

対称群のスピン表現に対する Stanley 指標公式

鹿児島大学大学院理工学研究科 松本 詔^{*1}

Sho Matsumoto

Graduate School of Science and Engineering,
Kagoshima University

RIMS 共同研究（公開型）「表現論とその組合せ論的側面」令和元年 10 月 28 日 ～ 10 月 31 日

Stanley 指標公式は、対称群の既約指標を明示的に表す公式の一つである。Piotr Śniady との共同研究 [10] において、その「スピン版」、すなわちスピン表現の既約指標に対する同様の公式を得ることができたので報告する。本稿は、次の 3 つのことについて解説する。

- Stanley 指標公式。
- 対称群の既約指標とスピン既約指標の関係式を与え、Stanley 指標公式のスピン版を得る。
- Stanley 指標公式およびそのスピン版は、マップの言葉で表すことができる。

1 Stanley 指標公式

この章では Stanley 指標公式について解説する。この公式は、特別な場合が Stanley より [14] で得られ、さらに一般の場合が [13] で予想された後、Féray [4] により証明された。また、Féray–Śniady [2] により別表示が得られている。これらの結果の概観を述べる。

1.1 既約指標の正規化

まずは基本用語の準備をする。 $\mathcal{P}_n$ を自然数 n の（整数）分割の全体とし、 $\mathcal{P} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}_n$ を分割全体とする。分割 $\lambda \in \mathcal{P}$ は

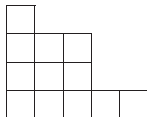
$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l), \quad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_l \geq 1, \quad \lambda_i \in \mathbb{Z}_{>0}$$

と表す。 l を分割 λ の長さといい、 $\ell(\lambda)$ で表す。 $|\lambda| := \sum_{i=1}^l \lambda_i$ を λ のサイズという。 $|\lambda| = n$ は $\lambda \in \mathcal{P}_n$ と同じ意味である。0 の（唯一の）分割は (0) と書くことにする。

分割は Young 図形と同一視する。ただし本稿では Young 図形は「フランス式」で描く

^{*1} shom@sci.kagoshima-u.ac.jp 本研究は基盤研究 (C) No.17K05281 の助成を受けたものです。

ことにする. 例えば, 分割 $\lambda = (5, 3, 3, 1) \in \mathcal{P}_{12}$ の Young 図形は



となる.

n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ の既約指標値を χ_μ^λ ($\lambda, \mu \in \mathcal{P}_n$) で表す. すなわち, 分割 λ に対応する対称群の (複素) 既約表現の指標を χ^λ で表し, その分割 μ に対応する $\mathfrak{S}_n$ の共役類における値を χ_μ^λ で表す. よく知られているように, $f^\lambda := \chi_{(1^n)}^\lambda$ は既約表現の次元 (次数) であり, 型 λ の標準 Young 盤の個数に一致する.

定義 1.1 (正規化された (線形) 指標). k を自然数とし, $\pi \in \mathcal{P}_k$ とする. 関数

$$\text{Ch}_\pi : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{Q}$$

を以下で定める. $\lambda \in \mathcal{P}$ とし, $n := |\lambda| \geq k$ ならば

$$\text{Ch}_\pi(\lambda) = n(n-1) \cdots (n-k+1) \frac{\chi_{\pi \cup (1^{n-k})}^\lambda}{\chi_{(1^n)}^\lambda}.$$

ただし, $\pi \cup (1^{n-k}) = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{\ell(\pi)}, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n-k})$ とした. また, $|\lambda| < k$ のときは

$\text{Ch}_\pi(\lambda) = 0$ と定める.

例えば

$$\text{Ch}_{(0)}(\lambda) = 1, \quad \text{Ch}_{(1)}(\lambda) = |\lambda| = \sum_i \lambda_i, \quad \text{Ch}_{(2)}(\lambda) = \sum_i \lambda_i^2 - \sum_j (\lambda'_j)^2$$

となることはよく知られている. ここで λ'_j は λ の Young 図形の第 j 列の長さである. このような既約指標の正規化 $\text{Ch}_\pi(\lambda)$ は, 対称群の漸近的表現論, ランダム Young 図形の研究などで好んで用いられる. 例えば [6] を参照.

1.2 Stanley 指標公式 (λ が長方形の場合)

Stanley 指標公式を述べよう. まずは λ が長方形 Young 図形の場合を考える. すなわち,

$$\lambda = p \times q := (\underbrace{q, q, \dots, q}_p) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}$$

のときを扱う.

置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ に対し, $C(\sigma)$ で σ のサイクルの全体を表す. 例えば, サイクル分解表示で $\sigma = (1327)(48)(59)(6) \in \mathfrak{S}_9$ と表されたとき, $C(\sigma) = \{(1327), (48), (59), (6)\}$ である.

分割 $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_l) \in \mathcal{P}_k$ に対し, 置換 $w_\pi \in \mathfrak{S}_k$ を

$$w_\pi = (1\ 2 \dots \pi_1) (\pi_1 + 1\ \pi_1 + 2 \dots \pi_1 + \pi_2) \cdots (\pi_1 + \cdots + \pi_{l-1} \dots k)$$

と定める. w_π はサイクル分解の型が π である置換である. 例えば, $\pi = (4, 2, 2, 1) \in \mathcal{P}_9$ のとき, $w_\pi = (1234)(56)(78)(9) \in \mathfrak{S}_9$ となる.

定理 1.2 (Stanley 指標公式 (λ が長方形の場合), [14]). $\pi \in \mathcal{P}_k$ とする. 任意の長方形 Young 図形 $\lambda = p \times q \in \mathcal{P}$ に対し, 次の式が成り立つ.

$$\text{Ch}_\pi(p \times q) = \sum_{\substack{\sigma_1, \sigma_2 \in \mathfrak{S}_k \\ \sigma_1 \sigma_2 = w_\pi}} (\text{sgn } \sigma_1) q^{|C(\sigma_1)|} p^{|C(\sigma_2)|}.$$

ここで和は集合 $M(\pi) := \{(\sigma_1, \sigma_2) \in \mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_k \mid \sigma_1 \sigma_2 = w_\pi\}$ を走る.

例 1.3. (i) $\pi = (2)$ のとき

$$\text{Ch}_{(2)}(p \times q) = q^2 p - qp^2$$

が成り立つ. 実際, $(\sigma_1, \sigma_2) = ((1)(2), (12))$ に対応する項が $q^2 p$ であり, $(\sigma_1, \sigma_2) = ((12), (1)(2))$ に対応する項が $-qp^2$ である.

(ii) $\pi = (3)$ のとき

$$\text{Ch}_{(3)}(p \times q) = q^3 p - 3q^2 p^2 + qp^3 + qp$$

が成り立つ. 符号を除いた各項の対応は以下のようなものである.

σ_1	σ_2	$q^{ C(\sigma_1) } p^{ C(\sigma_2) }$	σ_1	σ_2	$q^{ C(\sigma_1) } p^{ C(\sigma_2) }$
(1)(2)(3)	(123)	$q^3 p$	(23)(1)	(13)(2)	$q^2 p^2$
(12)(3)	(23)(1)	$q^2 p^2$	(123)	(1)(2)(3)	qp^3
(13)(2)	(12)(3)	$q^2 p^2$	(132)	(132)	qp

このように, λ が長方形 Young 図形のときは, $\text{Ch}_\pi(\lambda)$ は明快な表示で表される.

二つのサイクル c, d に対し, $c \cap d \neq \emptyset$ とは, サイクル同士が共通の因子を持つことを意味する. 言い換えると, c と d がある同じ文字 $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ を動かすことである.

例 1.5. (i) λ が長方形の場合を再び考えよう. すなわち定理 1.4 の $m = 1$ の場合である. 彩色 $\varphi : C(\sigma_2) \rightarrow \{1, 2, \dots, m\}$ は $\varphi(c_2) = 1$ ($\forall c_2 \in C(\sigma_2)$) であり, よって $\Phi(c_1) = 1$ ($\forall c_1 \in C(\sigma_1)$) である. したがって, $\hat{N}_{\sigma_1, \sigma_2}(p_1 \times q_1) = q_1^{|C(\sigma_1)|} p_1^{|C(\sigma_2)|}$ となり, 定理 1.4 は定理 1.2 に帰着される.

(ii) $\pi = (2)$ のとき

$$\text{Ch}_{(2)}(\mathbf{p} \times \mathbf{q}) = \sum_{i=1}^m q_i^2 p_i - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m q_{i \vee j} p_i p_j$$

が成り立つ. 実際,

- $\sigma_1 = (1)(2)$, $\sigma = (12)$ のとき. $\varphi((12)) = i$ とすると, $\Phi((1)) = \Phi((2)) = i$ である. よって, $\hat{N}_{\sigma_1, \sigma_2}(\lambda) = \sum_{i=1}^m q_i^2 p_i$ となる.
- $\sigma_1 = (12)$, $\sigma_2 = (1)(2)$ のとき. $\varphi((1)) = i$, $\varphi((2)) = j$ とすると, $\Phi((12)) = i \vee j$ ($:= \max(i, j)$) である. よって, $\hat{N}_{\sigma_1, \sigma_2}(\lambda) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m q_{i \vee j} p_i p_j$ となる.

(iii) $\pi = (3)$ のとき

$$\text{Ch}_{(3)}(\mathbf{p} \times \mathbf{q}) = \sum_i q_i^3 p_i - 3 \sum_{i,j} q_{i \vee j} q_i p_i p_j + \sum_{s,t,u} q_{\max(s,t,u)} p_s p_t p_u + \sum_i q_i p_i$$

が成り立つ. 実際, 各項の対応は以下である.

σ_1	σ_2	$\hat{N}_{\sigma_1, \sigma_2}(\mathbf{p} \times \mathbf{q})$
(1)(2)(3)	(123)	$\sum_i q_i^3 p_i$
(12)(3)	(23)(1)	$\sum_{i,j} q_{i \vee j} q_i p_i p_j$
(13)(2)	(12)(3)	$\sum_{i,j} q_{i \vee j} q_i p_i p_j$
(23)(1)	(13)(2)	$\sum_{i,j} q_{i \vee j} q_i p_i p_j$
(123)	(1)(2)(3)	$\sum_{s,t,u} q_{\max(s,t,u)} p_s p_t p_u$
(132)	(132)	$\sum_i q_i p_i$

1.4 Stanley 指標公式 (N 関数による表示)

Stanley 指標公式は, 別の形で表すことができる. 次の言葉を導入しよう. まず, 分割 $\lambda \in \mathcal{P}$ に対し, 集合 $Y(\lambda)$ を

$$Y(\lambda) = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid 1 \leq y \leq \ell(\lambda), 1 \leq x \leq \lambda_y\}$$

と定める. これは λ の Young 図形をフランス式で描いたときの, Young 図形の箱の座標たちに他ならない. 例えば,

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & & & \\ \hline \square & \square & & \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} = \{ \underbrace{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1)}_{\text{1st row}}, \underbrace{(1, 2), (2, 2)}_{\text{2nd row}}, \underbrace{(1, 3)}_{\text{3rd row}} \}$$

となる.

定義 1.6. $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathfrak{S}_k$, $\lambda \in \mathcal{P}$ とする. 彩色関数

$$f_1 : C(\sigma_1) \rightarrow \{1, 2, \dots\}, \quad f_2 : C(\sigma_2) \rightarrow \{1, 2, \dots\}$$

を考える. 彩色関数の組 (f_1, f_2) が λ に**適合する**とは, 次の条件が成り立つときをいう:

$$c_1 \in C(\sigma_1), c_2 \in C(\sigma_2), c_1 \cap c_2 \neq \emptyset \implies (f_1(c_1), f_2(c_2)) \in Y(\lambda).$$

このような組 (f_1, f_2) の個数を $N_{\sigma_1, \sigma_2}(\lambda)$ で表す.

次が成り立つ.

補題 1.7. 任意の $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathfrak{S}_k$ と $\lambda \in \mathcal{P}$ に対し, $N_{\sigma_1, \sigma_2}(\lambda) = \hat{N}_{\sigma_1, \sigma_2}(\lambda)$ である. ここで $\hat{N}_{\sigma_1, \sigma_2}(\lambda)$ は (1.1) で定まる量である.

この補題と定理 1.4 より, 直ちに次がいえる.

定理 1.8 (Stanley 指標公式 (N 関数による表示), [2]). $\pi \in \mathcal{P}_k$ とし, $\lambda \in \mathcal{P}$ とする. このとき次の式が成り立つ.

$$\text{Ch}_\pi(\lambda) = \sum_{\substack{\sigma_1, \sigma_2 \in \mathfrak{S}_k \\ \sigma_1 \sigma_2 = w_\pi}} (\text{sgn } \sigma_1) N_{\sigma_1, \sigma_2}(\lambda).$$

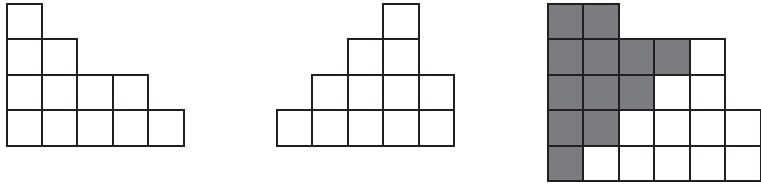
2 スピン Stanley 指標公式

2.1 スピン指標

この章の目的は, 定理 1.8 の「スピン版」を与えることである. まず, いくつかの組合せ論の用語を準備する.

分割 $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_l) \in \mathcal{P}$ は, (0 でない) 成分 ξ_i がすべて異なるとき, すなわち $\xi_1 > \xi_2 > \dots > \xi_l > 0$ となるとき, **ストリクト** (strict) であるという. $\mathcal{P}_n$ 内のストリクトな分割全体を $\mathcal{SP}_n$ で表し, $\mathcal{SP} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{SP}_n$ とおく.

次の3つの図のうち、左は分割 $\xi = (5, 4, 2, 1) \in \mathcal{SP}_{12}$ の Young 図形（フランス式）である。ストリクトな分割の場合は、通常の Young 図形の行をシフトして定まるシフト図形を好んで用いる（図の真ん中）。またシフト図形とそれを折り返したものを貼り合わせてできる、図の右のものを、 ξ のダブル図形という。



ストリクトな分割 ξ に対し、 ξ のダブル図形を（元の）Young 図形にもつ分割 μ のことを、 ξ の**ダブル** (double) といい、 $D(\xi) = \mu$ で表す。例えば上の分割 $\xi = (5, 4, 2, 1) \in \mathcal{SP}_{12}$ に対し、 $D(\xi) = (6, 6, 5, 5, 2) \in \mathcal{P}_{24}$ である。本稿では、ストリクトな分割 ξ に対してそのダブル $D(\xi)$ を中心に扱う。

分割 $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_l) \in \mathcal{P}$ は、全ての成分 π_i が奇数であるとき、**奇数分割**であるという。 $\mathcal{P}_n$ 内の奇数分割全体を $\mathcal{OP}_n$ で表し、 $\mathcal{OP} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{OP}_n$ とおく。一般に $|\mathcal{SP}_n| = |\mathcal{OP}_n|$ となることはよく知られている。

2.2 スピン既約指標

既約指標値 $\{\chi_\mu^\lambda \mid \lambda, \mu \in \mathcal{P}_n\}$ のスピン版

$$\{X_\pi^\xi \mid \xi \in \mathcal{SP}_n, \pi \in \mathcal{OP}_n\}$$

を導入しよう。本来ならば表現を与えて指標を定義するべきだが、ここでは対称関数を用いて導入する。

Macdonald の本 [8] の書式に従って対称関数を用いる。分割 ν に対応する Newton 冪和関数を p_ν で表す。分割 λ に対応する Schur 関数を s_λ で表す。 p_ν を Schur 関数 (s_λ) で展開するとき、係数に既約指標値 χ_ν^λ が現れるのだった：

$$p_\nu = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_n} \chi_\nu^\lambda s_\lambda \quad (\nu \in \mathcal{P}_n).$$

この式の「スピン」のアナロジーを考える。ストリクトな分割 $\xi \in \mathcal{SP}_n$ に対応する Schur P -関数を P_ξ で表す。 π が奇数分割のとき、 p_π は Schur P -関数 (P_ξ) で展開できる。そのときの係数を X_π^ξ と定める。すなわち、

$$p_\pi = \sum_{\xi \in \mathcal{SP}_n} X_\pi^\xi P_\xi \quad (\pi \in \mathcal{OP}_n).$$

量 X_π^ξ は対称群のスピンの表現に関連しているのだが、ここでは表現論は直接必要ではないので、詳細は書略する。例えば [7] を参照されたい。

定義 1.1 のスピン版を、以下のように定める。

定義 2.1 (正規化されたスピン指標). k を自然数とし, $\pi \in \mathcal{OP}_k$ とする. このとき関数

$$\text{Ch}_\pi^{\text{spin}} : \mathcal{SP} \rightarrow \mathbb{Q}$$

を以下で定める. $\xi \in \mathcal{SP}$ とし, $n := |\xi| \geq k$ ならば

$$\text{Ch}_\pi^{\text{spin}}(\xi) = n(n-1) \cdots (n-k+1) \frac{X_{\pi \cup (1^{n-k})}^\xi}{X_{(1^n)}^\xi}.$$

また, $|\xi| < k$ のとき $\text{Ch}_\pi^{\text{spin}}(\xi) = 0$ と定める。

2.3 Linear vs Spin

線形指標 Ch_π とスピン指標 $\text{Ch}_\pi^{\text{spin}}$ は、次のような関係式がある。ストリクトな分割 ξ に対し, $D(\xi)$ でそのダブルを表すのだった。

定理 2.2 ([10]). $\xi \in \mathcal{SP}$ とする. 任意の奇数 $k = 1, 3, 5, \dots$ に対し,

$$(2.1) \quad \text{Ch}_k(D(\xi)) = 2 \text{Ch}_k^{\text{spin}}(\xi).$$

が成り立つ. より一般に, 任意の奇数分割 $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_l) \in \mathcal{OP}$ に対し,

$$(2.2) \quad \text{Ch}_\pi(D(\xi)) = \sum_{S \subset \{1, 2, \dots, l\}} \text{Ch}_{\pi(S)}^{\text{spin}}(\xi) \text{Ch}_{\pi(S^c)}^{\text{spin}}(\xi),$$

が成り立つ. ここで, $S = \{i_1 < i_2 < \dots < i_r\}$ に対して $\pi(S) = (\pi_{i_1}, \pi_{i_2}, \dots, \pi_{i_r})$ とおいた。

例 2.3.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{Ch}_{(\pi_1, \pi_2, \pi_3)}(D(\xi)) &= \text{Ch}_{(\pi_1, \pi_2, \pi_3)}^{\text{spin}}(\xi) + \text{Ch}_{(\pi_1, \pi_2)}^{\text{spin}}(\xi) \text{Ch}_{\pi_3}^{\text{spin}}(\xi) \\ &\quad + \text{Ch}_{(\pi_1, \pi_3)}^{\text{spin}}(\xi) \text{Ch}_{\pi_2}^{\text{spin}}(\xi) + \text{Ch}_{(\pi_2, \pi_3)}^{\text{spin}}(\xi) \text{Ch}_{\pi_1}^{\text{spin}}(\xi). \end{aligned}$$

定理 2.2 の証明の概略. $\Lambda = \Lambda_{\mathbb{Q}}$ を, 対称関数全体のなす $\mathbb{Q}$ 上の代数とする. これは冪和関数 $\{p_r \mid r = 1, 2, 3, \dots\}$ で生成される. また Γ を, 奇数番目の冪和関数 $\{p_r \mid r =$

$1, 3, 5, \dots\}$ で生成される Λ の部分代数とする. Schur 関数の族 $\{s_\lambda \mid \lambda \in \mathcal{P}\}$ は Λ の基底をなし, Schur Q -関数の族 $\{Q_\xi \mid \xi \in \mathcal{SP}\}$ は Γ の基底をなす.

代数の準同型 $\phi: \Lambda \rightarrow \Gamma$ を

$$\phi(p_{2r-1}) = 2p_{2r-1}, \quad \phi(p_{2r}) = 0, \quad (r = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める. このとき $\xi \in \mathcal{SP}$ に対し, $D(\xi)$ に対応する Schur 関数 $s_{D(\xi)}$ の像は

$$(2.3) \quad \phi(s_{D(\xi)}) = 2^{-\ell(\xi)}(Q_\xi)^2$$

となる ([8, III-8, Ex. 10]).

一方, Λ, Γ それぞれにおいて, 以下の等式が成り立つ.

$$s_\lambda = \sum_{\pi} z_\pi^{-1} \chi_\pi^\lambda p_\pi, \quad Q_\xi = \sum_{\nu} 2^{\ell(\nu)} z_\nu^{-1} X_\nu^\xi p_\nu.$$

これらの等式を (2.3) に代入すると,

$$\sum_{\pi \in \mathcal{OP}_{2n}} z_\pi^{-1} \chi_\pi^{D(\xi)} 2^{\ell(\pi)} p_\pi = 2^{-\ell(\xi)} \left(\sum_{\nu \in \mathcal{OP}_{2n}} 2^{\ell(\nu)} z_\nu^{-1} X_\nu^\xi p_\nu \right)^2$$

となる. 両辺の p_π の係数を比較することで, 定理の主張が得られる. $\square$

一般に対称群のスピンの表現の理論は線形の場合とパラレルな議論となるが, より複雑になる. 例えば, 親しみやすい Schur 関数 s_λ に対してもう少しとつづきにくい Schur Q -関数 Q_ξ が必要であるし, 表現の構成に至ってはスーパー代数 (super-algebra) を考えるなど, 複雑化する. にもかかわらず定理 2.2 は, 線形指標 Ch_ν とスピン指標 $\text{Ch}_\pi^{\text{spin}}$ の直接的な関係式を与えている. これは驚くべきことではないだろうか? また, このような簡明な等式であるにも関わらず, これまで (おそらく) 知られていなかったことも意外である.

定理 2.2 の式は逆に解くことができる. すなわち, スピン指標 $\text{Ch}_\pi^{\text{spin}}$ を線形指標により表すことができる.

定理 2.4 ([10]). $k \geq 1$, $\pi \in \mathcal{OP}_k$ とする. 任意の $\xi \in \mathcal{SP}$ に対し, 次の等式が成り立つ.

$$\text{Ch}_\pi^{\text{spin}}(\xi) = \sum_I (-1)^{|I|-1} (2|I|-3)!! \cdot 2^{-|I|} \prod_{b \in I} \text{Ch}_{\pi(b)}(D(\xi)).$$

ここで, 和は $\{1, 2, \dots, \ell(\pi)\}$ の集合分割 I 全体を走る. $|I|$ は集合分割 I のブロックの個数で, また $(-1)!! = 1$ と定める.

例 2.5. 記号を簡略化して, $\widetilde{\text{Ch}}_\pi(\xi) := 2^{-1} \text{Ch}_\pi(D(\xi))$ と書く.

$$\begin{aligned} \text{Ch}_{(\pi_1, \pi_2, \pi_3)}^{\text{spin}}(\xi) &= \widetilde{\text{Ch}}_{(\pi_1, \pi_2, \pi_3)}(\xi) - \widetilde{\text{Ch}}_{(\pi_1, \pi_2)}(\xi) \cdot \widetilde{\text{Ch}}_{\pi_3}(\xi) \\ &\quad - \widetilde{\text{Ch}}_{(\pi_1, \pi_3)}(\xi) \cdot \widetilde{\text{Ch}}_{\pi_2}(\xi) - \widetilde{\text{Ch}}_{(\pi_2, \pi_3)}(\xi) \cdot \widetilde{\text{Ch}}_{\pi_1}(\xi) \\ &\quad + 3 \cdot \widetilde{\text{Ch}}_{\pi_1}(\xi) \cdot \widetilde{\text{Ch}}_{\pi_2}(\xi) \cdot \widetilde{\text{Ch}}_{\pi_3}(\xi). \end{aligned}$$

2.4 Stanley 指標公式のスピ版

定理 2.4 によると, スピン指標 $\text{Ch}_\pi^{\text{spin}}$ の性質を, 線形指標 Ch_ν の性質から導くことができる. 次の定理はそうにして定理 1.8 から容易に得られる.

定理 2.6 (スピン Stanley 指標公式 [10]). k の奇数分割 $\pi \in \mathcal{OP}_k$ と任意のストリクト分割 $\xi \in \mathcal{SP}$ に対し, 次が成り立つ.

$$\text{Ch}_\pi^{\text{spin}}(\xi) = \sum_{\substack{\sigma_1, \sigma_2 \in \mathfrak{S}_k \\ \sigma_1 \sigma_2 = w_\pi}} \frac{1}{2^{|\sigma_1 \vee \sigma_2|}} (\text{sgn } \sigma_1) N_{\sigma_1, \sigma_2}(D(\xi)).$$

ここで $|\sigma_1 \vee \sigma_2|$ は, σ_1, σ_2 で生成される $\mathfrak{S}_k$ の部分群 $\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$ の軌道の個数を表す.

注意 2.7. (i) これ以外にも, 定理 2.4 はスピン指標に対する多くのことを線形指標から引き出してくれる. 例えばランダム・ストリクト分割などの確率論的側面を, この研究の続編の [11] で与えている.

(ii) 他にもいくつかのタイプの Stanley 指標公式が得られている. Gelfand ペア $(\mathfrak{S}_{2n}, H_n)$ (H_n は超八面体群) に対する帯球関数, すなわち zonal polynomial に対する類似物は [5] で得られている. より一般化した Jack 指標・Jack 関数に対する Stanley 指標公式は, 部分的な結果が [1] などで得られているが, 完全な形は未解決である.

(iii) 線形指標 $\text{Ch}_k(\lambda)$ を自由キウムラント $R_j(\lambda)$ で表した表示式を, Kerov 多項式という. Kerov 多項式と Stanley 指標公式は密接な関係にあり, Féray [3] はこの関係を利用して Kerov 多項式の係数が全て非負整数であること (Kerov's positivity conjecture) を示した. Kerov 多項式のスピ版 (の候補) は, 以前の講究録 [9] で報告している.

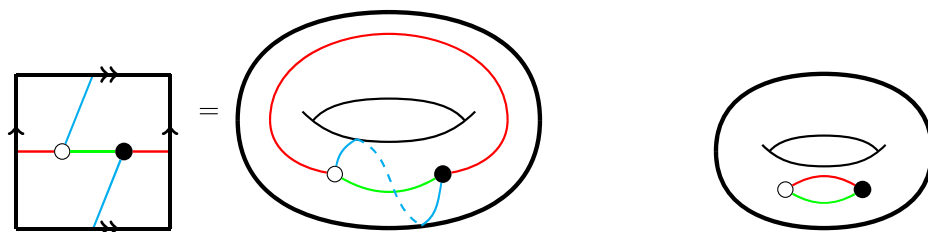


図1 (左) トーラス $S^1 \times S^1$ 上に描かれたマップ. 頂点が2つ, 辺が3つ, 面が1つある. 左の正方形の辺を, 矢印の向きが合うように貼り合わせると出来上がる. (右) これもトーラスの上に描かれたグラフではあるが, これはマップではない.

3 スピン Stanley 指標公式とマップ

Stanley 指標公式 (定理 1.8) はマップの言葉で記述することができる. スピン Stanley 指標公式 (定理 2.6) も同様の表示があり, この章ではそれを報告する.

3.1 マップ

マップ $M = (\mathcal{G}, \Sigma)$ とは, 閉曲面 Σ 上に描かれた有限無向グラフ $\mathcal{G} = (V, E)$ で, 次の条件を満たすものをいう: 「 Σ を $\mathcal{G}$ の辺で切った領域の各連結成分が, 開円板と同相になる». この開円板と同相な各連結成分を, マップ M の面と呼ぶ.

以下 $\mathcal{G}$ は二部グラフとする. すなわち, 頂点集合 V が二つの集合の非交和 $V = V_\circ \sqcup V_\bullet$ で構成され, 辺は必ず $V_\circ$ の元 (白い頂点) と $V_\bullet$ の元 (黒い頂点) を結ぶものとする. このときマップ M を二部マップという. 図1の左のものは二部マップである.

次の定義は, 定義 1.6 の類似である.

定義 3.1. $M = (\mathcal{G}, \Sigma)$ を二部マップとする. 頂点集合を $V = V_\circ \sqcup V_\bullet$ と表す. 彩色関数

$$f_1 : V_\circ \rightarrow \{1, 2, \dots\}, \quad f_2 : V_\bullet \rightarrow \{1, 2, \dots\}$$

を考える. 彩色関数の組 (f_1, f_2) が分割 $\lambda \in \mathcal{P}$ に**適合する**とは, 次の条件が成り立つときをいう:

$$v_1 \in V_\circ, v_2 \in V_\bullet, v_1 \text{ と } v_2 \text{ が辺でつながっている} \implies (f_1(v_1), f_2(v_2)) \in Y(\lambda).$$

このような組 (f_1, f_2) の個数を $N_M(\lambda)$ で表す.

3.2 π -polygons

さて、我々がここで扱う二部マップを説明しよう。

分割 $\pi \in \mathcal{P}_k$ をとる。次のような多角形の族を π -polygons と呼ぶ。具体例で説明する。 $\pi = (3, 3, 2, 1) \in \mathcal{P}_9$ を考えると、図 2 が π -polygons である。まず、 $(2\pi_1)$ -角形、 $(2\pi_2)$ -角形、... を用意する。 $\pi = (3, 3, 2, 1)$ のときは、6 角形、6 角形、4 角形、2 角形である。各 $(2\pi_j)$ -角形の頂点は、交互に「白い頂点」と「黒い頂点」になっている。そして多角形の辺に、 $1, 1^*, 2, 2^*, \dots, k, k^*$ ($k = |\pi|$) というラベルをつける。ラベルの付け方は、まず初めに $(2\pi_1)$ -角形の白い頂点を一つ選び、そこから時計回りで辺に $1, 1^*, 2, 2^*, \dots, \pi_1, \pi_1^*$ とラベルをつける。次に隣の $(2\pi_2)$ -角形の白い頂点を一つ選び、そこから時計回りに $(\pi_1 + 1), (\pi_1 + 1)^*, \dots, (\pi_1 + \pi_2), (\pi_1 + \pi_2)^*$ とラベルをつける。これを繰り返す。このようにしてできたものが π -polygons である。

さて、 π -polygons を一つ固定する。辺の集合 $\{1, 1^*, 2, 2^*, \dots, k, k^*\}$ の完全マッチング $\mathbf{p} = \{\{p_1, p_2\}, \{p_3, p_4\}, \dots, \{p_{2k-1}, p_{2k}\}\}$ を任意にとる。そして $\mathbf{p}$ の各ペア $\{p_{2j-1}, p_{2j}\}$ に対して π -polygons の対応する辺を、辺の両端の点の色 (白/黒) が合う向きに貼り合わせる (同一視する)。すると、 π -polygons の各多角形を面とする二部マップが出来上がる。このようにして構成してできる二部マップ全体を $\widetilde{\mathcal{M}}(\pi)$ で表す。

個数 $|\widetilde{\mathcal{M}}(\pi)|$ は $2k$ 点の完全マッチングの個数に一致するので、 $|\widetilde{\mathcal{M}}(\pi)| = (2k - 1)!!$ である。また、 $M \in \widetilde{\mathcal{M}}(\pi)$ の辺集合 E と面集合 F に対して、 $|E| = |\pi| = k$ 、 $|F| = \ell(\pi)$ となる。

$\widetilde{\mathcal{M}}(\pi)$ に属するマップは、例えば図 3 や図 4 のようになる。このように、出来上がったマップは、球面のような向き付け可能な閉曲面の上のグラフになったり、射影平面のような向き付け不可能な閉曲面の上のグラフになったりする。これらをそれぞれ向き付け可能なマップ、向き付け不可能なマップと呼ぶ。なお、閉曲面 Σ が連結でない場合は、 Σ のすべての連結成分が向き付け可能な場合に、 M は向き付け可能なマップと呼ぶ。 $\widetilde{\mathcal{M}}(\pi)$ に属するマップのうち、向き付け可能なマップの全体を $\mathcal{M}^{\text{spin}}(\pi)$ と表そう。

ようやく準備ができた。スピン Stanley 指標公式 (定理 2.6) をマップの言葉で記す。

定理 3.2 ([10]). $\pi \in \mathcal{OP}_k$, $\xi \in \mathcal{SP}$ とする。このとき次が成り立つ。

$$2^{\ell(\pi)} \cdot \text{Ch}_{\pi}^{\text{spin}}(\xi) = \sum_{M \in \mathcal{M}^{\text{spin}}(\pi)} (-1)^{k - |V_0(M)|} N_M(D(\xi)).$$

ここで $|V_0(M)|$ はマップ M の白い頂点の個数である。

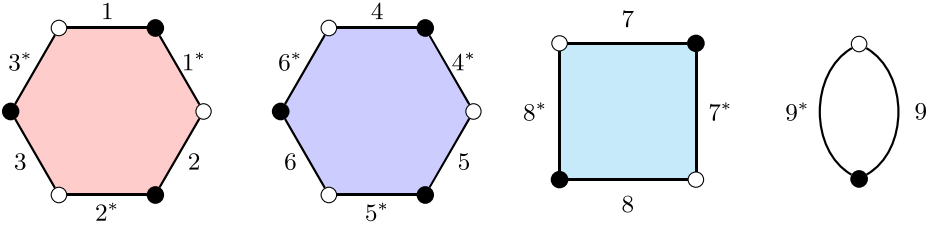


図2 (3, 3, 2, 1)-polygons

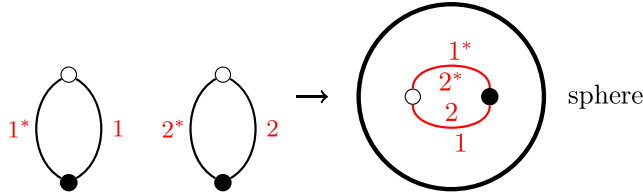


図3 $\pi = (1, 1)$ とする. π -polygons を, 完全マッチング $\mathbf{p} = \{\{1, 2\}, \{1^*, 2^*\}\}$ により辺を貼り合わせると, 出来上がった二部マップは球面上のマップになる. $|V_\circ| = 1$, $|V_\bullet| = 1$, $|E| = 2$, $|F| = 2$ となる. ただし, F はマップ M の面の集合である.

注意 3.3. 線形 Stanley 指標公式定理 1.8 のマップによる表示は, Śniady [12] により与えられている. $\pi \in \mathcal{P}_k$ として, π -polygons を考える. 上の説明では, π -polygons の辺集合 $\{1, 1^*, 2, 2^*, \dots, k, k^*\}$ の完全マッチング $\mathbf{p} = \{\{p_1, p_2\}, \{p_3, p_4\}, \dots, \{p_{2k-1}, p_{2k}\}\}$ を考えた. ここで完全マッチングを次の形のものに制限して考える.

$$\mathbf{p} = \{\{i_1, 1^*\}, \{i_2, 2^*\}, \dots, \{i_k, k^*\}\}, \quad (i_1, i_2, \dots, i_k \text{ は } 1, 2, \dots, k \text{ の順列}).$$

これらの形の完全マッチングに対応する辺の貼り合わせでできるマップ全体を $\mathcal{M}(\pi)$ で表す. $\mathcal{M}(\pi)$ に属するマップは, 常に向き付け可能となる. このとき (線形)Stanley 指標公式 (定理 1.8) は

$$\text{Ch}_\pi(\lambda) = \sum_{M \in \mathcal{M}(\pi)} (-1)^{k - |V_\circ(M)|} N_M(\lambda) \quad (\lambda \in \mathcal{P})$$

と書き換えることができる.

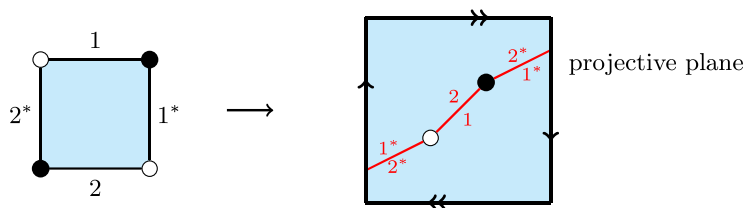


図4 $\pi = (2)$ とする. π -polygon(s) を, 完全マッチング $p = \{\{1, 2\}, \{1^*, 2^*\}\}$ で辺を貼り合わせると, 出来上がった二部マップは射影平面の上のマップになる. $|V_\circ| = 1$, $|V_\bullet| = 1$, $|E| = 2$, $|F| = 1$ となる.

参考文献

- [1] Maciej Dołęga, Valentin Féray, and Piotr Śniady. Jack polynomials and orientability generating series of maps. *Sém. Lothar. Combin.*, Vol. 70, No. B70j, 2014. 50 pages.
- [2] V. Féray and P. Śniady. Asymptotics of characters of symmetric groups related to Stanley character formula. *Ann. of Math.*, Vol. 173, No. 2, pp. 887–906, 2011.
- [3] Valentin Féray. Combinatorial interpretation and positivity of Kerov’s character polynomials. *J. Algebraic Combin.*, Vol. 29, No. 4, pp. 473–507, 2009.
- [4] Valentin Féray. Stanley’s formula for characters of the symmetric group. *Ann. Comb.*, Vol. 13, No. 4, pp. 453–461, 2010.
- [5] Valentin Féray and Piotr Śniady. Zonal polynomials via Stanley’s coordinates and free cumulants. *J. Algebra*, Vol. 334, pp. 338–373, 2011.
- [6] 洞彰人. 対称群の表現とヤング図形集団の解析学 — 漸近的表現論への序説. 数学の杜 4. 数学書房, 2017.
- [7] V. N. Ivanov. The Gaussian limit for projective characters of large symmetric groups. *Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI)*, Vol. 283, No. Teor. Predst. Din. Sist. Komb. i Algoritm. Metody. 6, pp. 73–97, 2001. Translation in *J. Math. Sci. (N. Y.)* 121 (2004), no. 3, 2330–2344.
- [8] I. G. Macdonald. *Symmetric functions and Hall polynomials*. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, second edition, 1995.
- [9] 松本詔. 対称群のスピ表現に対する Kerov 多項式. 組合せ論的表現論の諸相, 数理解析研究所講究録, 第 2127 巻. 京都大学, 2019.

- [10] Sho Matsumoto and Piotr Śniady. Linear versus spin: representation theory of the symmetric groups. *Algebraic Combinatorics*, Vol. 3, No. 1, pp. 249–280, 2020.
- [11] Sho Matsumoto and Piotr Śniady. Random strict partitions and random shifted tableaux. *Selecta Mathematica*, Vol. 26, No. 10, 2020. 59 pages.
- [12] Piotr Śniady. Combinatorics of asymptotic representation theory. In *European Congress of Mathematics*, pp. 531–545. Eur. Math. Soc., Zürich, 2013.
- [13] Richard P. Stanley. A conjectured combinatorial interpretation of the normalized irreducible character values of the symmetric group. [arXiv:math/0606467](https://arxiv.org/abs/math/0606467).
- [14] Richard P. Stanley. Irreducible symmetric group characters of rectangular shape. *Sém. Lothar. Combin.*, Vol. 50, pp. Art. B50d, 11 pages, 2004.