimes M_2')$ より $\mathcal{E}(N_i', M_i') \neq \emptyset$. また $(N_1 \otimes N_2)' \cap (M_1 \otimes M_2) = (N_1' \cap M_1) \otimes (N_2' \cap M_2)$ が有限次元だから, $N_i' \cap M_i$ が有限次元. よって $F_i \in \mathcal{E}(M_i, N_i)$ に対し $\text{Index } F_i < \infty$ ($i = 1, 2$). 従って $[M_1 \otimes M_2 : N_1 \otimes N_2]_0 < \infty \Rightarrow [M_i : N_i]_0 < \infty$ ($i = 1, 2$) がいえた. 最後に $[M_i : N_i]_0 = \text{Index } E_i < \infty$ ($i = 1, 2$) とすると, 次の補題 2.5 より $(E_1 \otimes E_2)^{-1} = E_1^{-1} \otimes E_2^{-1}$ であるから,

$$(E_1 \otimes E_2)^{-1} | (N_1 \otimes N_2)' \cap (M_1 \otimes M_2)$$

$$= (\text{Index } E_1)(\text{Index } E_2)E_1 \otimes E_2 \mid (N_1 \otimes N_2)' \cap (M_1 \otimes M_2).$$

故に定理 1.1 より, $[M_1 \otimes M_2 : N_1 \otimes N_2]_0 = (\text{Index } E_1)(\text{Index } E_2)$. $\square$

補題 2.5. $E_i \in \mathcal{E}(M_i, N_i)$ ($i = 1, 2$) に対して, $(E_1 \otimes E_2)^{-1} = E_1^{-1} \otimes E_2^{-1}$. よって $\text{Index}(E_1 \otimes E_2) = (\text{Index } E_1)(\text{Index } E_2)$.

証明. これは spatial derivative に関する等式

$$\frac{d(\varphi_1 \otimes \varphi_2)}{d(\phi_1 \otimes \phi_2)} = \frac{d\varphi_1}{d\phi_1} \otimes \frac{d\varphi_2}{d\phi_2}$$

の直接の系である. しかし補題だけなら, 以下に述べる証明 (幸崎氏による) が簡単である.

φ_i, ϕ_i をそれぞれ N_i, M_i' 上の忠実正規な semifinite weights とすると, $\sigma_t^{\varphi_1 \cdot E_1 \otimes \varphi_2 \cdot E_2} = \sigma_t^{\varphi_1 \cdot E_1} \otimes \sigma_t^{\varphi_2 \cdot E_2}$, $\sigma_t^{\phi_1 \otimes \phi_2} = \sigma_t^{\phi_1} \otimes \sigma_t^{\phi_2}$ より, $\text{Ad} \left(\frac{d\varphi_1 \cdot E_1}{d\phi_1} \otimes \frac{d\varphi_2 \cdot E_2}{d\phi_2} \right)^{it}$ および $\text{Ad} \left(\frac{d(\varphi_1 \cdot E_1 \otimes \varphi_2 \cdot E_2)}{d(\phi_1 \otimes \phi_2)} \right)^{it}$ は $M_1 \otimes M_2$ および $M_1' \otimes M_2'$ 上に同じ action を引き起す [3]. M_i が factor だから

$$\frac{d(\varphi_1 \cdot E_1 \otimes \varphi_2 \cdot E_2)}{d(\phi_1 \otimes \phi_2)} = \alpha \frac{d\varphi_1 \cdot E_1}{d\phi_1} \otimes \frac{d\varphi_2 \cdot E_2}{d\phi_2} \quad (\alpha > 0)$$

同様に

$$\frac{d\varphi_1}{d\phi_1 \cdot E_1^{-1}} \otimes \frac{d\varphi_2}{d\phi_2 \cdot E_2^{-1}} = \beta \frac{d(\varphi_1 \otimes \varphi_2)}{d(\phi_1 \cdot E_1^{-1} \otimes \phi_2 \cdot E_2^{-1})} \quad (\beta > 0)$$

よって $(E_1 \otimes E_2)^{-1} = \gamma E_1^{-1} \otimes E_2^{-1}$ ($\gamma > 0$). $e_{N_1 \otimes N_2} = e_{N_1} \otimes e_{N_2}$

に注意して, [11] より

$$1 = (E_1 \otimes E_2)^{-1} (e_{N_1} \otimes e_{N_2}) = \gamma E_1^{-1}(e_{N_1}) \otimes E_2^{-1}(e_{N_2}) = \gamma.$$

故に $(E_1 \otimes E_2)^{-1} = E_1^{-1} \otimes E_2^{-1}$. (上の証明は $\text{Index } E_i < \infty$ または $= \infty$ にかかわらない.) $\square$

定理 2.5 は [12] にもある。

$M \supseteq L \supseteq N$ のとき, $[M:N]_0 \leq [M:L]_0 [L:N]_0$ は明らか。

命題 2.6. $M \supseteq L \supseteq N$, $[M:N]_0 = \text{Index } E_0 < \infty$ のとき, 次は同値:

(i) $[M:N]_0 = [M:L]_0 [L:N]_0$,

(ii) $\exists E \in \mathcal{E}(M, L)$ s.t. $E_0 = E_0 \cdot E$,

(iii) φ を N 上の忠実正規 state とすると, $\sigma^{\varphi \cdot E_0}(L) = L, \forall t \in \mathbb{R}$ (この条件は φ の取り方に依らない)。

証明. (i) $\Rightarrow$ (ii). 命題 2.2 より $[M:L]_0 < \infty$, $[L:N]_0 < \infty$ であるから, $E \in \mathcal{E}(M, L)$, $F \in \mathcal{E}(L, N)$ が存在して $\text{Index } E = [M:L]_0$, $\text{Index } F = [L:N]_0$. $F \cdot E \in \mathcal{E}(M, N)$ かつ $\text{Index } F \cdot E = (\text{Index } E)(\text{Index } F) = [M:N]_0$. よって $E_0 = F \cdot E$. 従って $E_0 \mid L = F$ となり, $E_0 = E_0 \cdot E$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). $F = E_0 \mid L \in \mathcal{E}(L, N)$ とおくと,

$$\begin{aligned} [M:N]_0 &= \text{Index } F \cdot E = (\text{Index } E)(\text{Index } F) \\ &\geq [M:L]_0 [L:N]_0. \end{aligned}$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii). $\varphi \cdot E_0 = \varphi \cdot E_0 \cdot E$ より $\sigma^{\varphi \cdot E_0}(L) = L$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii). $E \in \xi(M, L)$ が存在して $\varphi \cdot E_0 = \varphi \cdot E_0 \cdot E$. よって $E_0 = E_0 \cdot E$. $\square$

命題 2.7. $M \supseteq L \supseteq N$, $N' \cap M = (N' \cap L) \vee (L' \cap M)$ のとき,
 $[M:N]_0 = [M:L]_0 [L:N]_0$.

証明. $[M:L]_0 = \infty$ または $[L:N]_0 = \infty$ ならば, 命題 2.2 より $[M:N]_0 = \infty$. よって $[M:L]_0 < \infty$, $[L:N]_0 < \infty$ とすると, $E \in \xi(M, L)$, $F \in \xi(L, N)$ が存在して $\text{Index } E = [M:L]_0$, $\text{Index } F = [L:N]_0$. 任意の $x \in L' \cap M$, $y \in N' \cap L$ に対して

$$\begin{aligned} (F \cdot E)^{-1}(xy) &= E^{-1} \cdot F^{-1}(xy) \\ &= E^{-1}(x) F^{-1}(y) \\ &= (\text{Index } E)(\text{Index } F) E(x) F(y) \\ &= (\text{Index } E)(\text{Index } F) F \cdot E(xy). \end{aligned}$$

従って $(F \cdot E)^{-1} \mid N' \cap M = (\text{Index } E)(\text{Index } F) F \cdot E \mid N' \cap M$ となり, 定理 1.1 より $[M:N]_0 = \text{Index } F \cdot E = [M:L]_0 [L:N]_0$. $\square$

定理 2.4 において, $M_1 \otimes M_2 \supseteq N_1 \otimes M_2 \supseteq N_1 \otimes N_2$ は命題 2.7 の仮定を満たす. よって命題 2.7 を使うと, 定理 2.4 の証明が少し簡単になる.

次の定理では, α を局所コンパクト群 G の $M(\supseteq N)$ 上の action とし, $\alpha_g(N) = N, \forall g \in G$, とする. ここに, $M \rtimes_\alpha G$ などが σ -finite であるようにするため, G は第 2 可算としておく (この仮定は本質的なものではない).

定理 2.8. (1) Crossed products $M \rtimes_{\alpha} G$, $N \rtimes_{\alpha} G$ が factors のとき,

$$[M \rtimes_{\alpha} G : N \rtimes_{\alpha} G]_0 = [M:N]_0.$$

(2) $\alpha \mid N$ が semi-dual とする ($\alpha \mid N$ が dominant ならそうである). Fixed point algebras M^{α} , N^{α} が factors ($\Leftrightarrow M \rtimes_{\alpha} G$, $N \rtimes_{\alpha} G$ が factors) のとき, $[M^{\alpha} : N^{\alpha}]_0 = [M:N]_0$.

証明. (1) $\tilde{M} = M \rtimes_{\alpha} G$, $\tilde{N} = N \rtimes_{\alpha} G$ とおくと, [13] より

$$\tilde{M} = (M \otimes B(L^2(G)))^{\alpha \otimes \text{Ad}(\rho)}, \quad \tilde{N} = (N \otimes B(L^2(G)))^{\alpha \otimes \text{Ad}(\rho)}.$$

$[M:N]_0 = \text{Index } E < \infty$ ($E \in \mathcal{E}(M, N)$) とすると, 任意の $g \in G$ に対して, $\alpha_g E \alpha_g^{-1} \in \mathcal{E}(M, N)$ かつ $\text{Index}(\alpha_g E \alpha_g^{-1}) = \text{Index } E$ (これは補題 2.3 の下で述べた事実から明らかであるが, 直接に示すのも容易). 最小指数を与える E の一意性から, $\alpha_g E \alpha_g^{-1} = E, \forall g \in G$.

つまり E と α は可換であるから, $E \otimes \text{id}$ は $\alpha \otimes \text{Ad}(\rho)$ と可換. よって $\tilde{E} = E \otimes \text{id}_{B(L^2(G))} \mid \tilde{M} \in \mathcal{E}(\tilde{M}, \tilde{N})$ となり, 補題 2.3 と補題 2.5 より $\text{Index } \tilde{E} \leq \text{Index}(E \otimes \text{id}) = \text{Index } E$. 従って $[\tilde{M}:\tilde{N}]_0 \leq [M:N]_0$.

次に, $\hat{\alpha}$ を α の dual co-action として (このとき $\hat{\alpha} \mid \tilde{N}$ が $\alpha \mid N$ の dual co-action), $\tilde{\tilde{M}} = \tilde{M} \rtimes_{\alpha} G$, $\tilde{\tilde{N}} = \tilde{N} \rtimes_{\alpha} G$ とおくと, [13] より

$$\tilde{\tilde{M}} \cong M \otimes B(L^2(G)), \quad \tilde{\tilde{N}} \cong N \otimes B(L^2(G)).$$

$[\tilde{\tilde{M}}:\tilde{\tilde{N}}]_0 = \text{Index } F < \infty$ ($F \in \mathcal{E}(\tilde{\tilde{M}}, \tilde{\tilde{N}})$) とすると, $F_{\hat{\alpha}} = \hat{\alpha} F \hat{\alpha}^{-1} \in$

$\mathcal{E}(\hat{\alpha}(M), \hat{\alpha}(N))$ であり, 次の図式

$$\begin{array}{ccc}
\widetilde{M} \cong \widetilde{M}^{\hat{\alpha}} \otimes B(L^2(G)) = \hat{\alpha}(M) \otimes B(L^2(G)) & & \\
\downarrow \widetilde{F} & & \downarrow F \hat{\alpha} \otimes \text{id}_{B(L^2(G))} \\
\widetilde{N} \cong \widetilde{N}^{\hat{\alpha}} \otimes B(L^2(G)) = \hat{\alpha}(N) \otimes B(L^2(G)) & &
\end{array}$$

によって $\widetilde{F} \in \mathcal{L}(\widetilde{M}, \widetilde{N})$ が定まる。このとき

$$\text{Index } \widetilde{F} = \text{Index}(F \hat{\alpha} \otimes \text{id}) = \text{Index } F \hat{\alpha} = \text{Index } F.$$

従って $[\widetilde{M} : \widetilde{N}]_0 \leq [\widetilde{M} : \widetilde{N}]_0$. さらに定理 2.4 より

$$[\widetilde{M} : \widetilde{N}]_0 = [M \otimes B(L^2(G)) : N \otimes B(L^2(G))]_0 = [M : N]_0.$$

故に $[\widetilde{M} : \widetilde{N}]_0 = [M : N]_0$.

(2) $\alpha \mid N$ が (よって α も) semi-dual だから, [13] より

$$M \rtimes_{\alpha} G \cong M^{\alpha} \otimes B(L^2(G)), \quad N \rtimes_{\alpha} G \cong N^{\alpha} \otimes B(L^2(G)).$$

よって (1) より, $[M^{\alpha} : N^{\alpha}]_0 = [M \rtimes_{\alpha} G : N \rtimes_{\alpha} G]_0 = [M : N]_0$. $\square$

定理 2.8 は最初 G の可換性を仮定していたが, 一般の局所コンパクト群でよいことを中神氏から示唆された。

§ 3. 条件付エントロピー

M を忠実正規な規格化されたトレース τ をもつ v.N. 代数とし, N を M の v.N. 部分代数とするとき, [5, 16] で導入されたエントロピー $H(M \mid N)$ は

$$(*) \quad H(M \mid N) = \sup_{(x_i)} \sum_i \{ \tau(\eta E(x_i)) - \tau(\eta x_i) \},$$

ここに $\eta(t) = -t \log t$, E は M から N への τ -条件付期待値, $\sup$

は $x_i \in M_+$, $\sum x_i = 1$ であるすべての $(x_1, \dots, x_n)$ にわたって取る.

M が II_1 factor, N が subfactor のとき, [16]によれば, $N' \cap M$ が atomic でなければ $H(M|N) = \infty$ であり, $N' \cap M$ が atomic ならば

$$(**) \quad H(M|N) = \sum_k \tau(f_k) \log \frac{[M_{f_k} : N_{f_k}]}{\tau(f_k)^2},$$

ただし $\{f_k\}$ は $N' \cap M$ の atoms であり $\sum f_k = 1$. ところで

$[M_{f_k} : N_{f_k}] = \text{Index } E_{f_k} = \tau(f_k) E^{-1}(f_k)$, [11], となるから, 上式は

$$H(M|N) = - \sum_k \tau(f_k) \log \frac{\tau(f_k)}{E^{-1}(f_k)}$$

と書ける. 従って, $-H(M|N)$ は $\tau|_{N' \cap M}$ と $E^{-1}|_{N' \cap M}$ の相対エントロピー [1, 2, 20] と見なせる.

いま v.N. 代数 M 上に忠実正規 state φ が与えられたとする.

以下, N は M の v.N. 部分代数であり, M から N への φ -条件付期待値 E が存在するものとする (i.e. $\sigma^\varphi(N) = N, \forall t \in \mathbb{R}$). このとき,

φ, N に関する M の条件付エントロピー $H_\varphi(M|N)$ を次のように定義する:

$E^{-1}|_{N' \cap M}$ が semifinite でなければ $H_\varphi(M|N) = \infty$.

$E^{-1}|_{N' \cap M}$ が semifinite ならば $\omega = \varphi|_{N' \cap M}$, $\hat{\omega} = \varphi \cdot E^{-1}|_{N' \cap M}$ において

$$(***) \quad H_\varphi(M|N) = -S(\omega | \hat{\omega}),$$

ただし $S(\omega | \hat{\omega})$ は ω と $\hat{\omega}$ の相対エントロピーであるが, $\hat{\omega}(1) < \infty$ とは限らないので

$$S(\omega | \hat{\omega}) = \inf \{ S(\omega | \omega') : \omega' \in (N' \cap M)_*^+, \omega' \leq \hat{\omega} \}$$

と定める. [5, 16] では $H(M | N)$ を " 相対エントロピー " と呼んでいるが, ここでは用語の混用を避けるため古典論と同じく " 条件付エントロピー " を用いた.

実際は, 以下に述べるように, $H_\varphi(M | N)$ は計算しやすい式で与えられることがわかる. $E^{-1} | N' \cap M$ が semifinite のとき, [6] より

$$\sigma_t^\omega = \sigma_t^E = \sigma_{-t}^{E^{-1}} = \sigma_{-t}^{\hat{\omega}}$$

であるから, E の centralizer $(N' \cap M)_E$ に affiliate する $h \geq 0$ が存在して $\hat{\omega} = \omega(h \cdot)$, [14]. このとき $h \geq 1$ (i.e. $\hat{\omega} \geq \omega$) であり, 相対エントロピーの monotonicity [2, 18] と sufficient subalgebra の議論 [9, 15] を使うと,

$$H_\varphi(M | N) = \omega(\log h) = \varphi(\log h)$$

が証明できる. これより

命題 3.1. (1) $H_\varphi(M | N) \geq 0$, $H_\varphi(M | N) = 0 \Leftrightarrow M = N$.

(2) $N' \cap M$ の projections $p_1, \dots, p_n$ ($\sum p_i = 1$) に対し

$$H_\varphi(M | N) \leq \sum_{i=1}^n \varphi(p_i) \log \frac{\varphi(E^{-1}(p_i))}{\varphi(p_i)} \leq \log \varphi(E^{-1}(1)).$$

命題 3.2. φ_i を M_i 上の忠実正規 state とする ($i = 1, 2$). M_i から $N_i (\subseteq M_i)$ への φ_i -条件付期待値が存在するとき,

$$H_{\varphi_1 \otimes \varphi_2}(M_1 \otimes M_2 | N_1 \otimes N_2) = H_{\varphi_1}(M_1 | N_1) + H_{\varphi_2}(M_2 | N_2).$$

定理 3.3. $Z(M)$ が atomic のとき, 次が成立:

(1) $H_{\varphi}(M | N) < \infty$ ならば, $N' \cap M$ は I 型であり, $(N' \cap M)_E$

は finite な I 型 (i.e. matrix algebras の直和) である.

(2) $\{p_i\}$ を $Z(M)$ の atoms の全体とすると,

$$H_{\varphi}(M | N) = \sum_i \varphi(\eta E(p_i)) + \sum_i \varphi(p_i) H_{\varphi_i}(M p_i | N p_i),$$

ただし $\varphi_i = \varphi(p_i)^{-1} \varphi | M p_i$. 特に N が factor のとき, 上式で
 $\varphi(\eta E(p_i)) = \eta \varphi(p_i)$.

定理 3.4. M が factor として $H_{\varphi}(M | N) < \infty$ のとき, 次が成立:

(1) $(N' \cap M)_E$ の minimal projections $\{f_k\}$ ($\sum f_k = 1$) に対

して,

$$\begin{aligned} H_{\varphi}(M | N) &= \sum_k \varphi(f_k) \log \frac{E^{-1}(f_k)}{\varphi(f_k)} \\ &= \sum_k \varphi(f_k) \log \frac{\text{Index } E_{f_k}}{\varphi(E(f_k)^2)}. \end{aligned}$$

(2) $\{q_j\}$ を $Z(N)$ の atoms の全体とすると,

$$H_{\varphi}(M | N) = \sum_j \eta \varphi(q_j) + \sum_j \varphi(q_j) H_{\varphi_j}(q_j M q_j | N q_j),$$

ただし $\varphi_j = \varphi(q_j)^{-1} \varphi | q_j M q_j$.

定理 3.5. N が factor として $H_{\varphi}(M | N) < \infty$ のとき, 次が成立:

(1) $N' \cap M$ は I 型であり, $(N' \cap M)_E$ は finite な I 型である.

(2) $(N' \cap M)_E$ の minimal projections $\{f_k\}$ ($\sum f_k = 1$) に対して,

$$\begin{aligned} H_{\varphi}(M|N) &= \sum_k \varphi(f_k) \log \frac{E^{-1}(f_k)}{\varphi(f_k)} \\ &= \sum \varphi(f_k) \log \frac{\text{Index } E_{f_k}}{\varphi(f_k)^2}. \end{aligned}$$

系 3.6. $H_{\varphi}(M|N) < \infty$ のとき, 次は同値:

- (i) $Z(M)$ は atomic,
- (ii) $Z(N)$ は atomic,
- (iii) $N' \cap M$ は I 型.

$M \supseteq N$ が II_1 factors のとき, 定理 3.4(1) は (**) の式と一致する. また, 河上・吉田両氏は (*) の $H(M|N)$ に対し, M (resp. N) が factor のとき定理 3.4(2) (resp. 定理 3.3(2)) と同じ公式を得ている [21]. 従って

系 3.7. M を II_1 型 v.N. 代数, τ をトレースとするとき, M または $N(\subseteq M)$ が factor ならば, $H_{\tau}(M|N)$ は (*) の $H(M|N)$ と一致する.

注意. $M \supseteq N$ が有限次元の場合, $H_{\tau}(M|N)$ は (*) の $H(M|N)$ と一致しない. 例えば $M = M_n(\mathbb{C})$, $N = \mathbb{C}$ の場合, $H_{\tau}(M|\mathbb{C}) =$

$2 \log n$, しかし $H(M | \mathbb{C}) = H(M) = \log n$, [5]. この事実は Pimsner-Popa 不等式が有限次元で成立しないことに対応している.

条件付エントロピーが当然満すべき性質として, 次のものが挙げられる: $M \supseteq L \supseteq N$ とし, M から L および N への φ -条件付期待値が存在するとき,

$$(a) \quad H_{\varphi}(M | N) \leq H_{\varphi}(M | L) + H_{\varphi|L}(L | N),$$

$$(b) \quad H_{\varphi}(M | L) \leq H_{\varphi}(M | N),$$

$$(c) \quad H_{\varphi|L}(L | N) \leq H_{\varphi}(M | N).$$

少し仮定を置くと, (a), (b) の成立が証明できる. (c) についてはわからない.

条件付エントロピーの定義 (***) は関係式 (**) が一般に成立するように考え出したものであり, やや便宜的である. 本当は, E^{-1} (よって $\text{Index } E$) を含まないもっと初等的な定義から出発すべきであろう. 例えば (*) のアナロジーや [4] にある $M \supseteq N$ が有限次元の場合の定義を一般にすることなどが考えられる. しかし, このような定義が (***) と一致することをいうのは (たとえ M が II_1 型であっても φ がトレースでなければ) 難しそうに思われる.

§ 4. 最小指数と条件付エントロピー

この節では再び $M \supseteq N$ を factor-subfactor とし, $[M:N]_0 = \text{Index } E_0 < \infty$ を仮定する. 任意の $E \in \mathcal{E}(M, N)$ に対し, $E|N' \cap M$, $E^{-1}|N' \cap M$ は scalar-valued であるから, $H_{\varphi}(M | N)$ は $\varphi \cdot E =$

E となる M 上の忠実正規 state φ の取り方に依らない. 従って $H_{\varphi}(M|N)$ を $H_E(M|N)$ で書く.

命題 3.1(2) より, $E \in \xi(M, N)$ に対し $H_E(M|N) \leq \log \text{Index } E$ であるが, さらに次が成立:

命題 4.1. $H_E(M|N) \leq \log [M:N]_0, \forall E \in \xi(M, N).$

最小指数の新たな特徴づけとして,

定理 4.2. $E \in \xi(M, N)$ に対して次は同値:

(i) $\text{Index } E = [M:N]_0,$

(ii) $H_E(M|N) = \log [M:N]_0,$

(iii) $H_E(M|N) = \log \text{Index } E,$

(iv) $N' \cap M$ の任意の projections $p_1, \dots, p_n$ ($\sum p_i = 1$) に対し

$$\sum_{i=1}^n E(p_i) \log \frac{\text{Index } E}{E(p_i)^2} = \log \text{Index } E,$$

(v) $N' \cap M$ の任意の projection $p (\neq 0)$ に対し

$$\text{Index } E_p = E(p)^2 \text{Index } E.$$

$N' \cap M \neq \mathbb{C}$ のとき, $H_E(M|N), E \in \xi(M, N)$, が取る値の範囲は次のようになる:

定理 4.3. $N' \cap M \neq \mathbb{C}$ ならば,

$$\{H_E(M|N) : E \in \xi(M, N)\} = (\log \alpha, \log [M:N]_0],$$

ここに

$$\begin{aligned} \alpha &= [M:N]_0 \min \{E_0(p)^2 : 0 \neq p \in N' \cap M \text{ projection}\} \\ &= \min \{[M_p:N_p]_0 : 0 \neq p \in N' \cap M \text{ projection}\}. \end{aligned}$$

系 4.4. 次は同値:

$$(i) \inf \{H_E(M|N) : E \in \xi(M, N)\} = 0,$$

$$(ii) N' \cap M \text{ の projection } p (\neq 0) \text{ が存在して } M_p = N_p.$$

例. R を hyperfinite II_1 factor とし, R_λ を Jones[10] の構成した subfactor とする. $\lambda = [R:R_\lambda]^{-1} < 1/4$ のとき, [16] によれば

$$H(R|R_\lambda) = 2(\eta t + \eta(1-t)),$$

ここに $t(1-t) = \lambda$. また projection $f \in R'_\lambda \cap R$, $\tau(f) = t$, と

isomorphism $\theta : R_f \rightarrow R_{1-f}$ が存在して $R_\lambda = \{x \oplus \theta(x) : x \in R_f\}$.

このとき $R'_\lambda \cap R = \mathbb{C}f + \mathbb{C}(1-f)$. τ' を R'_λ 上の規格化トレースとして,

$R_f = (R_\lambda)_f$ より

$$1 = [R_f : (R_\lambda)_f] = [R:R_\lambda] \tau(f) \tau'(f)$$

となり, $\tau'(f) = 1-t$. よって [7] より

$$\begin{aligned} & [R:R_\lambda]_0 \\ &= [R:R_\lambda] \{ (\tau(f)\tau'(f))^{1/2} + (\tau(1-f)\tau'(1-f))^{1/2} \}^2 = 4. \end{aligned}$$

従って最小指数 $[R:R_\lambda]_0$ は Jones 指数 $[R:R_\lambda]$ と一致しない.

$\text{Index } E$, $E \in \mathcal{E}(R, R_\lambda)$, の範囲は $[4, \infty)$ である. また $H_E(R|R_\lambda)$,

$E \in \mathcal{E}(R, R_\lambda)$, の範囲は $(0, \log 4]$ であり, $H(R|R_\lambda) < \log 4$.

最後に, 筆者が特に興味のある一つの問題を挙げておこう.

問題. $[M:N]_0 = \text{Index } E_0 < \infty$ として, $E_0: M \rightarrow N$ から始めて
順次 basic construction [11] を施すと $N \subseteq M_0 = M \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots$
と条件付期待値 $E_n: M_n \rightarrow M_{n-1}$ ($n = 1, 2, \dots$) が得られる. このとき
 $[M_n:M_{n-1}]_0 = \text{Index } E_n = \text{Index } E_0$ は明らか. そこで問題は
 $[M_n:N]_0 = \text{Index}(E_0 \cdot E_1 \cdots E_n)$, i.e. $[M_n:N]_0 = [M:N]_0^{n+1}$ が成
立するかである. これは $H_{E_0 \cdots E_n}(M_n|N) = (n+1)H_{E_0}(M|N)$ と

同値である. 特に M が II_1 factor で $H(M|N) = \log [M:N]$ ($\Leftrightarrow$
 $[M:N]_0 = [M:N]$) のとき, $H(M_n|N) = \log [M_n:N]$ ($\Leftrightarrow [M_n:N]_0 =$
 $[M_n:N]$) となることが [17] で証明されている. 故にこの場合, 上
の問題は正しい. 上述の例の $M=R$, $N=R_\lambda$ ($\lambda < 1/4$) の場合に

$[M_n:N]_0 = [M:N]_0^{n+1} = 4^{n+1}$ かどうか試してみたかったが, 計算
できなかった.

文 献

- [1] H. Araki, Relative entropy of states of von Neumann algebras, Publ. RIMS, Kyoto Univ., **11** (1976), 809-833.
- [2] H. Araki, Relative entropy for states of von Neumann algebra II, Publ. RIMS, Kyoto Univ., **13** (1977), 173-192.
- [3] A. Connes, On the spatial theory of von Neumann algebras, J. Funct. Anal., **35** (1980), 153-164.
- [4] A. Connes, Entropie de Kolmogoroff-Sinai et mécanique statistique quantique, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I, **301** (1985), 1-6.
- [5] A. Connes and E. Størmer, Entropy for automorphisms of II_1 von Neumann algebras, Acta Math., **134** (1975), 289-306.
- [6] U. Haagerup, Operator valued weights in von Neumann algebras, I, II, J. Funct. Anal., **32** (1979), 175-206; **33** (1979), 339-361.
- [7] F. Hiai, Minimizing indices of conditional expectations onto a subfactor, Publ. RIMS, Kyoto Univ., **24** (1988), 673-678.
- [8] F. Hiai, Minimum index for subfactors and entropy, in preparation.
- [9] F. Hiai, M. Ohya and M. Tsukada, Sufficiency, KMS condition and relative entropy in von Neumann algebras, Pacific J. Math., **96** (1981), 99-109.

- [10] V. Jones, Index for subfactors, *Invent. Math.*, **72** (1983), 1-25.
- [11] H. Kosaki, Extension of Jones' theory on index to arbitrary factors, *J. Funct. Anal.*, **66** (1986), 123-140.
- [12] R. Longo, Index of subfactors and statistics of quantum fields, preprint, 1988.
- [13] Y. Nakagami and M. Takesaki, Duality for Crossed Products of von Neumann algebras, *Lecture Notes in Math.*, No. **731**, Springer-Verlag, 1979.
- [14] G. K. Pedersen and M. Takesaki, The Radon-Nikodym theorems for von Neumann algebras, *Acta Math.*, **130** (1973), 53-87.
- [15] D. Petz, Sufficient subalgebras and the relative entropy of states of a von Neumann algebra, *Commun. Math. Phys.*, **105** (1986), 123-131.
- [16] M. Pimsner and S. Popa, Entropy and index for subfactors, *Ann. Sci. École Norm. Sup. Sér. 4*, **19** (1986), 57-106.
- [17] M. Pimsner and S. Popa, Iterating the basic construction, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **310** (1988), 127-133.
- [18] A. Uhlmann, Relative entropy and the Wigner-Yanase-Dyson-Lieb concavity in an interpolation theory, *Commun. Math. Phys.*, **54** (1977), 21-32.
- [19] H. Umegaki, Conditional expectation in an operator

algebra, Tôhoku Math. J., 6 (1954), 177-181.

[20] H. Umegaki, Conditional expectation in an operator algebra, IV (entropy and information), Kôdai Math. Sem. Rep., 14 (1962), 59-85.

[21] 吉田, 相対エントロピーと指数, 「作用素環と指数理論」予稿集, 数理解析研, 1989 (本稿究録).